L. Frerick/J. Müller

SoSe 2019
17.04.2019

1. Hausübung zur Linearen Algebra

Abgabe: Bis Dienstag, 23.04.2019, 14.00 Uhr, im Kasten 11, E-Gebäude

H1: Es sei $a \in \mathbb{Z}$. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität und auf Surjektivität:

a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$ für $x \in \mathbb{Q}$.
Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$.

b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = ax$ für $x \in \mathbb{Z}$.
Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $a = 0$, $a = \pm 1$ und $|a| > 1$.

c) $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = x + y$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

H2: Finden Sie

a) Funktionen $f, g : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ mit $g \circ f \neq f \circ g$,

b) bijektive Funktionen $f, g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ mit $g \circ f \neq f \circ g$.

H3: a) (Goldener Schnitt) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 + x = 1$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst: Sind $p, q \in \mathbb{Z}$ nicht beide gerade, so sind $q^2 - p^2$ und pq weder beide gerade noch beide ungerade. Verwenden Sie dabei, dass für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ das Produkt nm genau dann ungerade ist, wenn beide Zahlen ungerade sind.

b) Es sei $\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$. Ist die Funktion $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$, $f(x) = x^2 + x$ für $x \in \mathbb{Q}_+$ surjektiv?