Numerik (SoSe 2011)

Übungsblatt 3 — Abgabe: Mo, 2. Mai 2011, bis 16^{15} Uhr, Kasten **Numerik**

Groß/Schulz — **im 1.OG des E-Gebäudes**

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Sei $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix C.
Ist C diagonalisierbar?

Aufgabe 8: (2+2+1 Punkte)

Benutzen Sie den Satz von Cayley-Hamilton um die Inversen der Matrizen

i) $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

ii) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

als Polynom in A bzw. B auszudrücken.

iii) Verifizieren Sie ihre Ergebnisse mit Matlab.

Aufgabe 9: (2+2 Punkte)

Definition:
Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt nilpotent, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $A^k = 0$ gilt. Die kleinste Zahl k mit $A^k = 0$ heißt der Nilpotenzindex von A.

Beweisen Sie folgende Aussagen:

i) $A \in K^{n\times n}$ ist nilpotent und diagonalisierbar genau dann, wenn A die Nullmatrix ist, also $A = 0$.

ii) Ist $A \in K^{n\times n}$ nilpotent, so hat A nur den Eigenwert 0.

Aufgabe 10: (2+2+2 Punkte)

Sei $A \in K^{n\times n}$ und $x, v \in K^n$. **Beweisen oder widerlegen** Sie folgende Aussagen:

i) A sei nilpotent mit Nilpotenzindex $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Krylovräume

$$\mathcal{K}_k(A, x) = \mathcal{K}_{k+m}(A, x) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

ii) A heißt idempotent, falls $A^2 = A$ ist. Jede idempotente Matrix hat nur die Eigenwerte $\lambda = 0$ und/oder $\lambda = 1$.

iii) Für idempotente Matrizen A und zugehörigem Eigenvektor v gilt

$$\mathcal{K}_1(A, v) = \mathcal{K}_m(A, v) \quad \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2.$$