Numerik (SoSe 2012)

Übungsblatt 8 — Abgabe: Di, 19. Juni 2012, bis 16^{30} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 17: (2+2 Punkte)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und P_n das zu den äquidistanten Stützstellen $a_i = a + ih$, $i = 0, ..., n$, $h = (b-a)/n$, gehörige Lagrange-Interpolationspolynom. Zeigen Sie, dass für die Quadraturformeln

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx = h \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(a_i), \quad \alpha_i = \int_0^n \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{s-k}{i-k} ds$$

die folgenden Aussagen gelten:

i) $\alpha_{n-i} = \alpha_i, \ \ i = 0, ..., n$

ii) $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = n$

Aufgabe 18: (8 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $h = (b-a)/2$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^4[a,b]$. Zeigen Sie: Unter diesen Voraussetzungen hat die Simpson-Regel die Ordnung 5. Insbesondere existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(b)\right] = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

Hinweis: Hermite-Interpolation

Programmieraufgabe 6: (12 Punkte)

Schreiben Sie ein Matlab-Programm, welches die folgenden summierten Quadraturformeln

a) Summierte Trapezregel

$$T(h) = h\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right),$$

wobei $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, N$ und $h = \frac{b-a}{N}$.

b) Summierte Simpsonregel

$$S(h) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_1) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\left(f(x_{2i}) + 2f(x_{2i+1})\right)\right),$$

wobei $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, 2N$ und $h = \frac{b-a}{2N}$.

c) Summierte Newtonsche 3/8 Regel

$$Q(h) = \frac{3h}{8}\left(f(a) + f(b) + 3\sum_{i=1}^{N}(f(x_{3i-2}) + f(x_{3i-1})) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_{3i})\right),$$

wobei $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, 3N$ und $h = \frac{b-a}{3N}$.

für $N = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ berechnet. Berechnen Sie damit folgende Integrale

i)

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx = 1$$

ii)

$$I_2 = \int_0^{1} x^2 \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e} - 1$$

numerisch. geben Sie für beide Integrale jeweils für $k = 1, 2$

$$N, T(h), e_T(h,k), S(h), e_S(h,k), Q(h), e_Q(h,k)$$

tabellarisch auf zehn Nachkommastellen genau aus. Geben sie zusätzlich den Fehler für $X = \{T, S, Q\}$

$$e_X(h,k) := |X(h) - I_k|$$

und der Fehlerquotient

$$q_X(h,k) := \frac{e_X(h,k)}{e_X(h/2,k)}.$$

wie folgt

$$N, e_T(h,k), q_T(h,k), e_S(h,k), q_S(h,k), e_Q(h,k), q_Q(h,k)$$

tabellarisch in geeigneter Formatierung aus.
Plotten Sie Schrittweiten h und die Fehler $e_X(h,k)$ mit doppelt logarithmischer Skala (`loglog(h,Error)`).
Wie kann man aus diesen Grafiken die Fehlerordnung der Verfahren ablesen?
Was können Sie beobachten? Kommentieren Sie die Ergebnisse ausführlich!

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie die Ergebnisse (nicht den Quellcode) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.