

Numerik (SoSe 2011)

Übungsblatt 12
Groß/Schulz

Abgabe: Mo, 11. Juli 2011, bis 16¹⁵ Uhr, Kasten **Numerik**
im 1.OG des E-Gebäudes

Alle Punkte auf diesem Übungsblatt sind Bonuspunkte!

Aufgabe 34:

(3* Punkte)

Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Bestimmung von \sqrt{a} , ($a \geq 0$) als Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ äquivalent ist zum babylonischen Wurzelziehen

$$x_{k+1} = \frac{x_k + \frac{a}{x_k}}{2}.$$

Aufgabe 35:

(4* Punkte)

Betrachten Sie das Nullstellenproblem

$$f(x) = 0, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

$$f(x) = Ax - b, A \in GL(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$$

die Newton-Iteration $x^{k+1} = x^k - M(x^k)f(x^k)$ mit

$$M(x^k) := M \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall k.$$

Zeigen Sie, dass hierbei die Krümmungs-Lipschitz-Konstante $\omega = 0$ gewählt werden kann und die Konvergenz im Sinne des Kontraktionssatzes äquivalent zu $\rho(I - MA) < 1$ ist.

(Tipp: Satz 5.23 und Satz 8.5 $\rightarrow \kappa$)

Programmieraufgabe 8:

(8*+10* Punkte)

i) Programmieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen der Funktionen:

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - 1$$
$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - 2x + 1$$

Verwenden Sie als Startwerte

$$a) x_0 = 2, \quad b) x_0 = -4$$

und als Abbruchkriterium $\|f(x_k)\|_2 \leq 10^{-10}$.

Erstellen Sie für jeden Startwert eine Tabelle in einer Textdatei mit den Ergebnissen und **kommentieren diese ausführlich**

$$k \mid x_k \mid f(x_k) \mid |x_k - x_*| \mid q_k = |x_{k+1} - x_*|/|x_k - x_*|$$

mit $x_* = 1$.

Plotten Sie beide Funktionen f_1, f_2 auf dem Intervall $[0, 2]$. **Was fällt Ihnen dabei auf?**

ii) Programmieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen der Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie als Startwerte

$$a) x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b) x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad c) x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und als Abbruchkriterium $\|f(x_k)\|_2 \leq 10^{-10}$.

Erstellen Sie für jeden Startwert eine Tabelle in einer Textdatei mit den Ergebnissen

$$k \mid x_k = (x_1^k, x_2^k)^\top \mid f(x_k) = (\cos(x_1^k) \cdot \sin(x_2^k), \sin(x_1^k) \cdot \cos(x_2^k))^\top$$

Plotten Sie `[X,Y] = meshgrid(-pi:0.1:pi, -pi:0.1:pi); Z = sin(X).*cos(Y); surf(X,Y,Z)` und **kommentieren sie ausführlich die Ergebnisse**.

Laden Sie den Quellcode (als `txt-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben und dann als Textdatei `.txt` abgespeichert in StudIP hochgeladen werden:

`NachnameMatrikelnummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie ebenfalls den Quellcode und die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.