Numerik (SoSe 2012)

Übungsblatt 1 — Abgabe: Mi, 24. April 2012, bis 15^{45} Uhr, *Kasten E6* im Foyer des E-Gebäudes

Groß/Sachs

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte der potenzierten Matrix A^5.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

i) Bestimmen Sie die Gerschgorin-Kreise G_{ri} und $G_{ci} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1,5 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & -2 & 1,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

ii) Zeichnen Sie die Kreisscheiben in der komplexe Ebene und markieren Sie die Fläche, in der die Eigenwerte nur liegen können.

iii) Bestimmen Sie die Eigenwerte mit Matlab (`EW = eig( )`) und tragen Sie diese ebenfalls in die Grafik ein.

Programmieraufgabe 1: (4 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

i) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit Matlab (`[EV,EW] = eig( )`).

ii) Programmieren Sie die Wielandt-Iteration (Satz 1.12) als Matlab-Programm mit $\alpha = 0$ und $\alpha = 2$. Verwenden Sie für A die Startwerte:

$$v_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_{0,2} = \begin{pmatrix} 3.05 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_{0,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie als Abbruchkriterium eine maximale Iterationszahl von 20. Verfassen Sie eine Datei mit den Ergebnissen nur für $\alpha = 0$:

Iterationszahl	λ_i	$\|v_1^{exact} - v_i\|_2$	$\|v_2^{exact} - v_i\|_2$	$\|v_3^{exact} - v_i\|_2$

Plotten (`plot`) Sie zusätzlich den Iterationsverlauf von λ_i in Abhängigkeit der Iterationszahl für beide Matrizen.
Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse. Wieso konvergiert das Verfahren für A beim dritten Startwert nicht gegen den maximalen Eigenwert?
(Hinweis zum Programmieren: Achten Sie auf die Normierung der Vektoren in *jeder* Iteration)

Hinweis: Der Algorithmus der Wielandt-Iteration zur Bestimmung eines Eigenwertes:

1) Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ein α und ein Startvektor $v_0 \in \mathbb{R}^n$.
2) Berechne $B = (A - \alpha I)^{-1}$.
3) Schleife von $i = 1, 2, 3, \dots$ die in jeder Iteration k folgendes ausführt:
   a) Löse $Bw = v_0$.
   b) Berechne approxomierten EW $\lambda_i = w^\top v_0$.
   c) Berechne den zugehörigen approximierten EV $v_i = \frac{w}{\|w\|_2}$.
   d) Setze $v_0 = v_i$ und gehe wieder zu 3).

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie ebenfalls den Quellcode und die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.