Numerik (SoSe 2011)

Übungsblatt 8 — Abgabe: Mo, 6. Juni 2011, bis 16^{15} Uhr, Kasten **Numerik**

Groß/Schulz — **im 1.OG des E-Gebäudes**

Aufgabe 24: (2 Punkte)

Beweisen Sie:
Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mindestens einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt, divergiert das Richardson-Verfahren für jede Wahl von ϑ.

Aufgabe 25: (2+3+2 Punkte)

Auf die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

soll das Richardson-Verfahren mit einem Parameter $\vartheta > 0$ zur Lösung eines linearen Gleichungssystems Ax = b angewendet werden.

i) Bestimmen Sie zur Iterationsmatrix $M = I - \vartheta A$ den Spektralradius $\rho(M)$ in Abhängigkeit von ϑ. Zeigen Sie hierfür zunächst, dass für die Eigenwerte μ_i von M der Zusammenhang $\mu_i = 1 - \vartheta\lambda_i$ gilt, wobei λ_i die Eigenwerte von A bezeichnen.

ii) Skizzieren Sie für $\vartheta \in [0, 1]$ den Spektralradius. Bestimmen Sie den optimalen Parameter ϑ_{opt}, für den $\rho(M)$ minimal wird. Berechnen Sie zudem $\|M\|_2$ für den optimalen Parameter ϑ_{opt}. (*Hinweis: Lemma 5.22 und Satz 5.28*)

iii) Es sei bekannt, dass für eine rechte Seite b die Anwendung des Richardson-Verfahrens mit dem optimalen Parameter ϑ_{opt} aus ii) im ersten Iterationsschritt $\|x^1 - x^*\|_2 = 2.1684$ ergab, wobei x^* die optimale Lösung beschreibt.

Berechnen Sie den Index m, ab welchem garantiert werden kann, dass der Fehler der Nährung x^m in der euklidischen Norm kleiner als 10^{-11} ist? Das heißt

$$\|x^m - x^*\|_2 < 10^{-11}$$

Aufgabe 26: (5 Punkte)

Es seien $\vartheta \in \mathbb{R}$, A symmetrisch und positiv definit, ferner sei $2D - \vartheta A$ auch positiv definit und $0 < \lambda < \Lambda$ die optimalen Schranken in

$$\lambda D \leq A \leq \Lambda D.$$

Zeigen Sie:

i) Das gedämpfte Jacobi-Verfahren konvergiert, wenn

$$0 < \vartheta < \frac{2}{\Lambda}.$$

ii) Für die optimale Konvergenzrate gilt

$$\vartheta_{opt} = \frac{2}{\Lambda + \lambda}, \quad \rho(M^{Jac}_{\vartheta_{opt}}) = \frac{\Lambda - \lambda}{\Lambda + \lambda}.$$

Aufgabe 27: (4+1 Punkte)

i) Bestimmen Sie (von Hand!) mit der Lagrange-Interpolationsformel (Satz 6.2) ein Interpolationspolynom durch die Punkte:

x	0,5	1,2	3,1
y	-3,2	1,6	-1,8

ii) Erstellen Sie einen Plot dieses Polynoms mit Matlab und geben Sie diesen ausgedruckt mit dem Übungsblatt ab.