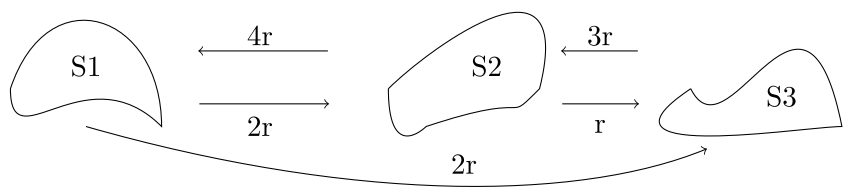
Numerik (SoSe 2011)

Übungsblatt 5 — Abgabe: Mo, 16. Mai 2011, bis 16^{15} Uhr, Kasten **Numerik**

Groß/Schulz — **im 1.OG des E-Gebäudes**

Aufgabe 14: (2+5+2 Punkte)

Betrachten Sie ein geschlossenes System von 3 Seen mit gleichem Volumen.



Die Bilanzgleichungen für die Verschmutzungen

$$\begin{aligned} u_i &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto u_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

entsprechen den im Bild gegebenen Austauschraten

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \frac{4r}{V} u_2(t) - \frac{4r}{V} u_1(t) \\ u_2'(t) &= \frac{2r}{V} u_1(t) + \frac{3r}{V} u_3(t) - \frac{5r}{V} u_2(t) \\ u_3'(t) &= \frac{2r}{V} u_1(t) + \frac{r}{V} u_2(t) - \frac{3r}{V} u_3(t) \end{aligned}$$

mit Anfangswert $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^3$.

i) Schreiben Sie die Bilanzgleichungen in Matrix-Vektor-Schreibweise der Form $u'(t) = Au(t)$.

ii) Lösen Sie die Modellgleichung analytisch und zeigen Sie, dass

$$\lim_{t \to \infty} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \frac{u_1(0) + u_2(0) + u_3(0)}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt. (*TIPP: Satz 4.7 Anfangswertproblem*)

iii) Erläutern Sie, welchen Zusammenhang die Eigenschaft $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ der Systemmatrix mit der Geschlossenheit des Systems hat.

Aufgabe 15: (3 Punkte)

Zeigen sie an den nicht kommutativen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

das $\exp(A+B) \neq \exp(A) \cdot \exp(B)$ ist. (*Vgl. Lemma 4.8*)

Aufgabe 16: (2+2 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = e^x$ im Intervall $[0, x]$ bis zum n-ten Entwicklungsglied um den Entwicklungspunkt x.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ bis zum n-ten Entwicklungsglied um den Entwicklungspunkt 2π.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) - x + \frac{x^3}{3!} \\ g(h) &= \frac{1}{h^2}(\sin(1+h) - 2\sin(1) + \sin(1-h)) + \sin(1) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{O}(x^5), \quad x \to 0 \\ g(h) &= \mathcal{O}(h), \quad h \to 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 18: (4 + 2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Nullstellenbestimmung von

$$ax^2 + bx + c = 0$$

schlecht konditioniert ist, falls $(b^2 - 4ac) \geq 0$ klein ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1^2$$

die relative Konditionszahl $\kappa = 2$ hat.