Numerik (SoSe 2012)

Übungsblatt 4 — Abgabe: Di, 15. Mai 2012, bis 16^{30} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 8: (7+4 Punkte)

Betrachten Sie für eine gegebene Vektornorm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die lub-Norm

$$\operatorname{lub}(A) = \max_{\|x\|\le 1} \|Ax\|.$$

i) Zeigen Sie, dass jede lub-Norm eine konsistente Matrixnorm ist.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass gilt

$$\operatorname{lub}(A) = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

ii) Sei nun speziell $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ gegeben durch $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann die zugehörige lub-Norm erfüllt:

$$|||A|||_2 := \operatorname{lub}(A) = \max\left\{\sqrt{\lambda_i} : \lambda_i \text{ Eigenwert von } A^T A\right\}$$

Aufgabe 9: (8 Punkte)

Beweisen Sie das Korollar zum Banach Lemma aus der Vorlesung.
Seien dazu $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|||A^{-1}B||| < 1$, $|||\cdot|||$ eine konsistente Matrixnorm. Dann gilt

i) $(A+B)^{-1}$ existiert,

ii) $|||(A+B)^{-1}||| \le \frac{|||A^{-1}|||}{1-|||A^{-1}B|||}$

ii) $|||(A+B)^{-1} - A^{-1}||| \le \frac{|||A^{-1}B||||||A^{-1}|||}{1-|||A^{-1}B|||}$

Aufgabe 10: (2+3 Punkte)

Seien $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ untere Dreiecksmatrizen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

i) $L_1 \cdot L_2$ ist eine untere Dreiecksmatrix.

ii) Falls L_1 invertierbar ist, so ist auch L_1^{-1} eine untere Dreiecksmatrix.

Aufgabe 11: (6 Punkte)

Betrachten Sie zur Lösung eines linearen Gleichungssystems das Iterationsverfahren

$$x_{i+1} = Mx_i + c, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

mit einer geeigneten Iterationsmatrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\rho(M) < 1$, sowie $c \in \mathbb{R}^n$. Ferner seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$, $\rho(M) = |\lambda_1| > |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|$, die Eigenwerte und $v_1, ..., v_n$ eine als existent vorausgesetzte zugehörige Orthonormalbasis der Eigenvektoren von M.
Weiterhin bezeichne x_* den eindeutigen Grenzwert der Fixpunktiteration (1) und $e_i = x_i - x_* \neq 0$ den Fehler im i-ten Iterationsschritt. Zeigen Sie:

Falls $e_0 = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k v_k$ mit $\gamma_1 \neq 0$, so folgt

$$\frac{\|e_{i+1}\|_2}{\|e_i\|_2} \to \rho(M)\,, \quad i \to \infty$$

Wie interpretieren Sie diese Aussage?

Programmieraufgabe 2: (6 Punkte)

Nutzen Sie die Matlab-Routinen $[L, R] = lu(A)$ sowie $X = qr(A)$, um die LR- und QR-Zerlegung der zufällig erzeugten Matrizen $A = rand(n_i, n_i)$, $n_i = 2^i$, $i = 1, ..., i_{max}$ zu berechnen, wobei i_{max} das größte i bezeichnet, so dass der von Ihnen eingesetzte Rechner noch die Zerlegungen berechnen kann (z.B. $i = 12$ oder $i = 13$).

Geben Sie für jedes i die benötigte Zeit t_i^{lr} zur Berechnung der LR- sowie t_i^{qr} zur Berechnung der QR-Zerlegung aus (Ermittlung der Rechenzeit über die Befehle *tic*, *toc*). Ermitteln Sie ferner für $i = 2, ..., i_{max}$ die Quotienten

$$q_i^{lr} = \log(t_i^{lr}/t_{i-1}^{lr})/\log(n_i/n_{i-1}), \quad q_i^{qr} = \log(t_i^{qr}/t_{i-1}^{qr})/\log(n_i/n_{i-1}), \quad f_i = (t_i^{qr}/t_i^{lr})$$

Was können Sie beobachten? Kommentieren und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse ausführlich. Leiten Sie ferner die Quotienten q_i^{lr} und q_i^{qr} aus geeigneten Gleichungen her.

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie die Ergebnisse (nicht den Quellcode) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.