Numerik (SoSe 2011)

Übungsblatt 1 — Abgabe: Mo, 18. April 2011, bis 16^{15} Uhr, Kasten Numerik

Groß/Schulz — im 1.OG des E-Gebäudes

Aufgabe 1: (3+3+7 Punkte)

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf einem reellen Vektorraum V. Und es gilt die Parallelogrammidentität

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Zeigen Sie:

i) Wenn ein Skalarprodukt auf V mit $(\cdot,\cdot) = \|\cdot\|^2$ existiert, dann gilt die Parallelogrammidentität.

ii) Wenn eine Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ abgeleitet ist, in dem Sinne, dass gilt $(x,x) = \|x\|^2, \ x \in V$, so gilt die Beziehung

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

iii) Die in ii) definierte Abbildung $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt, falls die Parallelogrammidentität gilt.
Das heißt es gibt genau dann ein Skalarprodukt auf V, wenn die Parallelogrammidentität gilt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Es sei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

mit $d_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Zeigen Sie, dass mit

$$(x,y)_D = x^\top D y$$

ein Skalarprodukt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum definiert ist.

Programmieraufgabe 1: (4 Punkte)

Lösen Sie mit Hilfe eines Matlab-Programmes folgende lineare Gleichungssysteme $Ax = b$:

i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -10 \\ 3 & 7 & -3 & 5 \\ 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

Hinweis:

- Der Befehl `inv(A)` bestimmt die Inverse Matrix von A.
- Der Befehl `x = A\b` löst das Gleichungssystem $Ax = b$.
- Der Befehl `[L,U] = lu(A)` bestimmt LP - Zerlegung von A.

Geben Sie die Ergebnisse `inv(A)`, `x = A\b` und `[L,U] = lu(A)` für die Gleichungssysteme i) und ii) aus.