L. Frerick/J. Müller

SoSe 2019
05.06.2019

8. Hausübung zur Linearen Algebra

Abgabe: Bis Dienstag, 18.06.2019, 14.00 Uhr, im Kasten 11, E-Gebäude

H22: Es seien V ein Vektorraum mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig in V.

b) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist eine Basis von V.

c) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von V.

H23: Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums

$$U := \operatorname{span}\big\{(3,0,7,0)^\top,\ (-1,2,-5,0)^\top,\ (-3,-3,-3,0)^\top\big\}$$

von $\mathbb{R}^4$ indem Sie aus diesen drei Vektoren geeignete auswählen. Ergänzen Sie die ausgewählten zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

H24: a) Es seien V eine K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig in V. Zeigen Sie: Ist $A = (a_{jk}) \in \mathrm{GL}_n(K)$ und ist $w_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk} v_j$ für $k = 1, \ldots, n$, so sind $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig.

b) (Tschebyscheff-Polynome) Es seien p_j und P_n für $j, n \in \mathbb{N}_0$ wie in Aufgabe G19. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sind die Polynome $t_k \in P_k$ definiert durch $t_0 := p_0$, $t_1 := p_1$ und

$$t_k(x) := 2x t_{k-1}(x) - t_{k-2}(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ k \geq 2).$$

Berechnen Sie t_2, t_3, t_4 und zeigen Sie, dass $\{t_0, \ldots, t_4\}$ eine Basis von P_4 ist.