L. Frerick/J. Müller

SoSe 2019
26.06.2019

10. Hausübung zur Linearen Algebra

Abgabe: Bis Dienstag, 02.07.2019, 14.00 Uhr, im Kasten 11, E-Gebäude

H28: Es seien K ein Körper und $V = K^n$. Zeigen Sie: Ist für $c \in V$ die Abbildung $f_c \in V^*$ definiert durch

$$f_c(x) := c^\top x \qquad (x \in V)$$

(vgl. Aufgabe G23), so ist $c \mapsto f_c$ ein Isomorphismus von V nach V^*.

H29:
a) Beweisen Sie: Sind V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f \in L(V)$, so gilt $V = \mathrm{Im} f + \ker f$ genau dann, wenn $\mathrm{Im} f \cap \ker f = \{0\}$ ist.

b) Finden Sie ein $f \in L(\mathbb{R}^2)$ mit $\mathrm{Im} f + \ker f \neq \mathbb{R}^2$.

H30: Es sei K ein Körper. Eine Matrix $D = (d_{jk}) \in K^{n\times n}$ heißt Diagonalmatrix, falls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ existieren mit $d_{jk} = 0$ für $j \neq k$ und $d_{jj} = \lambda_j$. Weiter heißt $A \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar, falls eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und eine Diagonalmatrix D mit $A = SDS^{-1}$ existieren.[1] Zeigen Sie: Ist A diagonalisierbar und $f \in L(K^n)$ definiert durch

$$f(x) = Ax \qquad (x \in K^n),$$

so existieren eine Basis $\{v_1, \ldots v_n\}$ von K^n und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $f(v_j) = \lambda_j v_j$ für $j = 1, \ldots, n$.

[1] Also kurz, falls A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.