Jürgen Müller

Funktionentheorie

Skriptum zur den Vorlesungen
Wintersemester 2014 und Sommersemester 2015
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Dank an Elke Gawronski für die Mithilfe bei der Erstellung

Inhaltsverzeichnis

1 Analytische und holomorphe Funktionen 3

2 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel 10

3 Stammfunktionen und Cauchyscher Integralsatz 14

4 Fourier- und Laurent-Reihen 23

5 Isolierte Singularitäten 32

6 Cauchy Theorem und Residuensatz 39

7 Anwendungen des Residuensatzes 45

8 Konforme Abbildungen 55

9 Normale Familien und der Satz von Picard 61

10 Komplexe Dynamik 70

11 Rungetheorie und Anwendungen 78

12 Die Familie $\mathscr{S}$ 89

13 Approximation in $A(K)$ 96

14 Randverhalten von Taylor-Reihen 111

A Zusammenhängende Mengen 118

B Parameterintegrale 121

C Der Satz von Arzela-Ascoli 124

1 Analytische und holomorphe Funktionen

Bemerkung und Definition 1.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *analytisch* an der Stelle $z_0 \in \Omega$, falls ein $R > 0$ und eine Folge (a_ν) in $\mathbb{C}$ so existieren, dass

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0))$$

gilt. In diesem Fall ist f insbesondere beliebig oft differenzierbar auf $U_R(z_0)$ und es gilt

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$$

(siehe Analysis). Weiter heißt f *analytisch in* Ω, falls f analytisch an jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ ist. Man sieht leicht, dass Summen und Produkte analytischer Funktionen wieder analytisch sind (im Fall des Produktes folgt dies aus Aussagen über das Cauchy-Produkt von Reihen).

Beispiel 1.2 1. Polynome, exp, sin und cos sind analytisch in $\mathbb{C}$ ([Ü]).
2. Wir betrachten für festes $a \in \mathbb{C}$ die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{a - z} .$$

Hier ist für alle $z_0 \neq a$ und alle z mit $|z - z_0| < |a - z_0|$

$$f(z) = \frac{1}{a - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{a - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{a - z_0}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(a - z_0)^{\nu+1}} (z - z_0)^\nu .$$

Damit ist f analytisch $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Bemerkung und Definition 1.3 Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Wir schreiben

$$Z(f) := \{z_0 \in \Omega : f(z_0) = 0\}$$

für die Nullstellenmenge von f. Ist f beliebig oft differenzierbar an der Stelle z_0, so setzen wir

$$n_f(z_0) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z_0) \neq 0\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

(mit $\min \emptyset := \infty$). Dann gilt $n_f(z_0) > 0$ genau dann, wenn $z_0 \in Z(f)$ ist, und in diesem Fall heißt $n_f(z_0)$ Ordnung der Nullstelle.
Ist f analytisch an der Stelle $z_0 \in \Omega$, so gilt $n = n_f(z_0) < \infty$ genau dann, wenn eine an z_0 analytische Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ existiert mit $g(z_0) \neq 0$ und so, dass

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \qquad (z \in \Omega) .$$

(Denn: Zunächst gilt $n = n_f(z_0) < \infty$ genau dann, wenn

$$f(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = (z - z_0)^n \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu+n} (z - z_0)^\mu$$

für $|z - z_0|$ genügend klein mit $a_n \neq 0$ (beachte: $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ für alle k).
Ist also einerseits $n = n_f(z_0) < \infty$ so setzen wir

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^{-n} f(z) & \text{für } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ a_n & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

Dann ist g wie gefordert. Ist andererseits g wie gefordert mit $g(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu (z - z_0)^\mu$, so ist

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} b_{\nu-n} (z - z_0)^\nu$$

für $|z - z_0|$ genügend klein mit $f^{(n)}(z_0)/n! = b_0 = g(z_0) \neq 0$.)
Insbesondere sieht man damit (da g stetig an z_0 ist), dass bei analytischen Funktionen Nullstellen z_0 endlicher Ordnung stets isoliert sind, d. h. es existiert eine Umgebung von z_0, in der keine weiteren Nullstellen liegen.

Bemerkung und Definition 1.4 Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Wir schreiben $M' = M'_X$ für die Menge der Häufungspunkte von M (in X). Man sieht leicht ([Ü]), dass die Menge M' stets abgeschlossen in X ist.

Satz 1.5 *Es sei $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, und es sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt: Entweder ist $f \equiv 0$ oder $(Z(f))'_G = \emptyset$, d. h. $Z(f)$ hat keinen Häufungspunkt in G.*

Beweis. Wir setzen $A := (Z(f))'_G$. Da f stetig ist, gilt $A \subset Z(f)$. Ist $A \neq \emptyset$ und $z_0 \in A$, so ist $n_f(z_0) = \infty$ nach B./D. 1.3 und damit schon $f(z) \equiv 0$ auf einer Umgebung von z_0. Also ist $z_0 \in A^0$ und folglich A offen. Außerdem ist A auch abgeschlossen (in $G = (G, d_{|\cdot|})$) als Menge von Häufungspunkten. Da G zusammenhängend ist, gilt schon $A = G$. Damit ist auch $Z(f) = G$, also $f \equiv 0$. □

Als Konsequenz erhalten wir unmittelbar folgendes wichtige Ergebnis, das zeigt, dass analytische Funktionen auf Gebieten schon vollständig durch ihre Werte auf einer Menge mit Häufungspunkt in G festgelegt sind!

Satz 1.6 *(Identitätssatz für analytische Funktionen)*
Es sei $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, und es seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Existiert eine Menge M in G mit Häufungspunkt in G und so, dass

$$f(z) = g(z)$$

für alle $z \in M$ gilt, so ist $f \equiv g$ in G.

Beweis. Mit f und g ist offenbar auch $f-g$ analytisch in G. Aus $M \subset Z(f-g)$ ergibt sich die Behauptung sofort mit S. 1.5. □

Der folgende Satz liefert eine Klasse analytischer Funktionen.

Satz 1.7 *Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und es seien $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{K}$ stetig. Ferner sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \psi([a,b])$. Wir definieren $f : \Omega \to \mathbb{C}$ durch*

$$f(z) := \int_a^b \frac{\varphi(t)}{\psi(t)-z}\,dt \qquad (z \in \Omega)\,.$$

Dann ist f analytisch in Ω, und es gilt

$$f^{(k)}(z) = k! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z)^{k+1}}\,dt \qquad (z \in \Omega,\, k \in \mathbb{N})\,.$$

Beweis. Es sei $z_0 \in \Omega$ und $R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(z_0, \psi([a,b]))$ (dann ist $R > 0$, da $\psi([a,b])$ kompakt ist). Aus

$$\left|\frac{z-z_0}{\psi(t)-z_0}\right| \le \frac{|z-z_0|}{R} < 1$$

für alle $z \in U_R(z_0)$ und alle $t \in [a,b]$ folgt, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^\nu}{(\psi(t)-z_0)^{\nu+1}} = \frac{1}{\psi(t)-z}$$

(vgl. B. 1.2) für jedes feste $z \in U_R(z_0)$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert (Weierstraßsches Majorantenkriterium). Also erhalten wir durch Vertauschung von Summation und Integration

$$f(z) = \int_a^b \varphi(t) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^\nu}{(\psi(t)-z_0)^{\nu+1}}\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} (z-z_0)^\nu \cdot \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{\nu+1}}\,dt\,,$$

d.h. mit

$$a_k := \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{k+1}}\,dt \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

gilt für alle $z \in U_R(z_0)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu\,.$$

Folglich ist f analytisch an der Stelle z_0. Außerdem erhalten wir für $z = z_0$

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k = k! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{k+1}}\,dt \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, gilt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 1.8 Der Beweis zu S. 1.7 zeigt, dass die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

für alle z mit $|z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ gilt.

Beispiel 1.9 Es sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}$, wobei

$$\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}.$$

Weiter sei $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt $Cg : \Omega \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(Cg)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} \, dt \,,$$

Cauchy Transformierte von g. Nach S. 1.7 ist Cg analytisch in Ω und es gilt für $z \in \Omega$

$$(Cg)^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{(e^{it} - z)^{k+1}} \, dt \,.$$

Ist speziell $g \equiv 1$, so ist

$$(C1)'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it} - z)^2} \, dt = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{e^{it} - z} \Big|_{t=0}^{2\pi} = 0 \,.$$

Also ist $(C1)' \equiv 0$ in Ω. Da

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

ein Gebiet ist, gilt damit $C1 \equiv (C1)(0) = 1$ in $\mathbb{D}$ ([Ü]).

Definition 1.10 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *holomorph* in Ω, falls f' auf Ω existiert und stetig ist. Wir setzen

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph in } \Omega\} \,.$$

Wir wollen nun zeigen, dass jede holomorphe Funktion schon analytisch ist, also insbesondere beliebig oft differenzierbar - eine Art mathematisches Wunder!
Entscheidend dafür wird die Cauchysche Integralformel sein, die wir nun in einer ersten Version für Kreise herleiten. Wir setzen

$$A := \{f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} : f \text{ stetig und } f|_{\mathbb{D}} \text{ holomorph}\}.$$

Satz 1.11 *(Cauchysche Integralformel – kurz CIF – für den Einheitskreis)*
Es sei $g \in A$. Dann gilt $(Cg)|_{\mathbb{D}} = g|_{\mathbb{D}}$, d. h.

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z}\, dt \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Beweis. Es sei $z \in \mathbb{D}$ fest. Wir definieren $\varphi : [0,1] \times [0, 2\pi]$ durch

$$\varphi(\lambda, t) := g(z + \lambda(e^{it} - z)) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} \qquad (\lambda \in [0,1],\, t \in [0, 2\pi])$$

und $\Phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{2\pi} \varphi(\lambda, t)\, dt \qquad (\lambda \in [0,1]).$$

Nach S. B.1 und B. B.2 ist Φ stetig auf $[0,1]$ und es gilt für $\lambda \in (0,1)$

$$\Phi'(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\lambda, t)\, dt = \int_0^{2\pi} g'\big(z + \lambda(e^{it} - z)\big)\, e^{it} dt = \frac{1}{i\lambda}\, g\big(z + \lambda(e^{it} - z)\big)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Damit ist $\Phi \equiv \text{const}$ auf $[0,1]$ und folglich

$$2\pi(Cg)(z) = \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt = \Phi(1) = \Phi(0) = g(z) \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - z}\, dt \overset{B.1.9}{=} g(z) 2\pi.$$

□

Bemerkung 1.12 Man beachte: S. 1.11 zeigt insbesondere, dass die Funktionswerte in $\mathbb{D}$ per Integration aus den Randwerten berechnet werden können. Wählt man speziell $z = 0$, so ergibt sich die wichtige *Mittelwertformel*

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) dt\,.$$

Also: Der Funktionswert im Kreismittelpunkt ergibt sich als „Integralmittel“ der Funktionswerte am Rand des Kreises.
Mit B. 1.8 und B. 1.9 ergibt sich weiter, dass $g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt mit

$$a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-ikt}\, dt.$$

Als Anwendung ergibt sich insbesondere die Analytizität holomorpher Funktionen.

Satz 1.13 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Dann gilt für alle $z_0 \in \Omega$ (mit $\operatorname{dist}(z_0, \emptyset) := \infty$)*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu \qquad (|z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)) .$$

Insbesondere ist f analytisch in Ω.

Beweis. Es seien $z_0 \in \Omega$ und $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Wir definieren $g \in A$ durch

$$g(w) := f(z_0 + Rw) \qquad (|w| \leq 1).$$

Dann ist $f^{(\nu)}(z_0) = g^\nu(0)/R^\nu$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$. Mit B. 1.12 ergibt sich

$$f(z) = g\left(\frac{z - z_0}{R}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} \frac{(z - z_0)^\nu}{R^\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu$$

für alle $z \in U_R(z_0)$. Da $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ beliebig war, gilt die Darstellung in $|z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, ist f analytisch in Ω. □

Bemerkung 1.14 Für alle $z_0 \in \Omega$ und $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ ergibt sich aus der CIF für $f \in H(\Omega)$ und $z \in U_R(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) \frac{Re^{it}}{z_0 + Re^{it} - z} \, dt .$$

und insbesondere die Mittelwertformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) \, dt . \tag{1.1}$$

Die obigen Ergebnisse zeigen, dass holomorphe Funktionen sich in drastischer Weise von reell differenzierbaren Funktionen unterscheiden. Wir wollen den Unterschied etwas genauer beleuchten.

Bemerkung 1.15 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C} \, (= \mathbb{R}^2)$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ist f (komplex) differenzierbar an der Stelle $z_0 \in \Omega$, so existiert für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung $\partial_{\mathbf{v}} f(z_0)$ und es gilt

$$\partial_{\mathbf{v}} f(z_0) = f'(z_0) \cdot \mathbf{v} .$$

(Denn: Jeweils nach Definition gilt

$$\partial_{\mathbf{v}} f(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + t\mathbf{v}) - f(z_0)}{t} = \mathbf{v} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + t\mathbf{v}) - f(z_0)}{\mathbf{v}t} = \mathbf{v} \cdot f'(z_0).)$$

Also gilt insbesondere $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0)$ sowie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0)$ und damit auch

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \tag{1.2}$$

(sog. Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichung).
Ist umgekehrt f reell differenzierbar an z_0 und gilt (1.2), so ist f auch komplex differenzierbar an z_0 und es gilt $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.
(Denn: Da f reell differenzierbar an z_0 ist, existiert eine Funktion $\varepsilon : \Omega - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $\varepsilon(h) \to 0\,(h \to 0)$ und so, dass mit $h = t + is = (t, s)^T$

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) &= f(z_0) + \operatorname{grad}^T f(z_0) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + |h|\,\varepsilon(h) \\ &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \cdot (1, i) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + |h|\,\varepsilon(h) \\ &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) h + |h|\,\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Nach der Zerlegungsformel ist f (komplex) differenzierbar an z_0 mit $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.)

Satz 1.16 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sind äquivalent*

a) f ist holomorph in Ω.

b) $f \in C^1(\Omega)$, und es gilt (1.2) für alle $z_0 \in \Omega$.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b): Ist f holomorph in Ω, so ist f' stetig auf Ω und damit sind nach B. 1.15 auch die partiellen Ableitungen stetig auf Ω (und es gilt (1.2)).

b) $\Rightarrow$ a): Ist $f \in C^1(\Omega)$, so sind die partiellen Ableitungen stetig auf Ω. Dann ist f insbesondere reell differenzierbar auf Ω. Nach B. 1.15 ist f komplex differenzierbar an z_0. Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig auf Ω ist, ist f holomorph. □

Bemerkung 1.17 Definiert man $\overline{\partial} : C^1(\Omega) \to C(\Omega)$ durch

$$\overline{\partial} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

so zeigt S. 1.16, dass $f \in C^1(\Omega)$ genau dann holomorph ist, wenn $\overline{\partial} f \equiv 0$ ist, mit anderen Worten, $H(\Omega)$ ist der Kern des Differenzialoperators $\overline{\partial}$.

2 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

Bemerkung und Definition 2.1 Eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f heißt *ganze Funktion*. Insbesondere sind Polynome und exp, sin, cos ganze Funktionen.
Ist f ganz und ist $B \subset \mathbb{C}$ beschränkt, so $f|_B$ beschränkt (Denn: ist $B \subset U_R[0]$, wobei $U_R[z_0] := \{z : |z - z_0| \leq R\}$, so ist $f(U_R[0])$ kompakt, also auch beschränkt, und $f(B) \subset f(U_R[0])$).

Eine erste Folgerung aus der CIF ist

Satz 2.2 *(Liouville)*
Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $M > 0$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fest. Für $R > 0$ definieren wir $g \in A$ durch

$$g(w) := f(z_0 + Rw) \qquad (|w| \leq 1).$$

Dann ist $g'(0)/R = f'(z_0)$ und mit B. 1.12 folgt

$$|f'(z_0)| = \frac{|g'(0)|}{R} \leq \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} |g(e^{it})|\, dt \leq \frac{M}{R} \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Also ist $f'(z_0) = 0$, d. h. $f' \equiv 0$. Da $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, ist f konstant. □

Beispiel 2.3 Ist $f(z) = \cos z$, so gilt für $y \in \mathbb{R}$

$$|\cos(iy)| = \cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh(y) \to \infty \qquad (y \to \pm\infty)\,.$$

Bemerkung 2.4 Als kleine Anwendung des Satzes von Liouville ergibt sich ein kurzer Beweis zum Fundamentalsatz der Algebra. Der wesentliche Teil des Beweises besteht bekanntlich darin, zu zeigen, dass jedes nichtkonstante Polynom P eine Nullstelle besitzt. Wir zeigen also:

Ist P nicht konstant, so P hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Denn: Angenommen, nicht, d.h. $1/P$ ist eine ganze Funktion. Dann existiert nach dem Satz von Liouville eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|1/P(z_n)| \to \infty$, also $P(z_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Nach B./D. 2.1 gilt notwendig auch $|z_n| \to \infty$. Dies widerspricht aber $|P(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$.

Eines der zentralen Themen der reellen Analysis ist die Frage nach Extremstellen von Funktionen (mit Werten in $\mathbb{R}$). Da wir keine Ordnung in $\mathbb{C}$ haben, macht eine solche Fragestellung für komplexwertige Funktionen keinen Sinn. Wir können jedoch nach Extremstellen von $|f|$ suchen. Bei holomorphen Funktionen bleibt diese meist erfolglos. Es gilt nämlich

Satz 2.5 *(Maximumprinzip; negative Formulierung)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Hat $|f|$ ein lokales Maximum, so ist $f \equiv \text{const}$.

Beweis. Es sei z_0 ein lokales Maximum von $|f|$, d.h. es existiert ein $r > 0$ mit

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{für alle } z \in U_r(z_0)\,.$$

Angenommen, es existiert ein $z_1 \in U_r(z_0)$ mit $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Ist $\rho = |z_1 - z_0|$, so gilt auf Grund der Stetigkeit von $t \mapsto |f(z_0 + \rho e^{it})|$ auf $[0, 2\pi]$ und $|f(z_0 + \rho e^{it})| \leq |f(z_0)|$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt < |f(z_0)|\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = |f(z_0)|\,,$$

also mit der Mittelwertformel (1.1)

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt < |f(z_0)|\,.$$

Widerspruch! Damit ist $|f| \equiv \text{const}$ auf $U_r(z_0)$.
Hieraus folgt, dass auch $f \equiv \text{const}$ auf $U_r(z_0)$ ist ([Ü]). Nach dem Identitätssatz (S. 1.6) ist damit $f \equiv \text{const}$ auf G. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir

Satz 2.6 *(Maximumprinzip; positive Formulierung)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und es sei $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig auf $\overline{G}$ und holomorph in G. Dann existiert ein $z_0 \in \partial G$ mit

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)|\,.$$

Beweis. Da G beschränkt ist, ist $\overline{G} = G \cup \partial G$ kompakt. Also existiert ein $z_0 \in \overline{G}$ mit $|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)|$ (beachte: $|f|$ stetig auf $\overline{G}$). Ist $f \equiv \text{const}$, so ist die Behauptung klar. Ist $f \not\equiv \text{const}$, so ist $z_0 \notin G$ nach S. 2.5, also $z_0 \in \partial G$. □

Bemerkung und Definition 2.7 Es seien $A \subset \mathbb{C}$ und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig. Ist $r \geq 0$ und $\{z : |z| = r\} \subset A$, so setzen wir

$$M(r, f) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Ist f holomorph in $U_R(0)$, so gilt mit dem Maximumprinzip (positive Form) für alle $0 \leq r < R$

$$M(r, f) = \max_{U_r[0]} |f(z)|$$

und damit ist insbesondere $M(r, f)$ monoton wachsend. Aus der negativen Form folgt, dass $M(r, f)$ streng monoton wächst, falls $f \not\equiv \text{const}$ ist. Ist f ganz und nicht konstant, so gilt nach dem Satz von Liouville $M(r, f) \to \infty$ für $r \to \infty$.

