J. Müller / P. Beise

Wintersemester 2009/2010
03.02.2010

12. Übung Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen

Abgabe: Bis Dienstag, 09.02.2010 um 12.00 Uhr im Kasten 12

H34: Es seien X ein Hilbertraum und $M \subset X$ ein ONS.
Zeigen Sie: Folgt für alle $x \in X$ aus $\hat{x}_e = 0$ $(e \in M)$ schon $x = 0$, so ist M eine ONB in X.

H35: a) Es seien X, Y Hilberträume und $U \in L(X, Y)$. Beweisen Sie: U ist genau dann isometrisch, wenn

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \quad (x, y \in X).$$

b) Überlegen Sie sich, dass in der Situation von B. 11.7 für alle $e, f \in M_0$

$$\langle Ue, Uf \rangle = \delta_{ef}$$

gilt.

H36: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Beweisen Sie: Ist $M \subset H_0^1(\Omega)$ eine ONB von $L_2(\Omega)$ so, dass für alle $e \in M$ ein $\mu_e < 0$ existiert mit $\Delta e = \mu_e e$, so ist

$$M_0 := \{e/||e||_{H_0^1(\Omega)} : e \in M\}$$

eine ONB von $H_0^1(\Omega)$.