Numerik (SoSe 2012)

Übungsblatt 2 — Abgabe: Mi, 2. Mai 2012, bis 8^{30} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Beweisen Sie für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

a) $\lambda = 0$ ist Eigenwert zu $A \Leftrightarrow A$ ist nicht invertierbar

b) Falls A invertierbar ist, gilt

$$c_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{(-\lambda)^n}{\det(A)} c_A(\lambda^{-1})$$

c) A und $A^\top$ haben dieselben Eigenwerte.

d) Es gilt

$$c_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^{n-i}$$

wobei

$$\alpha_0 = (-1)^n, \quad \alpha_1 = (-1)^{n-1}\operatorname{sp}(A), \quad \alpha_n = \det(A).$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die Spur (Summe der Diagonalelemente) einer Matrix.

e) Sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte von A, so gilt

$$\operatorname{sp}(A) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass für $x_1, x_2, ..., x_n$ Nullstellen eines Polynoms p mit $\alpha_0 = 1$ der Zerfall in Linearfaktoren gilt:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenräume der Matrix A.
Zeigen Sie, dass die Matrix A diagonalisierbar ist.
Ist A positiv definit, negativ definit oder indifinit?