Beispiel 2.8 Wir betrachten wieder $f(z) = \cos z$. Ist $|z| = r$, so folgt

$$|\cos z| = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu}}{(2\nu)!} \right| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{2\nu}}{(2\nu)!} = \cosh(r) = \cos(ir) \; .$$

Also ist $M(r, f) = \cosh(r)$.

Bemerkung 2.9 Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f \in H(G)$, so gilt natürlich für alle Nullstellen z_0 von f

$$|f(z_0)| = 0 \leq |f(z)| \qquad (z \in G)\,,$$

d.h. Nullstellen sind Minima von $|f|$. Ist aber $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ (d.h. $Z(f) = \emptyset$), so hat f im Falle $f \not\equiv \text{const}$ auch kein lokales Minimum in G (Minimumprinzip; negative Formulierung).
Außerdem existiert dann im Falle, dass G beschränkt ist, stets ein $z_0 \in \partial G$ mit

$$|f(z_0)| = \min_{z \in \overline{G}} |f(z)|$$

(Minimumprinzip; positive Formulierung).
Beides ergibt sich unmittelbar durch Anwendung obiger Maximumprinzipien auf $1/f$.

Definition 2.10 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sind $f_n, f : X \to Y$, so sagt man, die Folge (f_n) sei *lokal gleichmäßig konvergent gegen f (auf X), falls zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf U.*

Bemerkung 2.11 Potenzreihen sind auf ihrem Konvergenzkreis lokal gleichmäßig konvergent (siehe Analysis).

Wir untersuchen nun Folgen holomorpher Funktionen. Ist $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt mit B. 1.9 (beachte: es ist $|e^{it} - z| \geq 1 - r$ für $|z| = r < 1$)

$$M(r, (Cg)^{(k)}) \leq \frac{k!}{(1-r)^{k+1}} M(1, g) \tag{2.1}$$

für alle $0 \leq r < 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$ (Cauchysche Ungleichung). Damit beweisen wir

Satz 2.12 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und es seien $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Ferner gelte $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω. Dann ist auch f holomorph in Ω, und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)} \qquad (n \to \infty)$$

lokal gleichmäßig auf Ω.

Beweis. Ist $z_0 \in \Omega$, so existiert ein $R > 0$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf $U_R[z_0]$. Wir betrachten $g_n, g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ mit

$$g_n(z) = f_n(z_0 + Rz), \quad g(z) = f(z_0 + Rz).$$

Dann gilt $g_n \to g$ gleichmäßig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Nach Voraussetzung ist $g_n \in A$. Außerdem ist g stetig auf $\mathbb{S}$. Aus

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n(e^{it})\frac{e^{it}}{e^{it}-z}dt \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})\frac{e^{it}}{e^{it}-z}dt = (Cg)(z) \quad (n \to \infty)$$

folgt $g|_{\mathbb{D}} = (Cg)|_{\mathbb{D}}$. Also ist g analytisch in $\mathbb{D}$ und damit ist auch f holomorph in $U_R(z_0)$. Weiter ergibt sich mit (2.1) für $0 < r < 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$M(r, g^{(k)} - g_n^{(k)}) \le \frac{k!}{(1-r)^{k+1}} M(1, g - g_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Also gilt $g_n^{(k)} \to g^{(k)}$ gleichmäßig auf $U_r[0]$ und folglich auch $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ gleichmäßig auf $U_{rR}[z_0]$. □

Beispiel 2.13 Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta : G \to \mathbb{C}$ ist für $G := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ definiert durch

$$\zeta(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z} \qquad \Big(= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{e^{z \cdot \ln \nu}} \Big).$$

Dabei konvergiert die Teilsummenfolge $s_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^z}$ lokal gleichmäßig auf G ([Ü]). Da die Teilsummen holomorph in G (genauer sogar Einschränkungen ganzer Funktionen) sind, ist ζ holomorph in G nach S. 2.12.

3 Stammfunktionen und Cauchyscher Integralsatz

Wir wenden uns nun der Frage nach der Existenz von Stammfunktionen im Komplexen zu. Ist f stetig auf einer offenen Menge Ω in $\mathbb{C}$ und existiert eine Stammfunktion F auf Ω, d. h. eine Funktion F mit $F' = f$ auf Ω, so ist F holomorph in Ω und damit auch f. Umgekehrt gilt

Satz 3.1 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei f holomorph in G. Dann existiert eine Stammfunktion F zu f in G.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei G sternförmig bzgl. 0. Wir definieren $F : G \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_0^1 z \cdot f(zt)dt \qquad (z \in G).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial z}(zf(zt)) = f(zt) + zf'(zt)t \qquad (z \in G,\, t \in [0,1]).$$

Da f holomorph in G ist, ist die rechte Seite stetig auf $G \times [0,1]$. Nach B. B.2 ist F differenzierbar auf G mit

$$\begin{aligned} F'(z) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}(zf(zt))\,dt = \int_0^1 f(zt)\,dt + \int_0^1 t \cdot zf'(zt)\,dt \\ &= \int_0^1 f(zt)\,dt + t \cdot f(zt)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(zt)\,dt = f(z). \end{aligned}$$

□

Als erste Anwendung wollen wir uns mit der Frage der Existenz von Logarithmen und allgemeinen Potenzen in $\mathbb{C}$ beschäftigen. Im ersten Teil der Analysis hatten wir die reelle Logarithmusfunktion als Umkehrung der (reellen) Exponentialfunktion definiert. Schon die Tatsache, dass die Exponentialfunktion im Komplexen nicht mehr injektiv ist, deutet an, dass die Situation hier komplizierter wird. Es gilt jedenfalls

Satz 3.2 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g \in H(G)$ mit $Z(g) = \emptyset$. Dann gilt*

1. *Ist G sternförmig, so existiert eine Funktion $f \in H(G)$ mit $e^f = g$.*
2. *Sind $f, \tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt $e^{f(z)} = e^{\tilde{f}(z)}$ für alle $z \in G$ genau dann, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit*
$$\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i \qquad (z \in G)\,.$$

Beweis. 1. Da G sternförmig ist, existiert nach S. 3.1 eine Funktion $f \in H(G)$ mit $f' = g'/g$. Dabei kann f so gewählt werden, dass für ein vorgegebenes $z_0 \in G$ und $g(z_0) = r_0 e^{i\varphi_0}$ zusätzlich $f(z_0) = \ln(r_0) + i\varphi_0$ gilt (ggfs. addiere man zu f eine geeignete Konstante). Es folgt

$$(ge^{-f})' = g'e^{-f} + ge^{-f}(-f') \equiv 0 \quad \text{in } G.$$

Also existiert eine Konstante c mit

$$g(z) = ce^{f(z)} \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Aus $e^{f(z_0)} = g(z_0)$ ergibt sich $c = 1$ und damit die Behauptung.
2. Sind $f, \tilde{f} \in C(G)$ mit $e^{\tilde{f}} = e^f$, so gilt

$$e^{\tilde{f}(z)-f(z)} = e^{\tilde{f}(z)}/e^{f(z)} \equiv 1 \text{ in } G.$$

Damit ist

$$\varphi(z) = \frac{\tilde{f}(z) - f(z)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$$

für alle $z \in G$. Da G zusammenhängend und φ stetig auf G ist, ist $\varphi(z) \equiv \text{const}$ auf G nach S. A.5, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i \qquad (z \in G)\,.$$

Die Umkehrung ist klar. □

Bemerkung und Definition 3.3 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g \in H(G)$ mit $Z(g) = \emptyset$. Jede Funktion $f \in H(G)$ mit $e^f = g$ in G heißt ein *Zweig des Logarithmus* von g in G. Ist f ein solcher Zweig, so ist auch $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ein Zweig. Nach S. 3.2.2 sind durch diese (abzählbar unendlich vielen) Funktionen alle Zweige gegeben. Weiter heißt für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ die Funktion $e^{f/m}$ ein *Zweig der m-ten Wurzel* von g in G (man beachte: es gilt $(e^{f/m})^m = e^f = g$).

Beispiel 3.4 Es sei

$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\,.$$

und $g(z) = z$. Dann ist $\mathbb{C}_-$ sternförmig (etwa bzgl. 1). Nach S. 3.2.1 existiert eine Funktion $f \in H(\mathbb{C}_-)$ mit

$$e^{f(z)} = z \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_-.$$

(also ein Zweig des Logarithmus von z). Der Beweis zu S. 3.2 zeigt, dass $f'(z) = 1/z$ auf $\mathbb{C}_-$ gilt. Weiter kann f mit $f(1) = 0$ gewählt werden.
Ist $z \in \mathbb{C}_-$, so existieren eindeutig bestimmte $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ (Polarkoordinaten) mit $z = re^{i\varphi}$. Die Abbildung $p : \mathbb{C}_- \to (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ mit

$$p(z) = (r, \varphi) \qquad (z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_-)$$

ist stetig auf $\mathbb{C}_-$ (siehe Analysis). Damit ist auch $\tilde{f} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{f}(z) = \ln r + i\varphi \qquad (z \in \mathbb{C}_-)$$

stetig. Weiter gilt natürlich auch

$$e^{\tilde{f}(z)} = e^{\ln r + i\varphi} = re^{i\varphi} = z \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Da $\tilde{f}(1) = 0 = f(1)$ gilt, ist $f(z) \equiv \tilde{f}(z)$ in $\mathbb{C}_-$. Für $z = r > 0$ haben wir insbesondere $f(r) = \ln r$, d.h. dieser Zweig setzt den „reellen Logarithmus" ln holomorph auf $\mathbb{C}_-$ fort. Wir nennen f den Hauptzweig des Logarithmus (von z) in $\mathbb{C}_-$ und schreiben dafür auch

$$f(z) =: \log z \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Nach S. 3.2.2 sind alle weiteren Zweige von der Form

$$z \mapsto \log z + 2k\pi i = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.
Ist $\alpha \in \mathbb{C}$, so setzen wir damit

$$z^\alpha := e^{\alpha \cdot \log z} \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Ist speziell $\alpha = 1/m$ für ein $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, so schreiben wir auch $\sqrt[m]{z}$ anstelle von $z^{1/m}$, und im Fall $m = 2$ auch kurz $\sqrt{z}$. Die Funktion $z \mapsto \sqrt[m]{z}$ heißt *Hauptzweig der m-ten Wurzel* von z in $\mathbb{C}_-$ (für $m = 2$ kurz *Hauptzweig der Wurzel*) von z in $\mathbb{C}_-$.

Wie sieht es mit der Gültigkeit der Funktionalgleichung

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w)$$

für $z, w \in \mathbb{C}_-$ aus?
Ist $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\vartheta}$ mit $\varphi, \vartheta \in (-\pi, \pi)$ und $\varphi + \vartheta \in (-\pi, \pi)$, so ist $zw = r\rho e^{i(\varphi+\vartheta)}$. Es gilt also

$$\log(zw) = \ln(r\rho) + i(\varphi + \vartheta) = \ln r + i\varphi + \ln \rho + i\vartheta = \log z + \log w\,.$$

Ist jedoch etwa $\varphi + \vartheta > \pi$, so ist $zw = r\rho e^{i(\varphi+\vartheta-2\pi)}$, also

$$\log(zw) = \ln(r\rho) + i(\varphi + \vartheta - 2\pi) = \log z + \log w - 2\pi i\,.$$

Es kommt also ein „Korrekturterm" $2\pi i$ hinzu. Im Falle $\varphi + \vartheta = \pi$ ist $\log(zw)$ nicht einmal definiert.
Die Beispiele zeigen, dass Vorsicht im Umgang mit komplexen Logarithmen angebracht ist!

Bemerkung 3.5 Für $z \in \mathbb{C}_-$ und $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$z^{\alpha_1+\alpha_2} = z^{\alpha_1} z^{\alpha_2}\,.$$

Weiter ist $z \mapsto z^\alpha$ holomorph in $\mathbb{C}_-$ mit

$$(z^\alpha)' = \alpha \cdot z^{\alpha-1}\,.$$

Wir wollen nun das lokale Abbildungsverhalten einer holomorphen Funktion etwas genauer beleuchten. Das Maximumprinzip wird sich dabei auch noch einmal als Konsequenz eines allgemeineren Resultats ergeben.

Satz 3.6 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Ferner sei $z_0 \in \Omega$ und $w_0 := f(z_0)$, wobei z_0 eine Nullstelle der Ordnung m von $f - w_0$ ist. Dann existieren eine offene Umgebung U von z_0 und eine in U holomorphe Funktion φ mit $\varphi(z_0) = 0$ sowie $\varphi'(z_0) \neq 0$ und so, dass*

$$f(z) = w_0 + \varphi^m(z) \qquad (z \in U)\,.$$

Beweis. Es seien $U := U_r(z_0)$ und $g \in H(U)$ so, dass $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$ und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ (existieren nach B./D. 1.3). Dann existiert nach S. 3.2 ein $h \in H(U)$ mit $e^h = g$. Ist $\varphi : U \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi(z) = (z - z_0)e^{h(z)/m} \qquad (z \in U)\,,$$

so gilt

$$\varphi^m(z) = (z - z_0)^m e^{h(z)} = (z - z_0)^m g(z) = f(z) - w_0 \qquad (z \in U)\,.$$

Dabei ist $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) \neq 0$. □

Bemerkung 3.7 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Ist $z_0 \in \Omega$ mit $f'(z_0) \neq 0$ (d. h. ist z_0 eine einfache Nullstelle von $f - w_0$, wobei $w_0 := f(z_0)$), so existieren nach dem Hauptsatz über Umkehrfunktionen offene Umgebungen U von z_0 in Ω und V von $w_0 = f(z_0)$ in $f(\Omega)$ so, dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist mit $f'(z) \neq 0$ in U ([Ü]). Außerdem ist dann $g := (f_{|U})^{-1} : V \to U$ holomorph mit

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \qquad (w \in V)$$

(Umkehrregel).

Als unmittelbare Konsequenz aus den vorhergehenden Ergebnissen erhalten wir

Satz 3.8 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$. Dann gilt*

1. *f ist offen, d. h. Bilder offener Mengen sind offen.*
2. *(Gebietstreue) $f(G)$ ist ein Gebiet.*

Beweis. 1. Es seien $M \subset G$ offen und $w_0 \in f(M)$. Zu $z_0 \in M$ mit $f(z_0) = w_0$ seien $U \subset M$ und φ wie in S. 3.6 (man beachte: jede Nullstelle von $f - w_0$ hat endliche Ordnung nach dem Identitätssatz). Nach B. 3.7 kann dabei U so (klein) gewählt werden, dass $\varphi : U \to U_\delta(0)$ für ein $\delta > 0$ bijektiv ist. Da das Polynom P mit $P(w) = w_0 + w^m$ die Kreisscheibe $U_\delta(0)$ **auf** $U_{\delta^m}(w_0)$ abbildet (Existenz komplexer Wurzeln; siehe Analysis) ist

$$U_{\delta^m}(w_0) = (P \circ \varphi)(U) = w_0 + \varphi^m(U) = f(U) \subset f(M) .$$

Also ist $f(M)$ offen.
2. Da f insbesondere stetig auf dem Gebiet G ist, ist nach S. A.4 und 1. auch $f(G)$ ein Gebiet. □

Bemerkung 3.9 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$, $f \not\equiv \text{const}$. Für alle $z_0 \in G$ und alle $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subset G$ ist nach S. 3.8 die Menge $f(U_r(z_0))$ offen. Also existiert insbesondere ein $w \in f(U_r(z_0))$ mit $|w| > |f(z_0)|$. Damit hat $|f|$ kein lokales Maximum an z_0. Dies zeigt, dass S. 3.8 das Maximumprinzip umfasst.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Konzept komplexer Wegintegrale.

Definition 3.10 1. Einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ nennen wir kurz *C^1-Weg*. Ist γ ein C^1-Weg und ist $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig auf γ^*, so ist $(f \circ \gamma)\gamma'$ stetig auf $[\alpha, \beta]$. Wir definieren das *(Weg-)Integral von f längs γ* durch

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(\zeta) d\zeta := \int f d\gamma := \int_\alpha^\beta (f \circ \gamma)\gamma' = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t) dt .$$

Außerdem setzen wir

$$\int f|d\gamma| := \int_\alpha^\beta (f \circ \gamma)|\gamma'| = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt$$

sowie $L(\gamma) := \int |d\gamma|$. Dabei heißt $L(\gamma)$ die *Länge* von γ.
2. Für einen C^1-Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sei der C^1-Weg $-\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$-\gamma(t) := \gamma(\beta + \alpha - t) \qquad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Dann ist $-\gamma^* := (-\gamma)^* = \gamma^*$ und für alle $f \in C(\gamma^*)$

$$\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f \quad \text{sowie} \quad \int f|d(-\gamma)| = \int f|d\gamma|.$$

Bemerkung 3.11 1. Es seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $\gamma = \gamma_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{C}$ definert durch

$$\gamma_{a,b}(t) := a + t(b-a) \quad (t \in [0,1]).$$

Dann schreiben wir auch

$$\int_a^b f := \int_\gamma f \ .$$

Für $f \in C(\gamma^*)$ gilt

$$\int_a^b f = (b-a) \int_0^1 f(a + t(b-a))dt.$$

Ist F wie im Beweis zu S. 3.1, so ist damit $F(z) = \int_0^z f$ für $z \in G$.

2. Für $\gamma = \gamma_{z_0,R} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$, und für f stetig auf $K_R(z_0) = \gamma^*$ ist

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) iRe^{it} dt \ \text{ und } \int f|d\gamma| = \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) R\, dt,$$

also insbesondere auch $L(\gamma) = 2\pi R$. Wir schreiben in diesem Fall meist

$$\int_{|\zeta - z_0| = R} \quad \text{bzw.} \quad \int_{K_R(z_0)} \quad \text{statt} \quad \int_\gamma \ .$$

Damit gilt für alle $R > 0$

$$\int_{K_R(z_0)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^{-1}\, iRe^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Ist allgemeiner f holomorph auf einer offenen Menge Ω, so liest sich für $z_0 \in \Omega$ und $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ die Causchysche Integralformel (siehe B. 1.14) kurz

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (z \in U_R(z_0)) \ .$$

Es ist sinnvoll, die Definition von Pfadintegralen geeignet zu erweitern.

Bemerkung und Definition 3.12 1. Es seien I eine endliche Menge und $\gamma_\iota : [\alpha_\iota, \beta_\iota] \to \mathbb{C}$ C^1-Wege ($\iota \in I$) mit Anfangspunkten a_ι und Endpunkten b_ι. Das Tupel $\gamma := (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ heißt dann ein *Kette* und $\gamma^* := \bigcup_{\iota \in I} \gamma_\iota^*$ die *Spur* von γ. Falls eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to I$ so existiert, dass für $j = 1, \ldots, n-1$ die Endpunkte $b_{\sigma(j)}$ von $\gamma_{\sigma(j)}$ mit den Anfangspunkten $a_{\sigma(j+1)}$ von $\gamma_{\sigma(j+1)}$ übereinstimmen, so sprechen wir von einem *Pfad*. Der Pfad γ heißt dann *geschlossen*, falls zusätzlich $a_{\sigma(1)} = b_{\sigma(n)}$ gilt. Weiter heißt

$a_{\sigma(1)}$ Anfangspunkt und $b_{\sigma(n)}$ Endpunkt von γ (man kann zeigen, dass die Definition für nichtgeschlossene Pfade unabängig von der Wahl von σ ist). Schließlich setzen wir noch $-\gamma := (-\gamma_\iota)_{\iota\in I}$.
2. Ist γ eine Kette, so definieren wir für $f \in C(\gamma^*)$

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta := \sum_{\iota\in I}\int_{\gamma_\iota} f$$

und

$$\int f\,|d\gamma| := \sum_{\iota\in I}\int f\,|d\gamma_\iota|, \qquad L(\gamma) := \int |d\gamma|.$$

Unmittelbar aus der jeweiligen Definition ergibt sich (mit $\|g\|_\infty := \|g\|_{\infty,M} := \sup_{\zeta\in M}|g(\zeta)|$ für g beschränkt auf $M \subset \mathbb{C}$) eine einfache, aber oft sehr nützliche Abschätzung für das Integral von f längs γ:

$$\Big|\int_\gamma f\Big| \le \int |f|\,|d\gamma| \le \|f\|_\infty \cdot L(\gamma)\,.$$

Der folgende Satz zeigt, dass bei Existenz einer Stammfunktion Integrale wegunabhängig sind.

