Numerik (SoSe 2011)

Übungsblatt 7 — Abgabe: Mo, 30. Mai 2011, bis 16^{15} Uhr, Kasten **Numerik**

Groß/Schulz — **im 1.OG des E-Gebäudes**

Aufgabe 21: (1+1+3+3+1 Punkte)

Beweisen Sie für die Moore-Penrose Pseudo-Inverse A^+ (Definition 5.10) die folgenden Eigenschaften:

i) $A^{++} = A$

ii) $(A^+)^T = (A^T)^+$

iii) $A^+A =$ Orthogonalprojektion auf $\text{Kern}(A)^\perp$

iv) $AA^+ =$ Orthogonalprojektion auf $\text{Bild}(A)$

v) $A^+ = A^{-1}$ falls $A \in GL(n, K)$

Aufgabe 22: (5 Punkte)

Seien

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Überprüfen Sie $Ax = b$ auf Lösbarkeit und berechnen Sie ggf. die Nährungslösung von $Ax = b$, die minimale Länge hat. (*Hinweis: Satz 5.12*)

Aufgabe 23: (6 Punkte)

Betrachten Sie zur Lösung eines linearen Gleichungssystems das Iterationsverfahren

$$x_{i+1} = Mx_i + c, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

mit einer geeigneten Iterationsmatrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\rho(M) < 1$, sowie $c \in \mathbb{R}^n$. Ferner seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$, $\rho(M) = |\lambda_1| > |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|$, die Eigenwerte und $v_1, ..., v_n$ eine als existent vorausgesetzte zugehörige Orthonormalbasis der Eigenvektoren von M.
Weiterhin bezeichne x_* den eindeutigen Grenzwert der Fixpunktiteration (1) und $e_i = x_i - x_* \neq 0$ den Fehler im i-ten Iterationsschritt. Zeigen Sie:

Falls $e_0 = \sum_{k=1}^n \gamma_k v_k$ mit $\gamma_1 \neq 0$, so folgt

$$\frac{\|e_{i+1}\|_2}{\|e_i\|_2} \to \rho(M), \quad i \to \infty$$

Wie interpretieren Sie diese Aussage?

Programmieraufgabe 4: (10 Punkte)

Programmieren Sie zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & -3 & 1 & -\pi & 4 \\ 1 & -1 & -7 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -\pi^2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 12 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 3 \\ -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

das Jacobi- sowie das Gauss-Seidel-Verfahren in Matlab. Wählen Sie als Startvektor jeweils $x_0 = (0,0,0,0,0,0)^\top$. Geben Sie bei beiden Verfahren in jeder Iteration
die Iterationszahl i, den Fehler $\|Ax_i - b\|_2$,die Iterierte x_i
sowie den Ausdruck $(\|x_i - x_*\|_2/\|x_0 - x_*\|_2)^{1/i}$
tabellarisch formatiert aus und brechen Sie die Verfahren ab, sobald $\|Ax_i - b\|_2 \leq 10^{-6}$ gilt.
Die Lösung x^* können Sie hierbei mittels Matlab berechnen.

Wieviele Iterationen benötigen die beiden Verfahren? Berechnen Sie ferner in Matlab den Spektralradius $\rho(A) = |\lambda_{\max}|$ der Iterationsmatrix des Jacobi- sowie des Gauss-Seidel-Verfahrens und kommentieren Sie Ihre Ergebnisse ausführlich.

Laden Sie den Quellcode (als `txt-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben und dann als Textdatei `.txt` abgespeichert in StudIP hochgeladen werden:

`NachnameMatrikelnummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie ebenfalls den Quellcode und die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.