Numerik (SoSe 2012)

Übungsblatt 10 — Abgabe: Di, 3. Juli 2012, bis 16^{30} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 21: (2+2+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie die q-Konvergenzraten der Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$

i) $x_{2k} = \beta_1^k \beta_2^k$ und $x_{2k+1} = \beta_1^k \beta_2^{k+1}$, wobei $\beta_1 > \beta_2$ und $\beta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$

ii) $x_k = \gamma\beta^{k+1/k}$, wobei $\gamma > 0$ und $\beta \in (0,1)$

iii) $x_k = \gamma\beta^k$, wobei $\gamma > 0$ und $\beta \in (0,1)$

iv) $x_k = 1 + \frac{1}{k!}$

Aufgabe 22: (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelwertige zweimal stetig differenzierbare Funktion mit zweifacher Nullstelle x_*, d.h. $f(x_*) = f'(x_*) = 0$ und $f''(x_*) \neq 0$.

Zeigen Sie, dass dann das Newton-Verfahren lokal q-linear gegen x_* konvergiert und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|} = \frac{1}{2}.$$

(*Tipp: Taylorreihenentwicklung*)

Programmieraufgabe 9: (12+8* Punkte)

„Eine Call-Option ist das Recht (aber nicht die Pflicht), eine Aktie S in einem zukünftigen Zeitpunkt T zu einem vertraglich festgelegten Kurs K (Strike) kaufen zu dürfen.“
So oder so ähnlich steht es in einem sogenannten Finanzkontrakt, einer -in diesem Fall- europäischen Kaufoption.

Es stellt sich die Frage, wieviel eine solche Option im heutigen Zeitpunkt $t = 0$ wert ist. Im Black-Scholes-Modell, das den zukünftigen stochastischen Verlauf eines Aktienkurses simuliert, ergibt sich nach einigen Transformationen der folgende Preis C_0 für eine Call-Option (Kaufoption):

$$C_0 = S_0 \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx - Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Hierbei bezeichnet $S_0 > 0$ den Aktienkurs im Zeitpunkt $t = 0$, $\sigma > 0$ die Volatilität (sowas wie die Varianz) der Aktie und r den Zinssatz einer risikolosen Anlage.

i) Für $S_0 = 6200$ Euro, $\sigma = 0.2$, $r = 0.035$, $K = 7000$ Euro und $T = 1$ Jahr ergibt sich ein über die obige Formel berechneter Preis von $C_0 = 283.7094633196$ Euro (berechnet mit `blsprice`). Schreiben Sie in Matlab ein Programm, das diesen Preis durch numerische Integration berechnet. Implementieren Sie dazu die folgenden beiden Verfahren:

   a) Summierte Trapezregel

   $$T(h) = h\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right),$$

   wobei $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, N$ und $h = \frac{b-a}{N}$.

   b) Summierte Simpsonregel

   $$S(h) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_1) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{N-1}(f(x_{2i}) + 2f(x_{2i+1}))\right),$$

   wobei $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, 2N$ und $h = \frac{b-a}{2N}$.

   Wählen Sie als Integrationsintervall $[a, b] = [-8, d_1]$ bzw. $[-8, d_2]$ und berechnen Sie für $N = 10, 100, 1000, 10000$ den approximativen Preis der Call-Option $C_0^T(N)$ bzw. $C_0^S(N)$ mit Hilfe der Verfahren a) bzw. b). Geben Sie für jedes N die Größen

   $C_0^T(N)$, $|C_0^T(N) - C_0|$, $C_0^S(N)$, $|C_0^S(N) - C_0|$

   tabellarisch aus.
   Was können Sie beobachten?

ii) (Zusatzaufgabe*)

Bei festen Parametern S_0, r, K und T stellt die obige Call-Preisformel C_0 eine bijektive Abbildung zwischen der Volatilität σ sowie dem Call-Preis dar. Diese eindeutige Zuordnung von Call-Preisen zu Volatilitäten und umgekehrt wird von Händlern in der Praxis ausgenutzt, um aus am Markt beobachteten Call-Options-Preisen implizit Volatilitäten zu berechnen. Mathematisch ist dies äquivalent zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $f(\sigma) = C_0(\sigma) - C_{\text{Markt}} = 0$, wobei C_{Markt} ein am Markt beobachteter Preis einer Call-Option ist.

Programmieren Sie in Matlab zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems das Newton-Verfahren, um für $S_0 = 6200$, $r = 0.035$, $K = 7000$, $T = 1$ und einen am Markt beobachteten Preis von $C_{\text{Markt}} = 290$ Euro die implizite Volatilität σ zu bestimmen. Verwenden Sie im Newton-Verfahren eine finite Differenzen-Approximation der Ableitung ($f'(\sigma) \approx \frac{f(\sigma+h)-f(\sigma)}{h}$, für $h = 10^{-6}$) und geben Sie für den Startwert $\sigma_0 = 0,05$ den Konvergenzverlauf aus. Wobei das Abbruchkriterium $|f(\sigma_k)| < 10^{-8}$ ist.
Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie die Ergebnisse (nicht den Quellcode) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.