Satz 3.13 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Genau dann existiert eine Stammfunktion F zu f in G, wenn für alle geschlossenen Pfade γ in G*

$$\int_\gamma f = 0$$

ist. In diesem Fall gilt für Pfade in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b

$$\int_\gamma f = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis. 1. Ist F eine Stammfunktion zu f und ist $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota\in I}$ ein Pfad in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b, so gilt mit dem HDI und mit σ wie in B./D. 3.12

$$\int_\gamma f = \sum_{\iota\in I}\int_{\alpha_\iota}^{\beta_\iota}(f\circ\gamma_\iota)\gamma_\iota' = \sum_\iota \int_{\alpha_\iota}^{\beta_\iota}(F\circ\gamma_\iota)' = \sum_{j=1}^n F(b_{\sigma(j)}) - F(a_{\sigma(j)}) = F(b) - F(a).$$

Insbesondere verschwindet das Integral, wenn γ geschlossen ist.
2. Es sei $z_* \in G$ fest. Wie in B. A.11 sieht man, dass G auch pfadzusammenhängend ist. Durch

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f \qquad (z \in G),$$

wobei γ_z einen beliebigen Pfad in G mit Anfangspunkt z_* und Endpunkt z bezeichnet, ist eine Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ (wohl-)definiert.
(Wichtig: Der Wert ist unabhängig von der Wahl des Pfades γ_z, denn ist $\widetilde{\gamma}_z$ ein weiterer solcher Pfad, so ist $\gamma := (\gamma_z, -\widetilde{\gamma}_z)$ ein geschlossener Pfad, also gilt

$$0 = \int\limits_\gamma f = \int\limits_{\gamma_z} f - \int\limits_{\widetilde{\gamma}_z} f.)$$

Wir zeigen: $F' = f$ auf G.
Denn: Ist $z_0 \in G$ und $U_R(z_0) \subset G$, so gilt für $z \in U_R(z_0)$ mit $\gamma := (\gamma_{z_0}, \gamma_{z_0,z}, -\gamma_z)$

$$0 = \int\limits_\gamma f = \int\limits_{\gamma_{z_0}} f + \int\limits_{z_0}^{z} f - \int\limits_{\gamma_z} f = F(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} f - F(z).$$

Also folgt $F(z) - F(z_0) = \int_{z_0}^z f$ und damit

$$\Big|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\Big| = \Big|\frac{1}{z - z_0}\int\limits_{z_0}^{z} \big(f(\zeta) - f(z_0)\big)\, d\zeta\Big| \le \big\|f - f(z_0)\big\|_{\infty,\gamma^*_{z_0,z}} \to 0 \quad (z \to z_0).$$

□

Beispiel 3.14 Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und γ ein beliebiger Pfad in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b. Dann gilt für $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$

$$\int\limits_\gamma (\zeta - z_0)^m d\zeta = \frac{1}{m+1}\big((b - z_0)^{m+1} - (a - z_0)\big)^{m+1}\big).$$

Also: Der Wert des Integrals hängt nur von den Anfangs- und Endpunkten von γ ab!
Insbesondere gilt für jeden geschlossenen Pfad γ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

$$\int\limits_\gamma (\zeta - z_0)^m d\zeta = 0\,.$$

Andererseits ist nach B. 3.11

$$\int\limits_{K_R(z_0)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 2\pi i,$$

d. h. für $m = -1$ verschwindet das Integral über geschlossene Pfade im Allgemeinen **nicht**.
S. 3.13 zeigt damit auch, dass $z \mapsto 1/(z - z_0)$ in $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ keine Stammfunktion haben kann!

Satz 3.15 *(Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei f holomorph in G. Dann ist

$$\int\limits_\gamma f = 0$$

für alle geschlossenen Pfade in G.

Beweis. Nach S. 3.1 existiert ein F mit $F' = f$ in G. Also folgt die Behauptung aus S. 3.13 $\square$

Bemerkung 3.16 Es seien $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ und $f(z) = 1/(z - z_0)$. Wieder zeigt B. 3.11, dass die Aussage von S. 3.15 nicht für G und damit nicht für alle Gebiete gilt.

4 Fourier- und Laurent-Reihen

Im ersten Abschnitt haben wir uns mit Taylor-Reihen bzw. Potenzreihen beschäftigt. Ist $g \in A$, so gilt nach B. 1.12

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad (z \in \mathbb{D})$$

wobei die Taylor-Koeffizienten a_k die Darstellung

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-ikt}\, dt$$

haben. Ist dabei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$, so konvergiert die Reihe auch gleichmäßig auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}$ mit $g(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ auf $\mathbb{S}$ ([Ü]).

Wir wollen nun Reihenentwicklungen dieser Bauart untersuchen, die den wesentlichen Vorteil haben, dass keine Ableitungen benötigt werden.

Bemerkung 4.1 Es sei $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Wir schreiben im Weiteren für $f \in C(\mathbb{S})$ kurz

$$\int f\, dm := \frac{1}{2\pi} \int f |d\gamma| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt \Big(= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) dt \Big).$$

Damit sind durch

$$\langle f, g \rangle := \int f \overline{g}\, dm \qquad (f, g \in C(\mathbb{S}))$$

ein Skalarprodukt auf $C(\mathbb{S})$ und durch

$$\|f\|_2 := \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} \qquad (f \in C(\mathbb{S}))$$

eine Norm auf $C(\mathbb{S})$ definiert.

Ist ferner $e_k : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$ definiert durch

$$e_k(z) := z^k \qquad (z \in \mathbb{S}),$$

so gilt dabei

$$\langle e_j, e_k \rangle = \int e_j\, \overline{e_k}\, dm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i(j-k)} e^{i(j-k)t} \Big|_0^{2\pi} = 0 & , \ k \neq j \\ 1 & , \ k = j \end{cases}.$$

Damit ist $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem (ONS) in $C(\mathbb{S})$. Ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu := \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu z^\nu \qquad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{S}\,,$$

so gilt $f \in C(\mathbb{S})$ und $a_k = \langle f, e_k \rangle$ für alle k.

(Denn: Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ist

$$\langle f, e_k \rangle = \int \Big(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e_\nu \Big) \overline{e_k}\, dm = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu \int e_\nu \overline{e_k}\, dm = a_k .)$$

Definition 4.2 Es sei $f \in C(\mathbb{S})$. Dann heißt für $k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{f}(k) := \langle f, e_k \rangle = \int f \overline{e_k}\, dm = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{is}) e^{-iks} ds$$

k-ter *Fourier-Koeffizient* von f. Außerdem heißt die Abbildung $C(\mathbb{S}) \ni f \mapsto \widehat{f} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ *Fourier-Transformation*. Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt weiter $s_n f$ mit

$$(s_n f)(z) := \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) z^\nu = \sum_{\nu=-n}^{n} \langle f, e_\nu \rangle e_\nu(z) \qquad (z \in \mathbb{S})$$

n-te *Fourier-Teilsumme* von f und $(s_n f)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *Fourier-Reihe* von f.

Beispiel 4.3 1. Ist $g \in A$, so ist $\widehat{g}(k) = g^{(k)}(0)/k!$ für $k \in \mathbb{N}_0$, d. h. für $k \geq 0$ stimmen die Fourier-Koeffizienten und die Taylor-Koeffizienten überein. Außerdem ist in diesem Fall $\widehat{g}(-k) = 0$ für $k > 0$ (folgt aus der Mittelwertformel aus B. 1.12 mit $z \mapsto g(z) z^k$ anstelle von g).
2. Wir betrachten $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(e^{it}) := \frac{\pi}{2} - |t| \qquad (t \in (-\pi, \pi]) ,$$

Dann gilt für $k \neq 0$

$$2\pi \widehat{f}(k) = -\int_{-\pi}^{\pi} |s| \cos(-ks)\, ds - \underbrace{i \int_{-\pi}^{\pi} |s| \sin(-ks)\, ds}_{=0} = -2 \int_0^{\pi} s \cos(ks)\, ds = \frac{2}{k^2}(1 - (-1)^k) ,$$

also

$$\widehat{f}(k) = \frac{2}{\pi k^2} \quad (k \text{ ungerade}) , \qquad \widehat{f}(k) = 0 \quad (k \text{ gerade, } k \neq 0) .$$

Außerdem ist

$$\widehat{f}(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = 0 .$$

Folglich gilt für $z = e^{it} \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) z^\nu &= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu \text{ ungerade}} \frac{z^\nu}{\nu^2} = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{z^\nu + z^{-\nu}}{\nu^2} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{\mathrm{Re}(z^\nu)}{\nu^2} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{\cos(\nu t)}{\nu^2} . \end{aligned}$$

Dabei ist die Konvergenz (auch für die mit den Absolutbeträgen gebildete Reihe) nach den Weierstraßschen Majorantenkriterium gleichmäßig auf $\mathbb{S}$.

Bemerkung 4.4 Wir wollen im Weiteren zeigen, dass die Fourier-Transformation

$$C(\mathbb{S}) \ni f \mapsto \widehat{f} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

injektiv ist, d. h. die Funktion f ist durch die Folge der Fourier-Koeffizienten vollständig festgelegt. Dazu beweisen wir, dass

$$||f - s_n f||_2 \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{4.1}$$

für alle $f \in C(\mathbb{S})$ gilt, d. h. $(s_n f)$ konvergiert „im quadratischen Mittel“ gegen f.
Wir schreiben

$$T_n := \operatorname{linspan}\{e_k : k \in \{-n, \dots, n\}\}$$

für die Menge der *trigonometrischen Polynome* vom Grad $\leq n$. Da $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS ist, ergibt sich aus der Linearen Algebra

$$\|f - s_n f\|_2 = \min_{P \in T_n} ||f - P||_2 =: \operatorname{dist}(f, T_n) \ .$$

Also: $s_n f \in T_n$ ist die beste Approximation an f bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm. Insbesondere ist $P = s_n P$ für alle $P \in T_n$.
Damit reicht es für (4.1) zu zeigen, dass eine Folge (P_n) mit $P_n \in T_n$ und $||f - P_n||_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ existiert. Da für alle $f \in C(\mathbb{S})$

$$||f||_2 = \Big(\int |f|^2 \, dm\Big)^{1/2} \leq ||f||_\infty$$

ist, reicht es dafür wiederum zu zeigen, dass $P_n \in T_n$ existieren mit

$$||f - P_n||_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

mit anderen Worten, die Menge der trigonometrischen Polynome $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ ist dicht in Raum $(C(\mathbb{S}), ||\cdot||_\infty)$.

Bemerkung und Definition 4.5 Es seien $f, g \in C(\mathbb{S})$. Wir definieren die *Faltung* $f * g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ von f und g durch

$$(f * g)(z) := \int f(z\overline{\zeta}) g(\zeta) \, dm(\zeta) \qquad (z \in \mathbb{S}).$$

Dann ist $f * g$ stetig auf $\mathbb{S}$, und es gilt

$$f * g = g * f.$$

([Ü]). Ist dabei speziell $P \in T_n$, so gilt $P = s_n P$ und damit

$$(f * P)(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{P}(\nu) z^\nu \int \overline{\zeta}^\nu f(\zeta) \, dm(\zeta) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{P}(\nu) \widehat{f}(\nu) z^\nu \qquad (z \in \mathbb{S}) \ .$$

Also ist auch $f * P \in T_n$ und es gilt

$$\widehat{f * P} = \widehat{f} \cdot \widehat{P}.$$

Wir setzen für $A \subset \mathbb{S}$ so, dass $t \mapsto 1_A(e^{it})$ eine Regelfunktion auf $[0, 2\pi]$ ist (hierbei ist 1_A die Indikatorfunktion von A),

$$\int_A f\,dm := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})1_A(e^{it})\,dt.$$

Satz 4.6 *(gute Kerne)*
Für $n \in \mathbb{N}$ seien $Q_n \in T_n$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $Q_n \geq 0$ *auf* $\mathbb{S}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(ii) $\int Q_n\,dm = 1$ $(n \in \mathbb{N})$,

(iii) *Für alle* $\delta > 0$ *gilt* $\int\limits_{\mathbb{S}\setminus U_\delta(1)} Q_n\,dm \to 0$ $(n \to \infty)$.

Dann gilt für alle $f \in C(\mathbb{S})$

$$f * Q_n \to f \qquad \textit{gleichmäßig auf } \mathbb{S}.$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f stetig auf der kompakten Menge $\mathbb{S}$ ist, ist f gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$\sup_{z\in\mathbb{S},\, \zeta\in\mathbb{S}\cap U_\delta(1)} |f(z\overline{\zeta}) - f(z)| < \varepsilon$$

(beachte: $|z\overline{\zeta} - z| = |\zeta - 1|$). Mit (ii) und (i) ergibt sich für $z \in \mathbb{S}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$|(f * Q_n)(z) - f(z)| = \left|\int (f(z\overline{\zeta}) - f(z))\,Q_n(\zeta)\,dm(\zeta)\right| \leq \int |f(z\overline{\zeta}) - f(z)| Q_n(\zeta)\,dm(\zeta)$$

also wieder mit (ii)

$$\|f * Q_n - f\|_\infty \leq \int\limits_{\mathbb{S}\cap U_\delta(1)} \varepsilon Q_n\,dm + \int\limits_{\mathbb{S}\setminus U_\delta(1)} 2\|f\|_\infty Q_n\,dm \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{S}\setminus U_\delta(1)} Q_n\,dm$$

Aus (iii) folgt für n genügend groß

$$\|f - f * Q_n\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

□

Bemerkung 4.7 Es stellt sich natürlich die Frage nach der Existenz von Folgen wie in S. 4.6. Ein Beispiel ist

$$F_n(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right) z^\nu \qquad (z \in \mathbb{S}, n \in \mathbb{N})$$

(F_n heißt n-ter *Fejér-Kern*). Es gilt dafür: $F_n \in T_n$ und

$$\int F_n\,dm = \sum_{\nu=-n}^{n}\Big(1-\frac{|\nu|}{n+1}\Big)\underbrace{\int e_\nu\,dm}_{=\delta_{0,\nu}} = 1,$$

also ist jedenfalls (ii) erfüllt. Weiter ist für $z \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^{n} z^j\Big|^2 &= \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{j=0}^{n} z^j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n}\overline{z}^j\Big) = \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{j,k=0}^{n} z^{j-k} = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=-n}^{n}(n+1-|\nu|)z^\nu = F_n(z),\end{aligned}$$

also $F_n \geq 0$ und für $z \in \mathbb{S}\setminus U_\delta(1)$

$$F_n(z) = \frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^{n} z^j\Big|^2 = \frac{1}{n+1}\Big|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\Big|^2 \leq \frac{1}{n+1}\cdot\frac{4}{\delta^2} \to 0.$$

Damit gilt $F_n \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}\setminus U_\delta(1)$. Also ist insbesondere auch (iii) erfüllt. Nach S. 4.6 gilt also für alle $f \in C(\mathbb{S})$

$$f * F_n \to f \qquad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{S}.$$

Da die $f * F_n$ trigonometrische Polynome von Grad $\leq n$ sind, ergibt sich insbesondere (siehe B. 4.4) für alle $f \in C(\mathbb{S})$

$$||f - s_n f||_2 \leq ||f - f * F_n||_2 \leq ||f - f * F_n||_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Dies bedeutet jedoch noch nicht, dass stets auch $s_n f(z) \to f(z)$ für alle $z \in \mathbb{S}$ gilt!

Als Folgerung aus B. 4.7 erhalten wir

Satz 4.8 *Es sei $f \in C(\mathbb{S})$. Dann gilt*

1. $||f||_2^2 = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\nu)|^2$ *(Parsevalsche Gleichung).*
2. *Aus $\widehat{f} = 0$ folgt $f \equiv 0$, d. h. die Fourier-Transformation ist injektiv.*
3. *Konvergiert $(s_n f)$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$, so gilt $s_n f \to f$, d. h.*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) z^\nu \quad (z \in \mathbb{S}).$$

Beweis.
1. Es gilt $s_n f \in T_n$ und $f - s_n f \in T_n^\perp$ ($\to$ Lineare Algebra). Also ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras

$$||f||_2^2 \;=\; ||f - s_n f||_2^2 + ||s_n f||_2^2\,.$$

Nach B. 4.7 gilt $||f - s_n f||_2^2 \to 0\,(n \to \infty)$, d.h. $||s_n f||_2^2 \to ||f||_2^2\,(n \to \infty)$. Außerdem ist (wieder mit Pythagoras)

$$||s_n f||_2^2 \;=\; ||\sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) e_\nu||_2^2 \;=\; \sum_{\nu=-n}^{n} |\widehat{f}(\nu)|^2 \underbrace{||e_\nu||_2^2}_{=1} = \sum_{\nu=-n}^{n} |\widehat{f}(\nu)|^2\,.$$

Damit ergibt sich 1.
2. Ist $\widehat{f}(\nu) = 0\,(\nu \in \mathbb{Z})$, so ist $||f||_2^2 = 0$ nach 1., also $f \equiv 0$.
3. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ist $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \lim_{n\to\infty} s_n f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) z^\nu$$

stetig auf $\mathbb{S}$. Außerdem gilt nach B. 4.1 dann $\widehat{g} = \widehat{f}$. Nach 2. ist $f = g$. □

Satz 4.9 *(Fejér)*
Es sei $f \in C(\mathbb{S})$. Dann gilt $\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu f \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$.

Beweis. Es sei F_n der n-te Fejér-Kern. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu f(z) &= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \widehat{f}(\mu) z^\mu \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=-n}^{n} \widehat{f}(\mu) z^\mu \underbrace{\sum_{\nu=|\mu|}^{n} 1}_{=n+1-|\mu|} = \sum_{\mu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\mu|}{n+1}\Big) \widehat{f}(\mu) z^\mu \\
&= f * F_n(z),
\end{aligned}$$

d.h. $f * F_n$ ist das arithmetische Mittel der Fourier-Teilsummen $s_0 f, \ldots, s_n f$. Also folgt die Behauptung mit B. 4.7. □

Wir kehren zurück zu holomorphen Funktionen, jetzt auf Kreisringen: Ist K eine kompakte Menge in $\mathbb{C}$, so setzen wir

$$A(K) := \{g \in C(K) : g|_{K^0} \text{ holomorph}\}.$$

Weiter sei für $0 \le r \le R < \infty$

$$K_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r \le |z| \le R\}$$

der abgeschlossene Kreisring um 0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R. Wir berachten Funktionen $g \in A(K_{r,R})$ mit $r \le 1 \le R$.

