Numerik (SoSe 2011)

Übungsblatt 6 — Abgabe: Mo, 23. Mai 2011, bis 16^{15} Uhr, Kasten **Numerik**

Groß/Schulz — **im 1.OG des E-Gebäudes**

Aufgabe 19: (6 Punkte)

Es seien A und B Matrizen und $\|\cdot\|$ eine abgeleitete Matrix-Norm (siehe Definition 5.5). Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

i) $\|A\| \geq 0$

ii) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

iii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

v) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

vi) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Aufgabe 20: (4+2+1 Punkte)

i) Bestimmen Sie die Gerschgorin-Kreise (Satz 3.26) G_{ri} und G_{ci} $(i = 1, 2, 3, 4)$ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1,5 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & -2 & 1,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

ii) Zeichnen Sie die Kreisscheiben in der komplexe Ebene und markieren Sie die Fläche, in der die Eigenwerte nur liegen können.

iii) Bestimmen Sie die Eigenwerte mit Matlab und tragen Sie diese ebenfalls in die Grafik ein.

Programmieraufgabe 3: (2+8 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 17 & 3 & 2 & 13 \\ 3 & 11 & 11 & 8 \\ 2 & 11 & 8 & 12 \\ 13 & 8 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

i) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und B mit Matlab (`[EV,EW] = eig( )`).

ii) Programmieren Sie die Wielandt-Iteration (Inverse Iteration von Wielandt (inverse power method) - Lemma 3.25) als Matlab-Programm mit $\alpha = 0$ und $\alpha = 0.5$. Verwenden Sie für A die Startwerte:

$$v_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_{0,2} = \begin{pmatrix} 3.05 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_{0,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie als Abbruchkriterium eine maximale Iterationszahl von 20. Verfassen Sie eine Datei mit den Ergebnissen nur für $\alpha = 0$:

Iterationszahl	λ_i	$\|v_1^{exact} - v_i\|_2$	$\|v_2^{exact} - v_i\|_2$	$\|v_3^{exact} - v_i\|_2$

Verwenden Sie für B $\alpha = 0$ und die Startwerte:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie als Abbruchkriterium eine maximale Iterationszahl von 20. Verfassen Sie eine Datei mit den Ergebnissen nur für $\alpha = 0$:

Iterationszahl	λ_i	$\|v_4^{exact} - v_i\|_2$

Plotten (`plot`) Sie zusätzlich den Iterationsverlauf von λ_i in Abhängigkeit der Iterationszahl für beide Matrizen.
Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse. Wieso konvergiert das Verfahren für A beim dritten Startwert nicht gegen den maximalen Eigenwert?
(Hinweis zum Programmieren: Achten Sie auf die Normierung der Vektoren in *jeder* Iteration)

Programmierhinweis:

Der Algorithmus der *Wielandt-Iteration* zur Bestimmung des größten Eigenwertes:

1) Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ein Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein Startvektor $v_0 \in \mathbb{R}^n$.
1) Berechne $B = (A - \alpha I)^{-1}$.
3) Schleife von $i = 1, 2, 3, \ldots$ die in jeder Iteration k folgendes ausführt:
   a) Löse $Bw = v_0$.
   b) Berechne approximierten EW $\lambda_i = w^\top v_0$.
   c) Berechne den zugehörigen approximierten EV $v_i = \frac{w}{\|w\|_2}$.
   d) Setze $v_0 = v_i$ und gehe wieder zu 3).

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Das abzugebende `m-file` muss folgenden Namen haben und dann als Textdatei `.txt` abgespeichert in StudIP hochgeladen werden:

`NachnameMatrikelnummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie ebenfalls den Quellcode und die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.