Numerik (SoSe 2011)

Übungsblatt 4 — Abgabe: Mo, 9. Mai 2011, bis 16^{15} Uhr, Kasten **Numerik**

Groß/Schulz — **im 1.OG des E-Gebäudes**

Aufgabe 10: (2+2+2 Punkte)

Sei $A \in K^{n\times n}$ und $x, v \in K^n$. **Beweisen oder widerlegen** Sie folgende Aussagen:

i) A sei nilpotent mit Nilpotenzindex $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Krylovräume

$$\mathcal{K}_k(A,x) = \mathcal{K}_{k+m}(A,x) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

ii) A heißt idempotent, falls $A^2 = A$ ist. Jede idempotente Matrix hat nur die Eigenwerte $\lambda = 0$ und/oder $\lambda = 1$.

iii) Für idempotente Matrizen A und zugehörigem Eigenvektor v gilt

$$\mathcal{K}_1(A,v) = \mathcal{K}_m(A,v) \quad \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2.$$

Aufgabe 11: (5 Punkte)

Sei $A \in K^{n\times n}$ und $x \in K^n$. Zeigen Sie, dass Krylovräume invariant gegenüber Translationsabbildungen sind.
Das heißt es gilt mit der Einheitsmatrix I und $\alpha \in K$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{K}_k(A,x) = \mathcal{K}_k(A - \alpha I, x).$$

Hinweis: Die Binomische Formel gilt auch für Matrizen, bei denen die Kommutativität gilt. Seien dazu $A, B \in K^{n\times n}$ mit $AB = BA$

$$\Rightarrow \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Aufgabe 12: (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.
Zeigen Sie, dass A genau dann positiv definit ist, falls A invertierbar und A^{-1} ebenfalls positiv definit ist.

Aufgabe 13: (1+3 Punkte)

Es sei

$$N = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

i) Zeigen Sie, dass N nilpotent mit Index 3 ist, also $N^2 \neq 0, \quad N^3 = 0$.

ii) Es sei $x = (1, 0, 2)^T$. Zeigen Sie:
Es gilt $x \notin \text{Bild}(N^2)$und $B := [N^2x, Nx, x] = [b_1, b_2, b_3]$ ist spaltenweise Basis von $\mathbb{R}^3$. Weiter gilt

$$B^{-1}NB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Programmieraufgabe 2: (6 Punkte)

Es sei A folgende Tridiagonalmatrix (die sogenannte Poisson-Matrix)

$$A = \begin{bmatrix} T & -I & & \\ -I & T & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ & & -I & T \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^n$$

Schreiben Sie ein Matlab-Programm zum Lösen des Gleichungssystem $Ax = b$ mit den Methoden *left division* und *gmres* (`x = gmres(A,b,restart,tol,maxit)`) für $n = 10, 20, 50, 60, 75, 90, 100$. Erzeugen Sie die Poisson-Matrix in Matlab mittels dem Befehl `A=full(gallery('poisson', n))` und `b=ones(n^2,1)`.
Verwenden Sie als Einstellungen für gmres: restart = 10, tol = 1e-6, maxit = 15.
Vergleichen Sie die zwei Methoden unter Berücksichtigung des Zeitbedarfs. Die Zeit läßt sich mit dem Befehl `tic...toc` messen. Verfassen Sie eine Datei (`'.txt'`) mit den Ergebnissen:

n	Zeit(left division)	Zeit(gmres)	Zeit(left division)-Zeit(gmres)	‖x(leftdivision)-x(gmres)‖

Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Das abzugebende `m-file` muss folgenden Namen haben und damit als `m-file` abgespeichert gesendet werden:
`AufgabennummerNachnameMatrikelnummer.m`
In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie ebenfalls den Quellcode und die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.