Satz 4.10 *Sind $r \le 1 \le R$ und ist $g \in A(K_{r,R})$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$*

$$|\widehat{g}(-k)| \le r^k M(r,g) \quad \textit{und} \quad |\widehat{g}(k)| \le R^{-k} M(R,g).$$

Beweis. Der gleiche Beweis wie zu S. 1.11 zeigt, dass für $h \in A(K_{r,R})$ die Funktion $\Phi : [r,R] \to \mathbb{C}$ mit

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{2\pi} h(\lambda e^{it})\, dt \qquad (\lambda \in [r,R])$$

konstant auf $[r,R]$ ist. Damit ergibt sich für $h(z) = g(z)z^k$

$$|\widehat{g}(-k)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} g(e^{it})e^{ikt}\, dt\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} g(re^{it})r^k e^{ikt}\, dt\Big| \le r^k M(r,g)$$

und entsprechend mit $h(z) = g(z)/z^k$ (wobei hier o. E. $r > 0$)

$$|\widehat{g}(k)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} g(e^{it})e^{-ikt}\, dt\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} g(Re^{it})R^{-k} e^{-ikt}\, dt\Big| \le R^{-k} M(R,g).$$

□

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich

Satz 4.11 *Für $r < 1 < R$ und $g \in A(K_{r,R})$ gilt*

$$g(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\nu) z^\nu$$

lokal gleichmäßig auf dem Inneren von $K_{r,R}$. Im Fall $r = 0$ ist dabei $\widehat{g}(-k) = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir schreiben kurz $a_k := \widehat{g}(k)$. Nach S. 4.10 hat die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ Konvergenzradius $\ge R$ und die Potenzreihe $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu} w^\mu$ Konvergenzradius $\ge 1/r$. Außerdem ist $a_{-\mu} = 0$ im Falle $r = 0$ (wieder mit S. 4.10). Da Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreis lokal gleichmäßig konvergieren, konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ lokal gleichmäßig auf $U_R(0)$ und $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu} z^{-\mu}$ lokal gleichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Also konvergiert

$$h(z) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu} z^{-\mu}$$

lokal gleichmäßig auf dem Inneren V von $K_{r,R}$ und damit insbesondere gleichmäßig auf $\mathbb{S}$ ([Ü]). Aus S. 4.8.3 folgt $h|_{\mathbb{S}} = g|_{\mathbb{S}}$. Da h nach S. 2.12 holomorph auf V ist, ergibt sich mit dem Identitätssatz auch $h = g$ auf V. □

Sind $0 \leq r < R \leq \infty$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, so setzen wir

$$V_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Wir zeigen, dass jede in einem offenen Kreisring $V_{r,R}(z_0)$ holomorphe Funktion durch eine Reihe in den Potenzen $(z - z_0)^k$ $(k \in \mathbb{Z})$ dargestellt werden kann.

Satz 4.12 *(Laurent-Entwicklung)*
Es seien $0 \leq r < R \leq \infty$ sowie $z_0 \in \mathbb{C}$, und es sei $f \in H(V_{r,R}(z_0))$. Dann existiert genau eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ so, dass

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

lokal gleichmäßig auf $V_{r,R}(z_0)$. Dabei gilt

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

für beliebiges $r < \rho < R$.

Beweis. 1. Es sei $\rho \in (r, R)$ fest. Wir betrachten r', R' mit $r < r' < \rho < R' < R$ und defineren $g \in A(K_{r'/\rho, R'/\rho})$ durch

$$g(w) := f(z_0 + \rho w) \qquad (w \in K_{r'/\rho, R'/\rho}).$$

Dann gilt nach S. 4.11

$$f(z) = g\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{g}(\nu)}{\rho^\nu} (z - z_0)^\nu$$

lokal gleichmäßig auf $V_{r',R'}(z_0)$. Außderdem ist (siehe B. 3.11.2)

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) \rho^{-k} e^{-ikt} dt = \rho^{-k} \widehat{g}(k).$$

Da die Konvergenz lokal gleichmäßig auf jedem Kreisring $V_{r',R'}(z_0)$ ist, liegt auch lokal gleichmäßige Konvergenz auf $V_{r,R}(z_0)$ vor.

2. Ist $f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu (z - z_0)^\nu$ lokal gleichmäßig in $V_{r,R}(z_0)$, so gilt für $\rho \in (r, R)$ und $k \in \mathbb{Z}$ nach B. 3.14

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} (\zeta - z_0)^{\nu - k - 1} d\zeta = b_k\,.$$

Also gibt es nur eine Folge (a_k) wie in 1. □

Bemerkung und Definition 4.13 Unter den Bedingungen des vorhergehenden Satzes heißen a_k der *k-te Laurent-Koeffizient* von f und $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *Laurent-Reihe* von f bzgl. $V_{r,R}(z_0)$. Ferner heißen die (Potenz-)Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *Regulärteil* (oder auch *Nebenteil*) und die Reihe $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu}(z-z_0)^{-\mu}$ *Hauptteil* der Laurent-Reihe. Dabei konvergiert (vgl. Beweis zu S. 4.11) der Hauptteil lokal gleichmäßig auf $|z-z_0| > r$ und der Regulärteil auf $|z-z_0| < R$.

Beispiel 4.14 1. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \qquad (z \neq 1).$$

Dann ist durch

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \sum_{\mu=1}^{\infty} z^{-\mu} \qquad (|z| > 1)$$

der Hauptteil der Laurent-Entwicklung in $V_{1,\infty}(0)$ gegeben. Der Regulärteil ist dabei $\equiv 0$.
2. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z} \qquad (z \neq 1,2).$$

Dann ist durch

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} z^{-\mu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} z^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}} \qquad (1 < |z| < 2)$$

die Laurent-Entwicklung in $V_{1,2}(0)$ gegeben. Der erste Summand ist der Hauptteil und der zweite der Regulärteil.

5 Isolierte Singularitäten

Oft ist man interessiert am Verhalten holomorpher Funktionen bei Annäherung an Randpunkte des Definitionsbereiches. Der einfachste Fall eines solchen Randpunktes ist der eines isolierten Punktes, mit dem wir uns jetzt genauer befassen.

Bemerkung und Definition 5.1 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann heißt a eine *isolierte Singularität* von f. Ist dabei $R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$, so hat f in $V_{0,R}(a) = U_R(a) \setminus \{a\}$ (genau) eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu}(z-a)^{-\mu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

gemäß S. 4.12. Dabei heißt a

1. *hebbare Singularität*, falls $a_{-\mu} = 0$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$.
2. *Pol der Ordnung* $p \in \mathbb{N}$, falls $a_{-p} \neq 0$ und $a_{-\mu} = 0$ für alle $\mu > p$.
3. *wesentliche Singularität*, falls $a_{-\mu} \neq 0$ für ∞ viele $\mu \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5.2 1. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Hier gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu+1)!} \qquad \text{lokal gleichmäßig in } V_{0,\infty}(0)\,,$$

also ist $a_{-\mu} = 0$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$. Damit hat f an 0 eine hebbare Singularität.
2. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := e^z / z^p \qquad (z \neq 0)\,.$$

Dann ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-p} = \sum_{\nu=-p}^{\infty} \frac{1}{(\nu+p)!} z^\nu$$

lokal gleichmäßig auf $V_{0,\infty}(0)$, also $a_{-p} = 1$ und $a_{-\mu} = 0$ für $\mu > p$. Damit hat f an 0 einen Pol der Ordung p.
3. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = e^{1/z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Dann ist

$$f(z) = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} z^{-\mu} \quad \text{lokal gleichmäßig in } V_{0,\infty}(0)\,,$$

also ist hier $a_{-\mu} = 1/\mu! \neq 0$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$. Folglich hat f an 0 eine wesentliche Singularität.

Wir wollen nun für alle drei Typen isolierter Singularitäten Charakterisierungen herleiten.

Satz 5.3 *(Riemannscher Hebbarkeitssatz)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann sind äquivalent

a) f hat an a eine hebbare Singularität.

b) f ist durch $f(a) := a_0$ zu einer auf Ω holomorphen Funktion f fortsetzbar (die wir auch f nennen).

c) Es existiert eine Umgebung U von a so, dass f in $U \setminus \{a\}$ beschränkt ist.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Ist a eine hebbare Singularität von f, so ist

$$\tilde{f}(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

holomorph auf $U_R(a)$ mit $R = \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$, und es gilt

$$\tilde{f}(z) = f(z) \qquad (z \in V_{0,R}(a)) .$$

b) $\Rightarrow$ c) ist klar
c) $\Rightarrow$ a): Es sei $M \geq 0$ so, dass $|f(z)| \leq M$ für $z \in U \setminus \{a\}$. Nach S. 4.12 ist für $k \in \mathbb{N}$ und $\rho > 0$ genügend klein

$$|a_{-k}| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{K_\rho(a)} f(\zeta)(\zeta-a)^{k-1} d\zeta\Big| \leq \frac{1}{2\pi} M\rho^{k-1} L(K_\rho(a)) \leq M\rho^k.$$

Aus $M\rho^k \to 0$ für $\rho \to 0^+$ folgt $a_{-k} = 0$. □

Für Pole der Ordnung p gilt folgende Charakterisierung.

Satz 5.4 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann sind äquivalent:*

a) f hat an a einen Pol der Ordnung p.

b) Es existiert eine Funktion $g \in H(\Omega)$ mit $g(a) \neq 0$ und so, dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p} \qquad (z \in \Omega \setminus \{a\}).$$

c) $1/f$ ist (definiert und) holomorph auf einer offenen Umgebung U von a mit Nullstelle der Ordnung p an der Stelle a.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wir setzen $g(z) := (z-a)^p f(z)$ für $z \in \Omega \setminus \{a\}$. Ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu \quad \text{in} \quad V_{0,R}(a)$$

mit $a_{-p} \neq 0$, so ist

$$g(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-p}(z-a)^\nu,$$

in $V_{0,r}(a)$, also g holomorph fortsetzbar nach Ω durch $g(a) := a_{-p} \neq 0$. Dabei ist offensichtlich

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p} \quad (z \in \Omega \setminus \{a\}).$$

b) $\Rightarrow$ c): Es sei U eine offene Umgebung von a so, dass $g(z) \neq 0$ in U. Dann ist

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^p \frac{1}{g(z)} \qquad (z \in U \setminus \{a\}).$$

Also ist $1/f$ (definiert und) holomorph auf U und hat nach B./D. 1.3 eine Nullstelle der Ordnung p an a.
c) $\Rightarrow$ a): Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^p \cdot g_0(z) \qquad (z \in U \setminus \{a\})$$

mit einer Funktion $g_0 \in H(U)$ mit $g_0(a) \neq 0$. Dann ist auch $g_0(z) \neq 0$ auf einer offenen Umgebung $\tilde{U}$ von a. Also ist

$$f(z) = \frac{1/g_0(z)}{(z-a)^p} \qquad (z \in \tilde{U} \setminus \{a\}).$$

Da $1/g_0$ holomorph in $\tilde{U}$ ist, hat $1/g_0$ eine Potenzreihendarstellung

$$1/g_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-a)^\nu \quad \text{in} \quad U_\delta(a)$$

für ein $\delta > 0$. Damit ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-a)^{\nu-p} = \sum_{\nu=-p}^{\infty} b_{\nu+p}(z-a)^\nu,$$

mit lokal gleichmäßiger Konvergenz in $V_{0,\delta}(a)$ und es gilt $a_{-p} = b_0 = 1/g_0(a) \neq 0$. □

Als Folgerung erhalten wir

Satz 5.5 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann hat f an a genau dann einen Pol (irgendeiner Ordnung), wenn gilt*

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty .$$

Beweis. Hat f an a einen Pol, etwa der Ordnung p, so gilt mit g wie in S. 5.4 (da $g(a) \neq 0$)

$$|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|z-a|^p} \to \infty \qquad (z \to a)\,.$$

Gilt umgekehrt

$$|f(z)| \to \infty \qquad (z \to a)\,,$$

so existiert eine offene Umgebung U von a mit $f(z) \neq 0$ in $U \setminus \{a\}$ und

$$\lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0\,,$$

also ist $1/f$ nach S. 5.3 holomorph fortsetzbar an der Stelle a mit Nullstelle, etwa der Ordnung p. Dann hat f nach S. 5.4 einen Pol der Ordnung p. □

Beispiel 5.6 Es gilt

$$Z(\sin) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad Z(\cos) = \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}\,,$$

und alle Nullstellen sind von der Ordnung 1. Damit hat auch tan an den Stellen $k\pi$ Nullstellen der Ordnung 1 und cot an den Stellen $(k+1/2)\pi$. Nach S. 5.4 hat $\cot = 1/\tan$ Pole der Ordnung 1 an den Stellen $k\pi$ und $\tan = 1/\cot$ Pole der Ordnung 1 an den Stellen $(k+1/2)\pi$.
Nach S. 5.5 gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z \to k\pi} |\cot z| = \lim_{z \to (k+\frac{1}{2})\pi} |\tan z| = \infty\,.$$

Bemerkung und Definition 5.7 (Riemannsche Zahlenkugel)
Es sei

$$S^2 := \left\{ s = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \left\| s - (0, 0, \frac{1}{2}) \right\|_2 = \frac{1}{2} \right\}.$$

Dann ist durch

$$\varphi(z) := \varphi(x+iy) := \frac{1}{|z|^2+1}\,(x, y, |z|^2) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

eine bijektive Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ definiert ([Ü]). Setzt man

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \qquad \varphi(\infty) := (0,0,1),$$

so ist $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to S^2$ bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\varphi^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \dfrac{\xi}{1-\zeta} + i\dfrac{\eta}{1-\zeta}, & \text{falls } \zeta \neq 1 \\ \infty, & \text{falls } \zeta = 1 \end{cases}\,.$$

(so genannte stereographische Projektion). Weiter wird durch

$$\chi(z,w) := \|\varphi(z) - \varphi(w)\|_2 \qquad (z,w \in \mathbb{C}_\infty)$$

$(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ zu einem kompakten metrischen Raum (Man beachte: Die Abbildung $\varphi : (\mathbb{C}_\infty, \chi) \to (S^2, d_{||\cdot||_2})$ ist eine Isometrie. Damit überträgt sich die Kompaktheit von S^2 auf $\mathbb{C}_\infty$).
Dabei gilt $\chi(z,\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$ für $z \neq \infty$ ([Ü]), also ergibt sich für eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$

$$\chi(z_n, \infty) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(d. h. $z_n \to \infty$ in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$) genau dann, wenn $|z_n| \to \infty \, (n \to \infty)$.
Da $\varphi : (\mathbb{C}, d_{|\cdot|}) \to (S^2 \setminus \{(0,0,1)\}, d_{||\cdot||_2})$ ein Homöomorphismus ist, gilt für $z \in \mathbb{C}$ zudem $|z_n - z| \to 0$ genau dann, wenn $\chi(z_n, z) \to 0$. Außerdem ist $M \subset \mathbb{C}$ genau dann offen in $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, wenn M offen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist.
Ist also $a \in \mathbb{C}$ und ist $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph auf einer offenen Umgebung U von a mit Pol an der Stelle a, so kann f durch $f(a) := \infty$ zu einer stetigen Funktion $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ fortgesetzt werden. (Man beachte: Nach S. 5.5 gilt

$$f(z) \to \infty \qquad (z \to a)$$

in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$).

Bemerkung und Definition 5.8 1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ heißt *meromorph* in Ω, falls

$$P(f) := \{z \in \Omega : f(z) = \infty\} = f^{-1}(\{\infty\})$$

keinen Häufungspunkt in Ω hat, $f \in H(\Omega \setminus P(f))$ gilt und f an allen Stellen $z \in P(f)$ Pole hat (d. h. f ist stetig auf ganz Ω). Wir schreiben

$$M(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty : f \text{ meromorph in } \Omega\}.$$

Ist $A \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω und ist $f \in H(\Omega \setminus A)$ mit Polen an allen $a \in A$, so kann man f durch $f(a) := \infty$ $(a \in A)$ (eindeutig) zu einer auf Ω meromorphen Funktion fortsetzen. Daher spricht man auch in diesem Fall von einer in Ω meromorphen Funktion.
2. Setzt man $1/\infty := 0$ und $1/0 := \infty$, so ist die Abbildung $z \mapsto 1/z$ eine Isometrie auf $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ([Ü]) und damit insbesondere stetig. Hieraus ergibt sich (wieder [Ü]): Ist G ein Gebiet, so gilt

$$f \in M(G) \setminus \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad 1/f \in M(G) \setminus \{0\}$$

mit $P(f) = Z(1/f)$ und $Z(f) = P(1/f)$.

Beispiel 5.9 1. Die Funktionen cot und tan sind meromorph in $\mathbb{C}$ (vgl. B. 5.6). Man beachte dabei: $P(\tan) = \{(k+1/2)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ und $P(\cot) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ haben keine Häufungspunkte in $\mathbb{C}$.

2. Es sei $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ definiert durch

$$f(z) = \sin(1/z) \qquad \big(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\big)$$

Dann ist $1/f$ meromorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Polstellenmenge

$$P(1/f) = Z(f) = \{1/(k\pi) : k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0\}.$$

Bleibt noch, das Verhalten in der Nähe von wesentlichen Singularitäten zu charakterisieren. Bitte schön:

Satz 5.10 *(Casorati-Weierstrass)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann sind äquivalent:

a) f hat an a eine wesentliche Singularität.

b) Für alle offenen Umgebungen U von a in Ω ist $f(U \setminus \{a\})$ (offen und) dicht in $\mathbb{C}$.

c) Zu jedem $w \in \mathbb{C}$ existiert eine Folge (z_n) in $\Omega \setminus \{a\}$ mit $z_n \to a$ und $f(z_n) \to w$ für $n \to \infty$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Nach S. 3.8 ist $f(U \setminus \{a\})$ offen. Angenommen, es existiert eine offene Umgebung U von a mit

$$\overline{f(U \setminus \{a\})} \neq \mathbb{C}\,.$$

Dann existieren ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$ so, dass $|f(z) - w| \geq \delta$ für alle $z \in U \setminus \{a\}$ gilt. Wir definieren $g : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

Dann ist $g \in H(U \setminus \{a\})$ mit $|g(z)| \leq 1/\delta$ für alle $z \in U, z \neq a$. Also hat g an a eine hebbare Singularität nach S. 5.3 (wir schreiben auch für die Fortsetzung wieder g). Dann ist $1/g \in M(U)$ und damit auch $f = w + 1/g \in M(U)$ (mit $w + \infty := \infty$). Damit hat f an a eine hebbare Singularität oder einen Pol. Widerspruch!
b) $\Rightarrow$ c): Ist $w \in \mathbb{C}$, so existiert zu jeden $n \in \mathbb{N}$ ein z_n mit $0 < |z_n - a| < 1/n$ und $|f(z_n) - w| < 1/n$. Damit gilt $z_n \to a$ und $f(z_n) \to w$ für $n \to \infty$.
c) $\Rightarrow$ a): Gilt die Bedingung c), so ist f unbeschränkt in jeder Umgebung von a, und es gilt sicher nicht $|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$. Folglich hat f an a weder eine hebbare Singularität noch einen Pol (S. 5.3 bzw. S. 5.5). Also hat f an a eine wesentliche Singularität. $\square$

Beispiel 5.11 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = e^{1/z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Für die Folge $(-1/n)$ gilt $f(-1/n) = e^{-n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Ist $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ und $w = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$, so gilt für die Folge

$$z_n = \big(\ln r + i(\varphi + 2n\pi)\big)^{-1}$$

$z_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und

$$f(z_n) = e^{\ln r + i(\varphi + 2n\pi)} = re^{i\varphi} = w\,.$$

Also gilt hier sogar $f(z_n) = w$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und damit natürlich insbesondere $f(z_n) \to w$ $(n \to \infty)$). Es ist also hier tatsächlich

$$f(U \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für alle Umgebungen U von 0, d.h. in jeder (noch so kleinen) Umgebung von 0 wird jeder Wert $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (unendlich oft) als Funktionswert angenommen!

