

**11. Übung Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Abgabe: Bis Dienstag, 02.02.2010 um 8:30 Uhr im Kasten 12

H31: Es seien  $X, Y$  Hilberträume und  $T \in L(X, Y)$ .

Zeigen Sie:

- a)  $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$ .
- b) Ist  $X = Y$  und  $T = T^*$ , so ist  $r(T) = \|T\|$ .

H32: Es seien  $X$  ein Hilbertraum und  $L \subset X$  ein Teilraum. Zeigen Sie:

- a)  $L^\perp$  ist abgeschlossener Teilraum von  $X$ ,
- b)  $L \subset L^{\perp\perp} := (L^\perp)^\perp$ .
- c) Ist  $L$  abgeschlossen, so ist  $L = L^{\perp\perp}$ .

H33: Es seien  $X$  ein Hilbertraum und  $M \subset X$  eine ONB. Beweisen Sie:

- a) Ist  $(c_e)_{e \in M} \in \mathbb{R}^M$  beschränkt und  $T = \sum_{e \in M} c_e P_e$ , so ist  $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)}$ .
- b) Ist  $X$  separabel,  $\dim(X) = \infty$  und ist  $K \subset \mathbb{R}$  kompakt, so existiert ein  $T \in L(X)$  symmetrisch mit  $\sigma(T) = K$  und  $\sigma_p(T)$  abzählbar und dicht in  $K$ .