L. Frerick/J. Müller

SoSe 2019
03.07.2019

11. Hausübung zur Linearen Algebra

Abgabe: Bis Dienstag, 09.07.2019, 14.00 Uhr, im Kasten 11, E-Gebäude

H31: Es seien V ein n-dimensionaler Vektorrraum und U ein Unterraum. Zeigen Sie: Es ist $\dim U = n-1$ genau dann, wenn $U = \ker f$ für eine Linearform $f \in V^* \setminus \{0\}$.

H32: Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -16 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & 64 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}.$$

a) Bringen Sie A auf Zeilenstufenform.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rang}(A)$ sowie $\dim(\ker f_A)$ und entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar ist.

H33: Es seien V ein K-Vektorraum und $f \in L(V)$. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f, falls ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ existiert mit $f(v) = \lambda v$. Zeigen Sie: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschiedene Eigenwerte und $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v_j) = \lambda_j v_j$ für $j = 1, \dots, n$, so sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind und betrachten Sie dann die Zahl $m \in \{1, \dots, n-1\}$ so, dass $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig sind und $v_{m+1} \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ gilt.