Bemerkung 5.12 Eine ganze Funktion f heißt *transzendent*, falls f kein Polynom ist. Durch Übertragung des Satzes von Casorati-Weierstrass sieht man: Ist f transzendent, so existiert zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|z_n| \to \infty$ und $f(z_n) \to w\,(n \to \infty)$. (Denn: Es sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ $(z \in \mathbb{C})$. Dann hat $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = f\Big(\frac{1}{z}\Big) \qquad (z \neq 0)\,,$$

die Laurent-Entwicklung

$$g(z) = a_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu z^{-\mu} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Da $a_\mu \neq 0$ für ∞ viele μ gilt (beachte: f ist kein Polynom), hat g an 0 eine wesentliche Singularität nach B./D. 5.1. Also existiert nach S. 5.10 zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge (ζ_n) in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\zeta_n \to 0$ und $g(\zeta_n) \to w\,(n \to \infty)$. Die Folge (z_n) mit $z_n = 1/\zeta_n$ erfüllt dann $|z_n| \to \infty$ und $f(z_n) \to w\,(n \to \infty)$.)

6 Cauchy Theorem und Residuensatz

In den vorherigen Abschnitten haben wir die Cauchysche Integralformel für Kreise und den Cauchyschen Integralsatz auf sternförmigen Gebieten kennengelernt. Wir wollen nun eine gemeinsame Verallgemeinerung herleiten.

Bemerkung und Definition 6.1 Es seien $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ eine Kette und $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt die Funktion $C_\gamma f : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(C_\gamma f)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \Big(= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\iota \in I} \int\limits_{\alpha_\iota}^{\beta_\iota} \frac{f(\gamma_\iota(t))}{\gamma_\iota(t) - z} \gamma_\iota'(t)\, dt \Big) \qquad (z \notin \gamma^*)$$

Cauchy-Integral von f bzgl. γ. Im Fall $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ ergibt sich dabei die Cauchy Transformierte aus B. 1.9. Nach S. 1.7 ist $C_\gamma f \in H(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$. Außerdem gilt für $z \notin \gamma^*$

$$|(C_\gamma f)(z)| \leq \frac{1}{2\pi} ||f||_{\infty, \gamma^*} L(\gamma) \frac{1}{\mathrm{dist}(z, \gamma^*)} \to 0 \qquad (|z| \to \infty)\ .$$

Bemerkung 6.2 Ist $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$, so gilt für alle f, die holomorph auf einer Umgebung von $U_R[z_0]$ sind,

$$(C_{K_R(z_0)} f)(z) := (C_\gamma f)(z) = \begin{cases} f(z), & \text{falls } |z - z_0| < R \\ 0, & \text{falls } |z - z_0| > R \end{cases} .$$

nach der Cauchyschen Integralformel für Kreise (B. 3.11) und dem Cauchyschen Integralsatz (S. 3.15) (man beachte: für $|z - z_0| > R$ ist dann auch $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ holomorph auf einer (o. E. sternförmigen) Umgebung von $U_R[z_0]$).

Definition 6.3 Eine Kette $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ nennen wir einen *Zyklus*, falls eine Zerlegung $(I_\kappa)_{\kappa \in M}$ von I so existiert, dass $(\gamma_\iota)_{\iota \in I_\kappa}$ für alle $\kappa \in M$ ein geschlossener Pfad ist. Weiter heißt für Zyklen γ

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) := (C_\gamma 1)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*)$$

Index (oder auch *Windungszahl*) von z bzgl. γ.

Beispiel 6.4 Ist γ wie in B. 6.2, so gilt

$$\mathrm{ind}_{K_R(z_0)}(z) := \mathrm{ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |z - z_0| < R \\ 0, & \text{falls } |z - z_0| > R \end{cases} .$$

Der folgende Satz zeigt, dass allgemeiner der Index lokal konstant und ganzzahlig ist. Man beachte dabei, dass für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{C}$ die offene Menge $\mathbb{C} \setminus K$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente hat.

Satz 6.5 *Es sei γ ein Zyklus. Dann ist* $\mathrm{ind}_\gamma(\mathbb{C} \setminus \gamma^*) = W(\mathrm{ind}_\gamma) \subset \mathbb{Z}$*. Außerdem gilt* $\mathrm{ind}_\gamma \equiv \mathrm{const}$ *auf jeder Komponente von* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ *und* $\mathrm{ind}_\gamma \equiv 0$ *auf der unbeschränkten Komponente von* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$*.*

Beweis.
1. Es sei zunächst $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein C^1-Weg. Dann ist

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*).$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ definieren wir $\varphi = \varphi_z : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(t) := \exp\Big(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \Big) \qquad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Mit der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\ ,$$

also

$$\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t) = 0$$

für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Weiter ist

$$\Big(\frac{\varphi}{\gamma - z} \Big)' = \frac{\varphi'(\gamma - z) - \varphi\gamma'}{(\gamma - z)^2}$$

auf $[\alpha, \beta]$. Also existiert eine Konstante c mit

$$\varphi(t) = c(\gamma(t) - z) \qquad (t \in [\alpha, \beta])\ .$$

Aus $\varphi(\alpha) = 1$ ergibt sich $c = 1/(\gamma(\alpha) - z)$, also

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(\alpha) - z} \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

2. Wir zeigen, dass $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ganzzahlig ist. Es reicht, die Behauptung für geschlossene Pfade $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ zu beweisen. Dazu sei $\varphi_\iota = \varphi_{\iota,z}$ wie in 1. mit γ_ι statt γ. Da γ ein geschlossener Pfad ist, gilt mit 1.

$$\exp(2\pi i\, \mathrm{ind}_\gamma(z)) = \prod_{\iota \in I} \exp\Big(\int_{\gamma_\iota} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \Big) = \prod_{\iota \in I} \varphi_\iota(\beta_\iota) = \prod_{\iota \in I} \frac{\gamma_\iota(\beta_\iota) - z}{\gamma_\iota(\alpha_\iota) - z} = 1$$

und damit $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.
3. Es sei G eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Da G zusammenhängend und $\operatorname{ind}_\gamma$ stetig und ganzzahlig auf G ist, ist $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv$ const in G nach S. A.5. Außerdem gilt nach B./D. 6.1

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) \to 0 \qquad (|z| \to \infty)\,.$$

Also ist $|\operatorname{ind}_\gamma(z)| < 1$ für $|z|$ genügend groß. Da $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv$ const auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ist, ist $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ dort. □

Definition 6.6 Es sei γ ein Zyklus. Dann heißt

$$\operatorname{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : \operatorname{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$$

Inneres von γ und

$$\operatorname{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : \operatorname{ind}_\gamma(z) = 0\}$$

Äußeres von γ. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein Zyklus in Ω, so heißt γ *nullhomolog* in Ω (oder Ω-*nullhomolog*), falls $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in \Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ ist, d. h. falls $\Omega^c \subset \operatorname{Ext}(\gamma)$.

Satz 6.7 *(Cauchy Theorem)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist γ ein Zyklus in Ω, so sind folgende Aussagen äquivalent:

a) γ ist nullhomolog in Ω.

b) Für alle $f \in H(\Omega)$ ist $f \cdot \operatorname{ind}_\gamma|_{\Omega\setminus\gamma^*} = C_\gamma f|_{\Omega\setminus\gamma^*}$ d. h. für $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ gilt

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = (C_\gamma f)(z)$$

(Cauchysche Integralformel).

c) Für alle $f \in H(\Omega)$ ist

$$\int\limits_\gamma f = 0.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) Es seien Φ wie in S. B.3. Für $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ ist

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z)\operatorname{ind}_\gamma(z) = (C_\gamma f)(z) - f(z)\operatorname{ind}_\gamma(z).$$

Also reicht es, $\Phi \equiv 0$ zu zeigen.
Zunächst ist $C_\gamma f$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ nach B./D. 6.1 mit $\Phi(z) = (C_\gamma f)(z)$ für alle $z \in \Omega \cap \operatorname{Ext}(\gamma)$. Weiter ist nach Voraussetzung $\partial\Omega \subset \Omega^c \subset \operatorname{Ext}(\gamma)$. Damit ist durch

$$F(z) := \begin{cases} \Phi(z), & z \in \Omega \\ (C_\gamma f)(z), & z \in \Omega^c \end{cases}$$

eine ganze Funktion F definiert. Aus $F(z) = (C_\gamma f)(z)$ für $z \in \operatorname{Ext}(\gamma)$ ergibt sich zudem (wieder mit B./D. 6.1)

$$F(z) = (C_\gamma f)(z) \to 0 \qquad (|z| \to \infty).$$

Mit dem Satz von Liouville folgt, dass F konstant ist und damit auch $F \equiv 0$ in $\mathbb{C}$. Also gilt für alle $z \in \Omega$

$$\Phi(z) = F(z) = 0.$$

b) $\Rightarrow$ c) Es sei $z_0 \in \Omega \setminus \gamma^*$. Dann gilt mit b), angewandt auf $f_0 : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f_0(z) = (z - z_0)f(z)$:

$$0 = 2\pi i f_0(z_0) \cdot \operatorname{ind}_\gamma(z_0) = \int_\gamma \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \int_\gamma f\,.$$

c) $\Rightarrow$ a) Folgt aus $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z} \in H(\Omega)$ für alle $z \notin \Omega$. □

Bemerkung und Definition 6.8 1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Beschränkte (nichtleere) Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ heißen *Löcher* von Ω. Ist γ ein beliebiger Zyklus in Ω so, dass kein Loch von Ω in $\operatorname{Int}(\gamma)$ liegt, so ist γ nullhomolog in Ω.
(Denn: $\operatorname{ind}_\gamma$ ist stetig und ganzzahlig auf $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, also insbesondere auf Ω^c. Da $\operatorname{ind}_\gamma$ konstant auf jeder Komponente A von Ω^c ist, liegt eine Komponente entweder ganz in $\operatorname{Int}(\gamma)$ oder ganz in $\operatorname{Ext}(\gamma)$. Also liegen alle beschränkten Komponenten (falls existent) in $\operatorname{Ext}(\gamma)$. Aus $\operatorname{ind}_\gamma(z) \to 0$ für $z \to \infty$ folgt $\operatorname{ind}_\gamma \equiv 0$ auch auf allen unbeschränkten Komponenten.)
2. Ein Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, falls G keine Löcher hat. Dann ist nach Definition jeder geschlossene Pfad in G auch nullhomolog in G.

Satz 6.9 *Es seien G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in H(G)$.*

1. *Für alle geschlossenen Pfade γ in G gilt $\operatorname{ind}_\gamma \cdot f|_{G \setminus \gamma^*} = C_\gamma f|_{G \setminus \gamma^*}$ (Cauchysche Integralformel) und $\int_\gamma f = 0$ (Cauchyscher Integralsatz).*
2. *Die Funktion f hat eine Stammfunktion in G.*

Beweis. Da jeder geschlossene Pfad in G nullhomolog in G ist, ergibt sich 1. aus dem Cauchy Theorem. Mit S. 3.13 folgt damit auch 2. □

Wir wollen nun den Residuensatz beweisen, ein Ergebnis, das man wiederum als Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel und des Cauchyschen Integralsatzes auffassen kann. Im Weiteren werden wir den Satz u. a. nutzen, um gewisse (z. T. reelle) Integrale bequem zu berechnen. Zunächst zum Begriff des Residuums.

Definition 6.10 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in \Omega$. Ist $R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ und ist $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, so heißt der (-1)-te Laurent-Koeffizient a_{-1} der Laurent-Entwicklung von f in $V_{0,R}(a)$ *Residuum* von f an der Stelle a. Wir schreiben

$$\operatorname{res}_f(a) := a_{-1}\Big(= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = \rho} f(\zeta) d\zeta \ \text{ für } 0 < \rho < R \Big).$$

Beispiel 6.11 (vgl. B. 5.2)
1. Hat f an a eine hebbare Singularität, so gilt $\operatorname{res}_f(a) = 0$.
2. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $f(z) = e^z/z^p$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Dann gilt

$$\operatorname{res}_f(0) = \frac{1}{(p-1)!}.$$

3. Für

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} z^{-\mu} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

gilt $\operatorname{res}_f(0) = 1$.

Satz 6.12 *(Residuensatz)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein nullhomologer Zyklus in Ω. Ist f holomorph in $\Omega \setminus A$ für eine Menge $A \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω und ist $\gamma^* \cap A = \emptyset$, so gilt

$$\int\limits_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{w \in A \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{res}_f(w)\,. \tag{6.1}$$

Beweis. Es sei $A_\gamma := A \cap \operatorname{Int}(\gamma)$. Dann ist A_γ endlich ([Ü]; man beachte: $\operatorname{Int}(\gamma) \cup \gamma^* \subset \Omega$ ist kompakt). Wir setzen $\Omega_\gamma := (\Omega \setminus A) \cup A_\gamma$. Nach Voraussetzung und nach Definition von A_γ ist γ auch nullhomolog in Ω_γ. O. E. können wir $A_\gamma \neq \emptyset$ annehmen (für $A_\gamma = \emptyset$ ergibt sich die Behauptung aus dem Cauchy Theorem).
Wir wählen $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(w) \subset \operatorname{Int}(\gamma)$ für alle $w \in A_\gamma$ und

$$|w - \tilde{w}| > 2\delta$$

für alle $w, \tilde{w} \in A_\gamma$, $w \neq \tilde{w}$ gilt. Dann hat f für alle $w \in A_\gamma$ nach S. 4.12 eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(w)(z - w)^\nu$$

in $V(w) := V_{0,\delta}(w)$. Der Hauptteil

$$h_w(z) := \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu}(w)(z - w)^{-\mu}$$

konvergiert lokal gleichmäßig auf $V_{0,\infty}(w) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$ (vgl. D./B. 4.13) und ist damit holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ nach S. 2.12. Weiter folgt für $w \in A_\gamma$

$$\int_\gamma h_w(\zeta)d\zeta = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu}(w) \int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - w)^\mu} = a_{-1}(w) \cdot 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(w) = 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{res}_f(w)\,.$$

(Man beachte dabei: Für $\mu > 1$ ist $\int_\gamma (\zeta - w)^{-\mu} d\zeta = 0$ nach B. 3.14.)

Die Funktion $g : \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$

$$g(z) := f(z) - \sum_{w \in A_\gamma} h_w(z) \qquad (z \in \Omega \setminus A)$$

ist holomorph in $\Omega \setminus A$, und für $w \in A_\gamma$ gilt in $V(w)$

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(w)(z - w)^\nu - \sum_{\tilde{w} \in A_\gamma,\, w \neq \tilde{w}} h_{\tilde{w}}(z)\,.$$

Da die rechte Seite holomorph in $U_\delta(w)$ ist, hat g an w eine hebbare Singularität. Also ist g holomorph fortsetzbar nach Ω_γ. Da γ nullhomolog in Ω_γ ist, ergibt sich

$$\int_\gamma g = 0$$

aus dem Cauchy Theorem. Folglich ist

$$0 = \int_\gamma f - \sum_{w \in A_\gamma} \int_\gamma h_w = \int_\gamma f - 2\pi i \sum_{w \in A_\gamma} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{res}_f(w)\,.$$

□

Bemerkung 6.13 1. Sind G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in H(G \setminus A)$ für eine Menge $A \subset G$ ohne Häufungspunkt in G, so gilt (6.1) nach B. 6.8 für alle geschlossenen Pfade γ in $G \setminus A$.

2. Im Falle $A = \emptyset$ ergibt (6.1) wieder $\int_\gamma f = 0$ für alle in Ω nullhomologen Zyklen γ und alle $f \in H(\Omega)$. Auch die Cauchysche Integralformel ergibt sich als Spezialfall von (6.1) (angewandt auf $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ mit $A = \{z\}$; [Ü]).

7 Anwendungen des Residuensatzes

Um den Residuensatz anwenden zu können, ist es wichtig, Techniken zur Berechnung von Residuen zur Verfügung zu haben. Für Pole gilt:

Satz 7.1 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$.*

1. *Hat f an a einen Pol der Ordnung p, so ist*

$$\operatorname{res}_f(a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \big((\cdot - a)^p f\big)^{(p-1)}(z)\,.$$

2. *Existieren eine offene Umgebung U von a und Funktionen $g, h \in H(U)$ mit $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ und $f = g/h$ in $U \setminus \{a\}$, so gilt*

$$\operatorname{res}_f(a) = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

Beweis. 1. Es gilt für $z \in V_{0,R}(a)$, wobei $R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$,

$$(z-a)^p f(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-p}(z-a)^\nu =: \varphi(z)\,.$$

Dabei ist die rechte Seite φ holomorph in $U_R(a)$. Also ist $a_{\nu-p} = \varphi^{(\nu)}(a)/\nu!$ und damit insbesondere

$$\operatorname{res}_f(a) = a_{-1} = \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \varphi^{(p-1)}(z)\,.$$

2. Ist $g(a) \neq 0$, so hat nach Voraussetzung h/g eine Nullstelle der Ordnung 1 an a, also hat f einen Pol der Ordnung 1 an a. Nach 1. ist

$$\operatorname{res}_f(a) = \lim_{z \to a} (z-a) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to a} g(z) \lim_{z \to a} \frac{1}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

Ist $g(a) = 0$, so hat g/h eine hebbare Singularität an a, da h eine Nullstelle der Ordnung 1 an a hat ([Ü]). Also ist dann $\operatorname{res}_f(a) = 0$ (B. 6.11.1). □

Beispiel 7.2 1. Es sei $f(z) = \cot z = \cos z / \sin z$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$). Dann gilt mit $g(z) = \cos z, h(z) = \sin z$ nach S. 7.1.2

$$g(k\pi) = (-1)^k, \qquad h(k\pi) = 0, \qquad h'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

und damit

$$\operatorname{res}_f(k\pi) = \frac{g(k\pi)}{h'(k\pi)} = 1 \qquad (k \in \mathbb{Z})\,.$$

2. Es sei $f(z) = 1/(1+z^2)$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\})$. Dann gilt mit $g(z) = 1$, $h(z) = 1 + z^2$ nach S. 7.1.2

$$\mathrm{res}_f(\pm i) = \pm \frac{1}{2i}\,.$$

Dies sieht man auch leicht direkt mittels Partialbruchzerlegung: Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\Big)\,,$$

also

$$\mathrm{res}_f(i) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - i| = 1} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - i| = 1} \frac{d\zeta}{\zeta - i} = \frac{1}{2i}$$

(und entsprechend für $-i$).

3. Es sei $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ $(z \neq \pm i)$. Dann hat f an $\pm i$ Pole der Ordnung 2. Es gilt nach S. 7.1.1

$$\mathrm{res}_f(i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\big((z-i)^2 f(z)\big) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{(z+i)^2}\Big) = \lim_{z \to i} -\frac{2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i}\,.$$

Wir werden nun zeigen, dass man den Residuensatz insbesondere dafür nutzen kann, uneigentliche Integrale der Form $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ zu berechnen. Allgemeiner betrachten wir sogenannte Cauchy-Hauptwerte solcher Integrale.

Bemerkung und Definition 7.3 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Existiert der Grenzwert $c := \lim\limits_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$, so heißt c der *Cauchy-Hauptwert* des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Man schreibt dann auch

$$C - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f := C - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := c.$$

Aus den jeweiligen Definitionen folgt: Existiert $\int_{-\infty}^{\infty} f$, so gilt $C - \int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{\infty} f$.

Vorbereitend für den folgenden Satz betrachten wir geeignete geschlossene Pfade.

Bemerkung 7.4 Für $R > 0$ seien $\sigma_R(t) := t$ $(t \in [-R, R])$, $\tau_R^+ := Re^{it}$ $(t \in [0, \pi])$ und $\tau_R^-(t) := Re^{it}$ $(t \in [-\pi, 0])$. Dann sind $\gamma_R^+ := (\tau_R^+, \sigma_R)$ und $\gamma_R^- := (\tau_R^-, -\sigma_R)$ geschlossene Pfade in $\mathbb{C}$ und für f stetig auf $K_R(0) \cup [-R, R]$ gilt

$$\int\limits_{\gamma_R^+} f + \int\limits_{\gamma_R^-} f = \int\limits_{(\tau_R^+, \sigma_R, \tau_R^-, -\sigma_R)} f = \int\limits_{(\tau_R^+, \tau_R^-)} f = \int\limits_{K_R(0)} f$$

Insbesondere ist für $z \in U_R(0)$ mit $\mathrm{Im}(z) > 0$ (da $z \in \mathrm{Ext}(\gamma_R^-)$)

$$\mathrm{ind}_{\gamma_R^+}(z) = \mathrm{ind}_{K_R(0)}(z) - \mathrm{ind}_{\gamma_R^-}(z) = 1\,.$$

Satz 7.5 *Es sei* $E := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, *und es sei* $A \subset E^0$ *endlich. Ferner sei* $f \in H(\Omega \setminus A)$ *für eine offene Menge* $\Omega \supset E$.

1. *Existiert*
$$g := \lim_{R\to\infty} \int_{\tau_R^+} f \,,$$
so existiert $C - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *und es gilt*
$$C - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; 2\pi i \Big(\sum_{w\in A} \mathrm{res}_f(w) \Big) - g \,.$$

2. *Existiert ein* $\alpha > 1$ *mit* $|f(z)| = O(1/|z|^\alpha)$ *für* $|z| \to \infty$, $z \in E$, *so ist* f *absolut integrierbar auf* $\mathbb{R}$ *mit*
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; 2\pi i \sum_{w\in A} \mathrm{res}_f(w) \,.$$

Beweis.
1. Es sei $R_0 > 0$ so, dass $A \subset U_{R_0}(0)$. Für $R \geq R_0$ betrachten wir den geschlossenen Pfad γ_R^+ aus B. 7.4. Aus dem Residuensatz und B. 7.4 folgt (beachte: $\Omega^c \subset \mathrm{Ext}(\gamma_R^+)$)
$$\int_{\gamma_R^+} f = 2\pi i \sum_{w\in A} \mathrm{res}_f(w) \qquad \text{für alle } R \geq R_0.$$
Also erhalten wir
$$\int_{-R}^{R} f = \int_{\gamma_R^+} f - \int_{\tau_R^+} f \to 2\pi i \Big(\sum_{w\in A} \mathrm{res}_f(w) \Big) - g$$
für $R \to \infty$.
2. Nach Voraussetzung existieren Konstanten $M, R_0 > 0$ mit $|f(z)| \leq M/|z|^\alpha$ für $|z| \geq R_0$, $z \in E$ (und wieder $A \subset U_{R_0}(0)$). Aus der Existenz des Integrals $\int_1^\infty dx/x^\alpha$ folgt die absolute Integrierbarkeit von f auf $\mathbb{R}$ (man beachte dabei: f ist stetig auf $\mathbb{R}$). Insbesondere existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f$ und stimmt mit dem Cauchy-Hauptwert überein. Außerdem gilt für $R \geq R_0$ (vgl. B. 3.11.2 und B. 3.12.2)
$$\Big| \int_{\tau_R^+} f \Big| \leq \int |f| \, |d\tau_R^+| = \int_0^\pi |f(Re^{it})| R dt \leq \pi M R^{1-\alpha} \to 0 \quad (R \to \infty).$$
Also ist die Voraussetzung aus 1. mit $g = 0$ erfüllt. Damit ergibt sich 2. aus 1. □

Bemerkung 7.6 Insbesondere lässt sich S. 7.5.2 bei Integranden der Form

$$e^{icx}\,\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \cos(cx)\,\frac{P(x)}{Q(x)} \;+\; i\,\sin(cx)\,\frac{P(x)}{Q(x)}$$

anwenden, wobei $c \ge 0$ ist und P und Q (reelle) Polynome sind mit $\deg(Q) \ge \deg(P) + 2$ und $Q(x) \ne 0$ für $x \in \mathbb{R}$.
(Denn: Es sei

$$A := Z(Q) \cap E^0$$

die Menge der Nullstellen von Q in der oberen Halbebene E^0.
Wir betrachten $\Omega := (\mathbb{C} \setminus Z(Q)) \cup A$ und $f \in H(\Omega \setminus A)$, definiert durch

$$f(z) := e^{icz}\,\frac{P(z)}{Q(z)} \qquad (z \notin Z(Q)).$$

Dann gilt

$$|f(z)| = \underbrace{e^{-c\,\mathrm{Im}\,z}}_{\le 1}\,\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \;\le\; \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} = O\Big(\frac{1}{|z|^2}\Big) \quad (|z| \to \infty,\, z \in E).$$

Also sind die Voraussetzungen von S. 7.5.2 erfüllt.)

Beispiel 7.7 Für $c \ge 0$ sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{e^{icz}}{1+z^2} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\})\,.$$

Dann ist f wie in B. 7.6. Also gilt nach S. 7.5.2 (man beachte, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(cx)/(1+x^2)\,dx = 0$$

gilt, da der Integrand ungerade ist)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(cx)}{1+x^2}\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{icx}}{1+x^2}\,dx \;=\; 2\pi i\,\mathrm{res}_f(i)\,.$$

Weiter ist (etwa nach S. 7.1.2)

$$\mathrm{res}_f(i) = \frac{e^{icz}}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{e^{-c}}{2i}\,,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(cx)}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-c}\,.$$

Eine weitere interessante Klasse von Integralen, die mittels des Residuensatzes oft leicht berechnet werden können, sind Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t)dt \qquad \text{bzw.} \qquad \int_0^{2\pi} f(\sin t)dt\,,$$

wobei f eine rationale Funktion ist. Wir definieren für $z \neq 0$

$$j(z) := \frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\,, \qquad k(z) := \frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big).$$

Dann ist $\cos t = j(e^{it})$ und $\sin t = k(e^{it})$ für $t \in [0, 2\pi]$. Also ergibt sich, falls f stetig auf $[-1, 1]$ ist,

$$\int_{|\zeta|=1} f(j(\zeta))\frac{d\zeta}{i\zeta} = \int_0^{2\pi} f(\cos t)dt \tag{7.1}$$

bzw.

$$\int_{|\zeta|=1} f(k(\zeta))\frac{d\zeta}{i\zeta} = \int_0^{2\pi} f(\sin t)dt \tag{7.2}$$

Dies beweist schon im Wesentlichen folgenden

Satz 7.8 *Es sei f eine rationale Funktion.*

1. *Hat $f^*(z) := f(j(z))/z$ keine Pole auf $\mathbb{S}$, so gilt*

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t)dt = 2\pi \sum_{w\in P(f^*)\cap\mathbb{D}} \operatorname{res}_{f^*}(w)\,.$$

2. *Hat $f^{**}(z) := f(k(z))/z$ keine Pole auf $\mathbb{S}$, so gilt*

$$\int_0^{2\pi} f(\sin t)dt = 2\pi \sum_{w\in P(f^{**})\cap\mathbb{D}} \operatorname{res}_{f^{**}}(w)\,.$$

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus (7.1) bzw. (7.2) und dem Residuensatz, angewandt (mit $\Omega = \mathbb{C}$) auf f^* bzw. f^{**} sowie $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). □

Beispiel 7.9 1. Für $0 < \rho < 1$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2}\,.$$

Ist
$$f(u) = \frac{1}{1 - 2\rho u + \rho^2}$$
und
$$f^*(z) = \frac{1}{z} f\Big(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\Big) \;=\; \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \rho(z + 1/z) + \rho^2} \;=\; \frac{1}{(z-\rho)(1-\rho z)}\,,$$
so hat f^* die beiden einfachen Pole $\rho < 1$ und $1/\rho > 1$. Also gilt nach S. 7.8 und S. 7.1.1
$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2} = 2\pi \cdot \mathrm{res}_{f^*}(\rho) = 2\pi \cdot \frac{1}{1-\rho z}\Big|_{z=\rho} \;=\; \frac{2\pi}{1-\rho^2}\,.$$
Für die Funktion
$$P(\rho, t) := \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2} \quad (0 < \rho < 1, 0 \le t \le 2\pi)$$
folgt also
$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P(\rho, t)dt = 1$$
für alle ρ. Diese Funktion, der sogenannte Poisson-Kern, spielt eine wichtige Rolle in der Theorie harmonischer Funktionen.

2. Für $p \in \mathbb{N}$ und $c > 1$ betrachten wir das Integral
$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(c + \cos t)^p}\,.$$
Hier ist
$$f(u) = \frac{1}{(c+u)^p}\,,$$
also
$$f^*(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(c + (z + 1/z)/2)^p} = \frac{2^p z^{p-1}}{(z^2 + 2cz + 1)^p} = \frac{2^p z^{p-1}}{(z - w_1)^p (z - w_2)^p}$$
mit $w_1 = -c + \sqrt{c^2 - 1} \in (-1, 0)$ und $w_2 = -c - \sqrt{c^2 - 1} < -1$.
Also ergibt sich aus S. 7.8 und S. 7.1.1
$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(c + \cos t)^p} = 2\pi \cdot \mathrm{res}_{f^*}(w_1) = \frac{2\pi}{(p-1)!}\, \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \Big(\frac{2^p z^{p-1}}{(z - w_2)^p}\Big)\Big|_{z=w_1}\,.$$
Für $p = 1$ erhalten wir
$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{c + \cos t} \;=\; 2\pi \cdot \frac{2}{w_1 - w_2} \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}\,,$$

und für $p = 2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(c+\cos t)^2} &= 2\pi \cdot \frac{d}{dz}\Big(\frac{4z}{(z-w_2)^2}\Big)\Big|_{z=w_1} \\ &= 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{-w_1 - w_2}{(w_1-w_2)^3} = \frac{2\pi c}{\sqrt{c^2-1}^3}\,.\end{aligned}$$

Wir kommen zum Schluss dieses Abschnittes zu zwei interessanten funktionentheoretischen Anwendungen des Residuensatzes.

Satz 7.10 *(Argumentprinzip)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein nullhomologer Zyklus in G. Ist $f \not\equiv 0$ meromorph in G und ist $\gamma^* \cap A(f) = \emptyset$, wobei $A(f) := Z(f) \cup P(f)$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w \in A(f)\cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ind}_\gamma(w)\cdot n_f(w)$$

mit $n_f(w) := -p$, falls w eine Polstelle der Ordnung p ist.

Beweis. 1. Ist a eine Nullstelle von f der Ordnung $n := n_f(a)$, so existiert eine in einer offenen Umgebung U von a holomorphe Funktion g mit $g(z) \neq 0$ in U und

$$f(z) = (z-a)^n g(z) \qquad (z \in U)\,.$$

Also folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \text{in } U \setminus \{a\}\,,$$

d.h. f'/f hat an a einen Pol der Ordnung 1, und es gilt

$$\mathrm{res}_{f'/f}(a) = n\,.$$

Ist a ein Pol der Ordnung p von f, so hat $h := 1/f$ eine Nullstelle der Ordnung p an a. Also ist $\mathrm{res}_{h'/h}(a) = p$. Weiter gilt auf $\Omega \setminus A(f)$

$$h'/h = -f'/f\,,$$

also $\mathrm{res}_{f'/f}(a) = -p$.
2. Ist γ ein nullhomologer Zyklus in G mit $\gamma^* \cap A(f) = \emptyset$, so gilt nach dem Residuensatz und 1. (man beachte: $A(f)$ hat keine Häufungspunkte in G)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w \in A(f)\cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ind}_\gamma(w)\cdot n_f(w)\,.$$

$\square$

Bemerkung und Definition 7.11 Wir nennen einen geschlossenen Pfad γ *einfach geschlossen*, falls $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 1$ für alle $z \in \operatorname{Int}(\gamma)$. Es seien G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \not\equiv 0$ holomorph in G. Für einfach geschlossene Pfade γ in $G \setminus Z(f)$ ergibt sich aus dem Argumentprinzip

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} \;=\; \sum_{w \in Z(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} n_f(w) =: N_{f,\gamma} \,. \tag{7.3}$$

d.h. das Integral auf der linken Seite „zählt" die Nullstellen von f in $\operatorname{Int}(\gamma)$ (inkl. Vielfachheiten).

Als Folgerung aus dem Argument-Prinzip (bzw. (7.3)) erhalten wir

Satz 7.12 *(Rouché)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es seien $f, g \in H(G)$. Ferner sei γ ein einfach geschlossener Pfad in G so, dass

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \gamma^* \,.$$

Dann hat (neben f) auch g keine Nullstellen auf γ^* und es gilt $N_{f,\gamma} = N_{g,\gamma}$, d. h. f und g haben die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\operatorname{Int}(\gamma)$ (inkl. Vielfachheiten).

Beweis. Für $t \in [0, 1]$ betrachten wir die Funktionen $\varphi_t \in H(G)$ mit

$$\varphi_t := f + t(g - f) = f - th$$

mit $h := f - g$. Für $z \in \gamma^*$ gilt

$$|\varphi_t(z)| \geq |f(z)| - t|h(z)| \geq |f(z)| - |h(z)| > 0 \,,$$

so dass φ_t auf γ^* keine Nullstellen hat. Dies gilt also insbesondere für $g = \varphi_1$.
Nach (7.3) gilt für $t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi_t'(\zeta)}{\varphi_t(\zeta)} d\zeta \;=\; \sum_{w \in Z(\varphi_t) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} n_{\varphi_t}(w) \;=:\; N(t) \,.$$

Die Funktion $N : [0, 1] \to \mathbb{N}_0$ ist stetig.
(Denn: Sind $t_1, t_2 \in [0, 1]$, so gilt

$$\big|2\pi i\big(N(t_2) - N(t_1)\big)\big| = \Big| \int_\gamma \frac{(t_2 - t_1)(f'h - fh')}{(f - t_1 h)(f - t_2 h)} \Big| \leq |t_2 - t_1| \Big\| \frac{fh' - f'h}{(|f| - |h|)^2} \Big\|_{\infty,\gamma^*} L(\gamma) \,.$$

Dies zeigt die (Lipschitz-)Stetigkeit von N.)
Da $[0, 1]$ zusammenhängend ist, ist $N(t) \equiv \text{const}$ auf $[0, 1]$, also insbesondere

$$N_{g,\gamma} = N(1) = N(0) = N_{f,\gamma} \,.$$

□

Wir geben einige typische Anwendungsbeispiele zum Satz von Rouché.

Beispiel 7.13 1. Wir beweisen noch einmal den Fundamentalsatz der Algebra. Also: Es sei $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{w\in Z(P)} n_P(w) = n$, d.h. P hat n Nullstellen inkl. Vielfachheiten.
(Denn: Ist $Q(z) := a_n z^n$, so gilt für R genügend groß

$$|P(z) - Q(z)| \;=\; \Big|\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu\Big| \;<\; |a_n z^n| \;=\; |Q(z)| \qquad (|z| = R)\,.$$

Also ergibt sich aus S. 7.12 (mit $\gamma(t) = Re^{it}$)

$$\sum_{w\in Z(P)\cap U_R(0)} n_P(w) \;=\; \sum_{w\in Z(Q)\cap U_R(0)} n_Q(w) \;=\; n_Q(0) = n\,.)$$

2. Wir betrachten die (transzendente) Gleichung

$$e^z \;=\; 1 + 2z\,.$$

Wir suchen alle Lösungen in $\mathbb{D}$. Offensichtlich ist $z = 0$ eine Lösung. Mit $f(z) = 2z$ und $g(z) = 1 + 2z - e^z$ gilt für $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| \;=\; |e^z - 1| \;<\; 2 = |f(z)|$$

(beachte: für $|z| \le 1$ gilt

$$|e^z - 1| \;\le\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \;=\; e^{|z|} - 1 \;\le\; e - 1 < 2\,)\,.$$

Also haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\mathbb{D}$, nämlich eine. Folglich ist $z = 0$ die einzige Lösung der Gleichung in $\mathbb{D}$.

Wir studieren zum Abschluss einige Auswirkungen des Satzes von Rouché auf Funktionenfolgen.

Satz 7.14 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es seien $f_n \in H(G)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G. Ist γ ein einfach geschlossener Pfad in $G \setminus Z(f)$, so ist $N_{f_n,\gamma} = N_{f,\gamma}$ für n genügend groß.*

Beweis. Da f stetig auf der kompakten Menge γ^* ist, gilt

$$\delta := \min_{z\in\gamma^*} |f(z)| > 0$$

und da (f_n) gleichmäßig auf γ^* gegen f konvergiert, existiert ein $n_0 = n_0(\delta) > 0$ so, dass

$$\max_{z\in\gamma^*} |f(z) - f_n(z)| < \delta$$

für alle $n \ge n_0$ gilt. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Rouché (S. 7.12). $\square$

Beispiel 7.15 Es sei

$$f(z) = e^z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Dann gilt für die n-ten Teilsummen $s_n(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} z^\nu/\nu!$ nach S. 7.14, angewandt mit $\gamma(t) = Re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$: Für alle $R > 0$ existiert ein $n_0(R)$ so, dass s_n für alle $n \geq n_0(R)$ in $|z| < R$ keine Nullstelle hat (d.h. die Nullstellen, die nach dem Fundamentalsatz der Algebra ja existieren, rücken mit wachsendem n immer weiter „Richtung ∞").

Bemerkung 7.16 Als Folgerung aus S. 7.14 erhalten wir insbesondere: Ist G ein Gebiet und sind $f_n, f \in H(G)$ mit $f_n \to f \not\equiv 0$ lokal gleichmäßig auf G, so existiert zu jedem $z_0 \in G$ ein $r_0 > 0$ so, dass für alle $0 < r < r_0$ die Funktionen f_n für n genügend groß (abhängig von r) in $U_r(z_0)$ genau $n_f(z_0)$ Nullstellen (inkl. Vielfachheiten) haben.
(Denn: Nach S. 1.5 existiert ein $r_0 > 0$ so, dass $f(z) \neq 0$ in $U_{r_0}[z_0] \setminus \{z_0\}$. Damit folgt die Behauptung aus S. 7.14, angewandt auf $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ für $0 < r < r_0$).

Satz 7.17 *(Hurwitz)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge in G holomorpher Funktionen mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G.

1. *Ist $Z(f_n) = \emptyset$ für $n \in \mathbb{N}$, so ist entweder $f \equiv 0$ in G oder es ist $Z(f) = \emptyset$.*

2. *Ist f_n injektiv für $n \in \mathbb{N}$, so ist entweder $f \equiv const$ oder f injektiv.*

Beweis.
1. Ist $f \not\equiv 0$, so ist $n_f(z_0) = 0$ für alle $z_0 \in G$ nach B. 7.16.
2. Es sei f nicht konstant. Wir betrachten $w_0 \in f(G)$ und $z_0 \in G$ mit $f(z_0) = w_0$, d. h. $z_0 \in Z(f - w_0)$. Zu zeigen ist $f(z_1) \neq w_0$ für alle $z_1 \in G$, $z_1 \neq z_0$.
Es sei also $z_1 \neq z_0$. Sind $U_j = U_\delta(z_j) \subset G$ $(j = 0, 1)$ mit $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, so existiert nach B. 7.16 ein n_0 mit $Z(f_n - w_0|_{U_0}) \neq \emptyset$ für $n \geq n_0$. Da f_n injektiv ist, folgt $Z(f_n - w_0|_{U_1}) = \emptyset$ für $n \geq n_0$. Nach 1. ist dann auch $Z(f - w_0|_{U_1}) = \emptyset$, also insbesondere $f(z_1) \neq w_0$. $\square$

8 Konforme Abbildungen

In den vorherigen Abschnitten haben wir an verschiedenen Stellen durch Anwendung der affin-linearen Abbildung $w \mapsto z_0 + Rw$ Resultate vom Einheitskreis $\mathbb{D}$ auf beliebige Kreise $U_R(z_0)$ übertragen. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass man mithilfe von bijektiven holomorphen Abbildungen sogar beliebige einfach zusammenhängende (echte) Teilgebiete von $\mathbb{C}$ „konform“ zum Einheitskreis deformieren kann.
Zunächst betrachten wir dazu (noch einmal) das lokale Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen.

Bemerkung 8.1 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Ferner sei $z_0 \in \Omega$.
Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist f lokal umkehrbar an z_0, d. h. es existiert eine offene Umgebung U von z_0 so, dass $f|_U$ injektiv ist (vgl. B. 3.7). Außerdem ist dann $V = f(U)$ offen (S. 3.8) und die auf V definierte Umkehrfunktion ist holomorph mit nichtverschwindender Ableitung.

Umgekehrt gilt: Ist $f|_U$ injektiv für eine Umgebung U von z_0, so ist schon $f'(z_0) \neq 0$.

(Denn: Nach S. 3.6 kann man U so wählen, dass $f(z) = w_0 + \varphi^m(z) = 0$, wobei und $m \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in H(U)$ mit $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) \neq 0$. Angenommen, $f'(z_0) = 0$. Dann ist $m \geq 2$. Da $\varphi(U)$ eine Umgebung von 0 ist (S. 3.8), existiert ein $w \in \varphi(U)$ mit $we^{2\pi i/m} \in \varphi(U)$. Sind $z_1, z_2 \in U$ mit $\varphi(z_1) = w, \varphi(z_2) = we^{2\pi i/m}$, so ist $f(z_1) = f(z_2)$. Widerspruch.)

Bemerkung und Definition 8.2 Es seien G und D Gebiete in $\mathbb{C}$.
1. Eine bijektive, holomorphe Funktion $\varphi : G \to D$ nennt man auch eine *konforme* Abbildung von G auf D. Nach B. 8.1 ist dann $Z(\varphi') = \emptyset$ und $\varphi^{-1} : D \to G$ ist ebenfalls konform.
2. Die Gebiete G, D heißen *konform äquivalent*, falls eine konforme Abbildung $\varphi : G \to D$ existiert. Nach 1. und der Kettenregel ist durch

$$G \sim D :\Leftrightarrow G, D \text{ konform äquivalent}$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Gebiete in $\mathbb{C}$ definiert.

Beispiel 8.3 1. (Drehungen) Für $\vartheta \in \mathbb{R}$ sei $\varphi(z) = \varphi_\vartheta(z) = e^{i\vartheta}z$ $(z \in \mathbb{D})$. Dann ist $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi(0) = 0$.
2. Es seien $G = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im}(z)| < \pi\}$ und $D = \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Dann ist $\varphi := \exp|_G : G \to D$ konform mit $\varphi^{-1} = \log$ (vgl. B. 3.4).
3. Es seien $G = \mathbb{D}^* := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ und $D := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Dann ist durch

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (z \in G)$$

eine konforme Abbildung $\varphi : G \to D$ definiert (die sogenannte Joukowski-Abbildung; [Ü]).

Bemerkung und Definition 8.4 Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

mit $\det M = ad - bc \neq 0$. Wir setzen $\alpha/\infty := 0$, $\alpha/0 := \infty$ und $\alpha \cdot \infty := \infty$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann heißt die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ mit

$$\varphi(z) := \varphi_M(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \\ \infty, & \text{falls } z = -d/c \\ a/c, & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

eine *Möbius-Transformation*. Jede Möbius-Transformation $\varphi : (\mathbb{C}_\infty, \chi) \to (\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist ein Homöomorphismus und es gilt

$$\varphi_M^{-1}(w) = \frac{dw - b}{a - cw} \; (= \varphi_{M^{-1}}(w)) \qquad (w \in \mathbb{C}_\infty)$$

(nachrechnen; man beachte dabei auch: $\varphi_{\lambda M} = \varphi_M$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Weiter ist $\varphi|_{\mathbb{C}}$ meromorph mit Pol der Ordnung 1 an $-d/c$.

Spezielle Klassen von Möbius-Transformationen ergeben wichtige konforme Abbildungen auf die Einheitskreisscheibe:

Satz 8.5 1. *Für $\alpha \in \mathbb{D}$ ist durch*

$$\varphi(z) := \varphi_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

eine konforme Abbildung $\varphi_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definiert mit $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$ und $\varphi_\alpha^{-1}(w) = \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha}w}$ $(w \in \mathbb{D})$, d. h. $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$.

2. *Für $\beta \in \mathbb{H} := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ ist durch*

$$\varphi(z) := \varphi_\beta(z) := \frac{z - \beta}{z - \overline{\beta}} \qquad (z \in \mathbb{H})$$

eine konforme Abbildung $\varphi_\beta : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ definiert mit $\varphi_\beta(\beta) = 0$ und $\varphi_\beta^{-1}(w) = \frac{\beta - \overline{\beta}w}{1-w}$ $(w \in \mathbb{D})$.

Beweis. Wir betrachten φ wieder als Möbiustransformation, definiert auf $\mathbb{C}_\infty$.
1. Es gilt für $|z| = 1$

$$|z - \alpha| = \underbrace{|z|}_{=1} |1 - \alpha\overline{z}| = |1 - \overline{\alpha} z|,$$

also $\bigl|\varphi(z)\bigr| = 1$, d. h. $\varphi(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$. Weiter ist nach B./D. 8.4

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{w + \alpha}{1 + \overline{\alpha} w} \qquad (w \in \mathbb{D}),$$

also von der gleichen Form. Damit ist auch $\varphi^{-1}(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$ und folglich $\varphi(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$. Hieraus folgt wiederum $\varphi(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{S}) = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{S}$. Aus $\varphi(\alpha) = 0 \in \mathbb{D}$ und der Gebietstreue von φ (beachte: φ ist als Homöomorphismus eine offene Abbildung) ergibt sich dann $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $\varphi(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$ und damit auch $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.
2. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x-\beta| = |x-\overline{\beta}|$, d. h. $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}$. Außerdem ist $\varphi(\infty) = 1$, also $\varphi(\mathbb{R}_\infty) \subset \mathbb{S}$ (wobei $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Da $\varphi\big(\mathbb{R}_\infty\big)$ zusammenhängend ist und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 1$ gilt, folgt $\varphi(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{S}$. Aus $\varphi(\beta) = 0 \in \mathbb{D}$ ergibt sich wie in 1. damit auch $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. □

Beispiel 8.6 (Cayley-Transformation) Durch

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i} \qquad (z \in \mathbb{H})$$

ist eine konforme Abbildung von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{D}$ definiert. Dabei gilt $\varphi(i) = 0$ und

$$\varphi^{-1}(w) = i \cdot \frac{1+w}{1-w} \qquad (w \in \mathbb{D}).$$

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ holomorph, so ist f nach dem Satz von Liouville bereits konstant. Damit existiert insbesondere keine konforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{D}$, d. h. $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ sind nicht konform äquivalent. Wesentliches Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes, der besagt, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ konform äquivalent zum Einheitskreis $\mathbb{D}$ ist. Der Satz zeigt, dass der Einheitskreis nicht nur als ein Beispiel, sondern – in diesem Sinne – als ein Modell eines beliebigen einfach zusammenhängenden Gebiets angesehen werden kann.
Wir beweisen dazu zunächst verschiedene Hilfsresultate, die auch für sich genommen von Interesse sind. Einfach und gleichzeitig sehr nützlich ist das sogenannte Schwarzsche Lemma.

Satz 8.7 *(Schwarz)*
Es sei $f \in H(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$. Dann ist $M(r,f) \le r$ für $0 < r < 1$ und $|f'(0)| \le 1$. Außerdem folgt aus der Gleichheit in einer der beiden Ungleichungen, dass f eine Drehung ist, d.h. es existiert ein ϑ mit $f(z) = e^{i\vartheta} z$ für $z \in \mathbb{D}$.

Beweis. Aus $f(0) = 0$ folgt, dass $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z, & \text{falls } z \neq 0 \\ f'(0), & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

holomorph in $\mathbb{D}$ ist. Es sei $0 \le r < 1$ gegeben. Da $M(\cdot, g)$ monoton wachsend ist (nach dem Maximimprinzip), gilt für $r < s < 1$

$$M(r,g) \le M(s,g) = M(s,f)/s \le 1/s \to 1 \qquad (s \to 1^-).$$

Also ist $M(r,g) \le 1$ und damit $M(r,f) = rM(r,g) \le r$ sowie $|f'(0)| \le 1$. Ist $M(r,f) = r$ für ein $0 < r < 1$ oder $|f'(0)| = 1$, so hat $|g|$ ein Maximum in $\mathbb{D}$. Nach der negativen Form des Maximumprinzips (S. 2.5) ist dann $g(z) \equiv c$ mit einem c vom Betrag 1. Damit ist f eine Drehung. □

Wir werden nun den Satz von Arzela-Ascoli verwenden, um den wichtigen Satz von Montel zu beweisen.

Satz 8.8 *(Montel)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ beschränkt auf jeder kompakten Teilmenge K von Ω, so ist $\mathcal{F}$ eine normale Familie in $C(\Omega, \mathbb{C})$, d. h. jede Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ hat eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis. Nach B. C.6.2 reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist. Es sei $z_0 \in \Omega$. Ist $U_R[z_0] \subset \Omega$, so ist $c := \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\infty, U_R[z_0]} < \infty$. Ist $0 < r < R$, so ergibt sich für $f \in \mathcal{F}$ aus der Cauchyschen Ungleichung (2.1), wieder angewandt auf $g(w) := f(z_0 + Rw)$,

$$\|f'\|_{\infty, U_r[z_0]} \le \frac{1}{(1 - r/R)^2} \frac{c}{R} = \frac{R}{(R-r)^2} \cdot c.$$

und damit für $z \in U_r(z_0)$ nach dem Schrankensatz

$$\big|f(z) - f(z_0)\big| \le \frac{R}{(R-r)^2} c \cdot |z - z_0|.$$

Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig (Lipschitz-) stetig an z_0. □

Satz 8.9 *(Riemannscher Abbildungssatz)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$, $G \ne \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es sei $z_0 \in G$. Dann existiert eine konforme Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{D}$ mit $\varphi(z_0) = 0$. Insbesondere sind G und $\mathbb{D}$ konform äquivalent.

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{\psi \in H(G) : \psi(G) \subset \mathbb{D}, \psi \text{ injektiv}, \psi(z_0) = 0\}.$$

Zu zeigen ist: Es existiert ein $\varphi \in \mathcal{F}$ mit $\varphi(G) = \mathbb{D}$.

1. Wir zeigen $\mathcal{F} \ne \emptyset$.
Denn: Es sei $\zeta \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann existiert ein $f \in H(G)$ mit $f^2(z) = z - \zeta$ für alle $z \in G$ ([Ü]; man beachte dabei: ist $h \in H(G)$ so, dass $e^{h(z)} = z - \zeta$, so ist $f = e^{h/2}$ geeignet). Ist $f(z_1) = \pm f(z_2)$, so ist $z_1 - \zeta = f^2(z_1) = f^2(z_2) = z_2 - \zeta$, also auch $z_1 = z_2$. Damit ist f injektiv und aus $w \in f(G) \setminus \{0\}$ folgt $-w \notin f(G)$.

Da $f(G)$ ein Gebiet ist (Gebietstreue holomorpher Funktionen), existiert ein Kreis $U_r(a)$ mit $0 \notin U_r[a] \subset f(G)$. Dann gilt aber $U_r[-a] \cap f(G) = \emptyset$. Ist $\psi := r/(f+a)$, so ist ψ injektiv und $\psi(G) \subset \mathbb{D}$ (beachte: $|f+a| > r$). Die Funktionen φ_α aus S. 8.5.1 bilden $\mathbb{D}$ konform auf $\mathbb{D}$ ab mit $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$. Für $\alpha := \psi(z_0)$ ist damit $\varphi_\alpha \circ \psi \in \mathcal{F}$.

2. Wir zeigen: Ist $\psi \in \mathcal{F}$ mit $\psi(G) \neq \mathbb{D}$, so existiert ein $\psi_1 \in \mathcal{F}$ mit $\left|\psi_1'(z_0)\right| > \left|\psi'(z_0)\right|$. Denn: Es sei $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \psi(G)$. Dann ist $\varphi_\alpha \circ \psi \in H(G)$ injektiv und $(\varphi_\alpha \circ \psi)(G) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Wieder existiert ein $g \in H(G)$ mit $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$. Wie in 1. sieht man, dass g injektiv ist. Ist $\psi_1 := \varphi_\beta \circ g$, wobei $\beta = g(z_0)$, so folgt $\psi_1 \in \mathcal{F}$ und

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ g^2 = \varphi_{-\alpha} \circ (\varphi_{-\beta})^2 \circ \psi_1$$

(beachte $\varphi_{-\alpha} = \varphi_\alpha^{-1}$ und entsprechend für β). Ist $h := \varphi_{-\alpha} \circ (\varphi_{-\beta})^2$, so gilt $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ mit

$$h(0) = \varphi_{-\alpha}(g^2(z_0)) = \psi(z_0) = 0$$

und h ist **nicht injektiv**. Nach dem Schwarzschen Lemma ist $|h'(0)| < 1$. Also ergibt sich mit der Kettenregel (beachte: $\psi_1(z_0) = 0$)

$$|\psi'(z_0)| = |h'(0)| \cdot |\psi_1'(z_0)| < |\psi_1'(z_0)|.$$

3. Wir definieren $\ell : H(G) \to \mathbb{R}$ durch $\ell(f) = |f'(z_0)|$ $(f \in H(G))$. Nach 2. reicht es, zu zeigen: Es existiert ein $\varphi \in \mathcal{F}$ mit

$$\ell(\varphi) \geq \ell(\psi) \quad (\psi \in \mathcal{F}).$$

Zunächst existiert eine Folge (φ_n) in $\mathcal{F}$ mit

$$\ell(\varphi_n) \to \eta := \sup_{\psi \in \mathcal{F}} \ell(\psi) \ \in [0, \infty] \qquad (n \to \infty).$$

Da $\psi(G) \subset \mathbb{D}$ für alle $\psi \in \mathcal{F}$ gilt, ist $\mathcal{F}$ normal nach S. 8.8. Also existiert eine Teilfolge $(\varphi_n)_{n \in I}$ von (φ_n), die lokal gleichmäßig auf G gegen eine Funktion φ konvergiert. Nach S. 2.12 ist $\varphi \in H(G)$ und es gilt $\varphi_n' \to \varphi'$ $(n \to \infty,\, n \in I)$ lokal gleichmäßig auf G, also insbesondere $\ell(\varphi_n) \to \ell(\varphi)$. Folglich ist $\ell(\varphi) = \eta (< \infty)$. Aus $\varphi_n(G) \subset \mathbb{D}$ und $\varphi \not\equiv \text{const}$ (beachte $\eta > 0$) folgt mit dem Satz von Hurwitz, angewandt auf $\varphi_n - w_0$ für $|w_0| \geq 1$, auch $\varphi(G) \subset \mathbb{D}$. Schließlich folgt aus der Injektivität von φ_n auch die Injektivität von φ, wieder mit dem Satz von Hurwitz. Damit ist $\varphi \in \mathcal{F}$. □

Man kann sich (im Fall der Existenz) fragen, „wieviele“ konforme Abbildungen φ zwischen G und $\mathbb{D}$ mit $\varphi(z_0) = 0$ existieren.

Bemerkung 8.10 1. Sind G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$ und $\varphi_1, \varphi_2 : G \to \mathbb{D}$ konform mit

$$\varphi_1(z_0) = 0 = \varphi_2(z_0),$$

so ist $\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi(0) = 0$. Also gilt nach dem Schwarzschen Lemma, angewandt auf φ^{-1} und φ,

$$|z| = |\varphi^{-1}(\varphi(z))| \leq |\varphi(z)| \leq |z| \qquad (z \in \mathbb{D})$$

und damit $|\varphi(z)| = |z|$. Wieder nach dem Schwarzschen Lemma ist φ eine Drehung, d. h.

$$\varphi_2(z) = e^{i\vartheta}\varphi_1(z) \qquad (z \in G)$$

für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$.
Umgekehrt gilt natürlich auch: Ist $\varphi_1 : G \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi_1(z_0) = 0$ und ist $\varphi_2 = e^{i\vartheta}\varphi_1$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$, so ist $\varphi_2 : G \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi_2(z_0) = 0$.
Durch geeignete Wahl von ϑ lässt sich φ also stets so normieren, dass $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) > 0$ gilt.
2. Ist $G \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und ist $z_0 \in G$, so existiert nach dem Riemannschen Abbildungssatz und 1. **genau eine** konforme Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{D}$ mit $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) > 0$.

Beispiel 8.11 Es sei $\alpha \in \mathbb{D}$. Nach S. 8.5.1 und B. 8.10 ist $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi(\alpha) = 0$ genau dann, wenn φ von der Form

$$\varphi(z) = e^{i\vartheta}\,\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ ist.

9 Normale Familien und der Satz von Picard

Bereits im Zusammenhang mit dem Beweis zum Riemannschen Abbildungssatz haben wir das Konzept normaler Familien eingeführt. Wir wollen dies nun weiter vertiefen.

Bemerkung und Definition 9.1 Es seien $\Omega \subset \mathbb{K}^p$ offen für ein $p \in \mathbb{N}$ und (K_m) die Ausschöpfung von Ω aus dem Beweis zu S. C.5. Wir bezeichnen diese im Weiteren als die *Standardausschöpfung* von Ω. Weiter sei (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum. Für $f, g \in C(\Omega, Y)$ definieren wir

$$d(f,g) := d_{\Omega,Y}(f,g) := \sup_{m\in\mathbb{N}} \min\Big(\frac{1}{m}, d_{\infty,K_m}(f,g)\Big) \quad (\leq 1)$$

mit

$$d_{\infty,K}(f,g) := \max_{x\in K} d_Y(f(x), g(x))$$

für kompakte $K \subset \Omega$ (wobei $d_{\infty,\emptyset}(f,g) := 0$).
Man rechnet nach, dass d eine Metrik auf $C(\Omega, Y)$ ist. Außerdem erhält man: Ist (f_n) eine Folge in $C(\Omega, Y)$, so gilt $f_n \to f$ in $C(\Omega, Y)$ genau dann, wenn $f_n \to f$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von Ω (beziehungsweise, wieder äquivalent, lokal gleichmäßig auf Ω; [Ü]).
(Denn: „$\Rightarrow$" Gilt $f_n \to f$ in $(C(\Omega, Y), d)$ und ist $K \Subset \Omega$, so wählen wir $M \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_M$. Dann folgt

$$\min\Big(\frac{1}{M}, d_{\infty,K_M}(f, f_n)\Big) \leq d(f_n, f) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

also auch

$$d_{\infty,K_M}(f, f_n) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

und damit

$$d_{\infty,K}(f, f_n) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

„$\Leftarrow$" Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $M = M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $1/M < \varepsilon$. Also ist

$$\sup_{m\geq M} \min\Big(\frac{1}{m}, d_{\infty,K_m}(f, f_n)\Big) \leq \frac{1}{M} < \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Weiter existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$d_{\infty,K_M}(f, f_n) < \varepsilon \qquad (n \geq N).$$

Damit ist

$$\max_{1\leq m\leq M} \min\Big(\frac{1}{m}, d_{\infty,K_m}(f, f_n)\Big) < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$, also auch $d(f, f_n) < \varepsilon$ für $n \geq N$.)
Entsprechend sieht man, dass (f_n) genau dann eine Cauchy-Folge in $C(\Omega, Y)$ ist, wenn (f_n) gleichmäßige Cauchy-Folge auf allen kompakten Teilmengen von Ω ist. Damit ist $(C(\Omega, Y), d)$ vollständig.

(Denn: Ist (f_n) eine Cauchy-Folge in $(C(\Omega, Y), d)$, so existiert für alle $K \Subset \Omega$ eine stetige Funktion $f_K : K \to Y$ mit

$$f_n \to f_K \text{ gleichmäßig auf } K$$

(siehe Analysis). Durch $f(x) := f_K(x)$, falls $x \in K$, ist damit eine Funktion $f \in C(\Omega, Y)$ wohldefiniert.)

Relative Kompaktheit einer Famile $\mathcal{F}$ in $(C(\Omega, Y), d)$ bedeutet gerade, dass die Familie normal ist.

Ist schließlich speziell $(Y, d_Y) = (\mathbb{K}^q, d_{|\cdot|})$, so nennen wir eine Familie $\mathcal{F} \subset C(\Omega, \mathbb{K}^q)$ (*lokal*) *beschränkt*, falls $\mathcal{F}|_K$ beschränkt in $\big(C(K, \mathbb{K}^q), ||\cdot||_{\infty,K}\big)$ für alle kompakten $K \subset \Omega$ ist, d. h. falls für alle $K \Subset \Omega$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} ||f||_{\infty,K} < \infty$$

gilt. Man sieht damit leicht ([Ü]): Ist $\mathcal{F}$ normal in $C(\Omega, \mathbb{K}^q)$, so ist $\mathcal{F}$ auch beschränkt.

Bemerkung 9.2 Wir interessieren uns natürlich wieder besonders für holomorphe Funktionen. Mit den obigen Bezeichnungen besagt der Satz 8.8 von Montel, dass eine beschränkte Famile $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ schon normal (also relativ kompakt) in $C(\Omega, \mathbb{C}) =: C(\Omega)$ ist!

Weiter ist $H(\Omega)$ nach S. 2.12 ein abgeschlossener Teilraum von $C(\Omega)$, also ist $(H(\Omega), d)$ ebenfalls vollständig. Außerdem gilt für $f_n \to f$ in $H(\Omega)$ auch $f^{(k)} \to f^{(k)}$ in $H(\Omega)$.

Wir betrachten nun meromorphe Funktionen. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so definieren wir ∞_G durch $\infty_G(z) := \infty$ $(z \in G)$ und setzen

$$M_\infty(G) := M(G) \cup \{\infty_G\} \subset C(G, \mathbb{C}_\infty)$$

(wobei $\mathbb{C}_\infty$ mit der chordalen Metrik χ versehen ist). Dann ist $f \in M_\infty(G)$ genau dann, wenn $1/f \in M_\infty(G)$. Außerdem setzen wir $H_\infty(G) := H(G) \cup \{\infty_G\}$.

Satz 9.3 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind $M_\infty(G)$ und $H_\infty(G)$ abgeschlossen in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$, also als metrische Räume vollständig.*

Beweis. Es sei (f_n) eine Folge in $M_\infty(G)$ mit $f_n \to f$ in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$. Ist $f = \infty_G$, so ist nichts zu zeigen, d.h., wir können $f \not\equiv \infty$ voraussetzen.

1. Es sei $z_0 \in G$ so, dass $f(z_0) \neq \infty$. Dann existiert ein $R > 0$ so, dass $f(z) \neq \infty$ für alle $z \in K := U_R[z_0]$. Aus der Kompaktheit von $f(K)$ folgt $\delta := \operatorname{dist}(f(K), \infty) > 0$.

Aus $f_n \to f$ gleichmäßig auf K ergibt sich für n genügend groß

$$\max_{z \in K} \chi\big(f_n(z), f(z)\big) < \delta/2,$$

und damit $\operatorname{dist}(f_n(K), \infty) \geq \delta/2$. Folglich konvergiert $(f_n|_K)_n$ auch in $(C(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty,K})$. Mit $U := U_R(z_0)$ ist damit $f|_U$ holomorph, da $f_n|_U$ holomorph für n genügend groß.

Ist $f(z_0) = \infty$, so ist $(1/f)(z_0) = 0$. Wie oben sieht man, dass $1/f \in H(U)$ für eine Umgebung U von z_0 gilt (man beachte: aus $f_n \to f$ in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$ folgt auch $1/f_n \to 1/f$ in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$, da $w \mapsto 1/w$ eine Isometrie auf $\mathbb{C}_\infty$ ist). Damit hat f einen Pol an z_0 oder es gilt $(1/f)|_U \equiv 0$. Der zweite Fall tritt nicht ein, denn sonst wäre $f^{-1}(\{\infty\})$ offen, abgeschlossen und nichtleer und damit $f^{-1}(\{\infty\}) = G$, da G ein Gebiet ist. Dies widerspicht $f \not\equiv \infty$. Also hat f an z_0 einen Pol.
Insgesamt ergibt sich damit $f \in M(G)$.
2. Es sei nun $f_n \in H_\infty(G)$ für $n \in \mathbb{N}$. Aus $f \neq \infty_G$ folgt, dass $f_n \in H(G)$ ist für n genügend groß. Angenommen, es existiert ein $z_0 \in G$ mit $f(z_0) = \infty$. Dann ist $(1/f)(z_0) = 0$ und wie in 1. gilt

$$1/f_n \to 1/f$$

in $C(K, \mathbb{C})$, wobei $K := U_R[z_0]$ für R genügend klein. Nach dem Satz von Hurwitz ist also $0 \in (1/f_n)(K^0)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ (beachte: $1/f \not\equiv 0$) und damit $\infty \in f_n(K^0)$ für unendlich viele n. Widerspruch. □

Bemerkung und Definition 9.4 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in M(G)$. Dann ist die auf $G \backslash P(f)$ (wobei $P(f)$ die Menge der Polstellen von f bezeichnet) stetige Funktion $\frac{|f'|}{1+|f|^2}$ zu einer auf G stetigen Funktion $f^\# : G \to [0, \infty)$ fortsetzbar, $f^\#$ heißt dann *sphärische Ableitung* von f.
(Denn: Ohne Einschränkung sei $f \not\equiv$ const. Ist $a \in P(f)$ mit Ordnung $p = p(a) \in \mathbb{N}$, so gilt (Laurent-Entwicklung)

$$f(z) \sim \frac{c}{(z-a)^p} \qquad (z \to a)$$

für ein $c \neq 0$ und damit

$$1 + \left|f^2(z)\right| \sim \frac{|c|^2}{|z-a|^{2p}} \qquad (z \to a).$$

Weiter ist

$$f'(z) \sim \frac{-cp}{(z-a)^{p+1}} \qquad (z \to a)$$

und folglich

$$\frac{|f'(z)|}{1 + \left|f^2(z)\right|} \sim \frac{p}{|c|}|z-a|^{p-1} \qquad (z \to a),$$

also

$$f^\#(a) := \lim_{z \to a} \frac{\left|f'(z)\right|}{1 + \left|f^2(z)\right|} = \begin{cases} 1/|c|, & \text{falls } p = 1 \\ 0, & \text{falls } p > 1 \end{cases}.)$$

Mit $(\infty_G)^\# := 0$ sieht man leicht, dass $(1/f)^\# = f^\#$ gilt ([Ü]).
Die sphärische Ableitung spiegelt das Verzerrungsverhalten der Funktion f als Abbildung von $G \subset \mathbb{C}$ in die Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty$ wider. Dabei ist es sinnvoll, neben der chordalen Metrik

χ die (äquivalente) *sphärische Metrik* σ zu betrachten, die man folgendermaßen definieren kann:
Zunächst sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}_\infty$ ein Weg (in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$). Existieren eine offene Umgebung U von $[\alpha, \beta]$ in $\mathbb{C}$ und eine meromorphe Funktionen $g : U \to \mathbb{C}_\infty$ mit $g|_{[\alpha,\beta]} = \gamma$, so nennen wir γ einen meromorphen Weg. Wir definieren dafür die *sphärische Länge* $L_\#(\gamma)$ durch

$$L_\#(\gamma) := \int_\alpha^\beta \gamma^\# \left(= \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t)|}{1 + |\gamma(t)|^2}\, dt \right)$$

(man beachte: $\gamma^\# : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ ist stetig). Ist $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ mit meromorphen Wegen γ_ι, so setzen wir wieder $L_\#(\gamma) := \sum_{\iota \in I} L_\#(\gamma_\iota)$. Ist $f \in M(G)$ für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und gilt $\gamma^* \subset G$, so ergibt sich mit der Kettenregel

$$L_\#(f \circ \gamma) = \int f^\# |d\gamma|$$

([Ü]). Außerdem nennen wir γ einen meromorphen Pfad, falls eine Permutation wie in B./D. 3.12 existiert. Anfangs- und Endpunkt sind ebenfalls wie dort definiert. Damit setzen wir für $a, b \in \mathbb{C}_\infty$

$$\sigma(a, b) := \inf_{\Gamma_{a,b}} L_\#(\gamma)$$

wobei $\Gamma_{a,b}$ die Menge aller meromorphen Pfade γ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b bezeichnet. Man sieht leicht, dass durch σ eine Metrik auf $\mathbb{C}_\infty$ definiert ist. Weiter kann man zeigen (siehe Bonusmaterial), dass

$$\chi(a, b) \le \sigma(a, b) \le \frac{\pi}{2}\, \chi(a, b) \qquad (a, b \in \mathbb{C}_\infty)$$

gilt. Folglich ist für $f \in M(G)$ und $a, b \in G$

$$\chi(f(b), f(a)) \le \sigma\big(f(b), f(a)\big) \le L_\#(f \circ \gamma) = \int f^\# |d\gamma| \le ||f^\#||_{\infty,\gamma^*} L(\gamma),$$

für alle γ mit $\gamma^* \subset G$ und Anfangspunkt a und Endpunkt b.

Damit haben wir die Basis geschaffen für

Satz 9.5 *(Marty's Theorem)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und es sei $\mathcal{F} \subset M_\infty(G)$. Dann sind äquivalent:

a) *$\mathcal{F}$ ist normal in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$.*

b) *$\{f^\# : f \in \mathcal{F}\}$ ist beschränkt in $C(G, \mathbb{R})$.*

Beweis. b) $\Rightarrow$ a): Es seien $z_0 \in G$ und $R > 0$ mit $U_R[z_0] \subset G$. Nach Voraussetzung ist

$$c := \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f^\#\|_{\infty, U_R[z_0]} < \infty.$$

Ist $z \in U_R(z_0)$ und $\gamma(t) = z_0 + t(z - z_0)$ für $t \in [0,1]$, so ergibt sich für $f \in \mathcal{F}$

$$\chi\big(f(z), f(z_0)\big) \leq ||f^{\#}||_{\infty,\gamma^*}|z - z_0| \leq c|z - z_0|.$$

Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig an z_0. Nach B. C.6 ist $\mathcal{F}$ normal.
a) $\Rightarrow$ b): Man kann zeigen ([Ü]): Ist (f_n) eine beliebige Folge in $M_\infty(G)$, so folgt aus $f_n \to f$ in $M_\infty(G)$ auch $f_n^{\#} \to f^{\#}$ in $C(G, \mathbb{R})$. Ist also $\mathcal{F}$ normal in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$, so ist damit auch $\{f^{\#} : f \in \mathcal{F}\}$ normal in $C(G, \mathbb{R})$ und folglich nach B./D. 9.1 beschränkt. □

Bemerkung und Definition 9.6 Sind $\Omega \subset \mathbb{K}^p$ offen und (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum, so sagen wir eine Familie $\mathcal{F}$ in $C(\Omega, Y)$ sei *normal an der Stelle* $x_0 \in \Omega$, falls eine offene Umgebung U von x_0 in Ω so existiert, dass $\mathcal{F}|_U$ normal ist. Nach S. C.5 ist $\mathcal{F}$ genau dann normal, wenn $\mathcal{F}$ normal an allen $x \in \Omega$ ist.

Beispiel 9.7 Wir betrachten $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H(\mathbb{C})$ mit $f_n(z) = z^n$. Dann ist

$$f_n^{\#}(z) = \frac{n|z|^{n-1}}{1 + |z|^{2n}} \leq \begin{cases} n|z|^{n-1} & (z \in \mathbb{D}) \\ \dfrac{n}{|z|^{n+1}} & (z \in \mathbb{D}^*) \end{cases}.$$

Hieraus folgt, dass $\{f_n^{\#} : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist in $C(\mathbb{D}, \mathbb{R})$ und in $C(\mathbb{D}^*, \mathbb{R})$. Also ist $\mathcal{F}|_{\mathbb{D}}$ normal in $C(\mathbb{D}, \mathbb{C}_\infty)$ und $\mathcal{F}|_{\mathbb{D}^*}$ in $C(\mathbb{D}^*, \mathbb{C}_\infty)$. Aus $f_n^{\#}(z) = n/2$ für $z \in \mathbb{S}$ folgt, dass $\mathcal{F}$ nicht normal ist an allen $z \in \mathbb{S}$.
Bekanntermaßen gilt

$$e^\zeta = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} f_n \circ \varphi_n$$

mit $\varphi_n(\zeta) = 1 + \zeta/n$, wobei die Konvergenz lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ ist. Man sieht also, dass an $z = 1$ (wo $\mathcal{F}$ nicht normal ist) eine geeignete Skalierung im Argument der f_n zu einer sogar auf ganz $\mathbb{C}$ konvergenten Folge führt.

Eine entsprechende Eigenschaft gilt ganz allgemein für nicht normale Familien, wie wir jetzt zeigen werden. Wir setzen für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$

$$\mathrm{Aut}(G) := \{\varphi : G \to G \text{ konform}\}$$

(die Automorphismengruppe von G). Dann ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ die Menge der affin-linearen Abbildungen $\varphi = \varphi_{a,b}$ der Form $\varphi(\zeta) := a + b\zeta$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ ([Ü]). Wir schreiben noch $\mathrm{Aut}_+(\mathbb{C}) := \{\varphi_{a,\rho} : a \in \mathbb{C},\, \rho > 0\}$.

Satz 9.8 *(Zalcman-Lemma)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F} \subset M_\infty(G)$. Ist $\mathcal{F}$ nicht normal an der Stelle z_0, so

existieren zu jeder offenen Umgebung U von z_0 in G Folgen (φ_j) in $\mathrm{Aut}_+(\mathbb{C})$ und (h_j) in $\mathcal{F}$ sowie eine Funktion $g \in M(\mathbb{C})$ mit

$$\max g^{\#}(\mathbb{C}) = g^{\#}(0) = 1$$

und folgender Eigenschaft: Für alle $K \Subset \mathbb{C}$ ist $\varphi_j(K) \subset U$ für j genügend groß und es gilt $h_j \circ \varphi_j \to g$ $(j \to \infty)$ gleichmäßig auf K. Ist dabei $\mathcal{F} \subset H(G)$, so ist g ganz.

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst: Sind $f_n : U \to \mathbb{C}_\infty$ meromorph auf einer offenen Umgebungen U von $\overline{\mathbb{D}}$ mit

$$(0 <)\, R_n := \max_{z \leq 1} f_n^{\#}(z)(1-|z|) \uparrow \infty \qquad (n \to \infty),$$

so existieren eine Folge (ψ_n) in $\mathrm{Aut}_+(\mathbb{C})$, eine Teilfolge (n_j) von (n) sowie ein $g \in M(\mathbb{C})$ mit $\max g^{\#}(\mathbb{C}) = g^{\#}(0) = 1$ und mit folgender Eigenschaft: Für alle $K \Subset \mathbb{C}$ ist $\psi_n(K) \subset \mathbb{D}$ für n genügend groß und es gilt

$$f_{n_j} \circ \psi_{n_j} \to g \qquad (j \to \infty)$$

gleichmäßig auf K.
Denn: Wir wählen $z_n \in \mathbb{D}$ so, dass $f_n^{\#}(z_n)\big(1-|z_n|\big) = R_n$ und setzen

$$\rho_n := \frac{1}{f_n^{\#}(z_n)}, \qquad \psi_n(\zeta) := z_n + \rho_n \zeta \qquad (n \in \mathbb{N}, \zeta \in \mathbb{C}).$$

Dann ist

$$R_n \rho_n = \frac{R_n}{f_n^{\#}(z_n)} = 1 - |z_n|,$$

also $z_n + \rho_n U_{R_n}(0) = U_{R_n \rho_n}(z_n) \subset \mathbb{D}$ und folglich $\psi_n(U_{R_n}(0)) \subset \mathbb{D}$. Aus $R_n \to \infty$ folgt, dass für jedes $K \Subset \mathbb{C}$ damit $\psi_n(K) \subset \mathbb{D}$ für n genügend groß gilt. Weiter ist

$$g_n := f_n \circ \psi_n \in M\big(U_{R_n}(0)\big)$$

und nach der Kettenregel gilt auf $U_{R_n}(0)$

$$g_n^{\#} = \rho_n f_n^{\#} \circ \psi_n.$$

Wir setzen $I_0 := \mathbb{N}$ und definieren induktiv Teilmengen I_m mit $I_m \subset I_{m-1}$.
Dazu sei $m \in \mathbb{N}$ und I_{m-1} bereits definiert. Ist $|\zeta| < R_m$, so gilt für $n \geq m$

$$f_n^{\#}(\psi_n(\zeta))\big(1 - |\psi_n(\zeta)|\big) \leq R_n\ .$$

Also folgt für $n \geq m$

$$g_n^{\#}(\zeta) \leq \rho_n \frac{R_n}{1-|z_n + \rho_n \zeta|} \leq \frac{\rho_n R_n}{1 - |z_n| - \rho_n |\zeta|} = \frac{\rho_n R_n}{\rho_n R_n - \rho_n |\zeta|} = \frac{1}{1 - |\zeta|/R_n}.$$

Ist $0 < R < R_m$, so ist $\left(\frac{1}{1-R/R_n}\right)_{n \geq m}$ beschränkt und damit ist

$$\sup_{n \geq m} \|g_n^{\#}\|_{\infty, U_R[0]} < \infty.$$

Nach Marty's Theorem ist $\{g_n : n \geq m\}$ eine normale Familie in $C(U_{R_m}(0), \mathbb{C}_\infty)$. Also hat Folge $(g_n)_{n \in I_{m-1}}$ eine konvergente Teilfolge, d. h. es existiert eine (unendliche) Teilmenge I_m von I_{m-1} (mit $n \geq m$ für $n \in I_m$) so, dass $(g_n)_{n \in I_m}$ in $M_\infty(U_{R_m}(0))$ konvergiert.
Setzt man $n_0 := 1$ und wählt $n_j > n_{j-1}$ mit $n_j \in I_j$, so konvergiert damit die Folge $(g_{n_j})_j$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ und für die Grenzfunktion $g \in M_\infty(\mathbb{C})$ gilt

$$1 = \rho_{n_j} f_{n_j}^{\#}(z_{n_j}) = g_{n_j}^{\#}(0) \to g^{\#}(0),$$

also auch $g^{\#}(0) = 1$. Ist $\zeta \in \mathbb{C}$, so gilt für j genügend groß

$$1 \leftarrow \frac{1}{1 - |\zeta|/R_{n_j}} \geq g_{n_j}^{\#}(\zeta) \to g^{\#}(\zeta) \qquad (j \to \infty)$$

und damit $g^{\#}(\zeta) \leq 1$.
2. Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$ und $\overline{\mathbb{D}} \subset U$. Dann existiert nach Marty's Theorem eine Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ mit

$$\|f_n^{\#}\|_{\infty, U_{1/2}[0]} \to \infty \qquad (n \to \infty),$$

also auch

$$R_n \geq \|f_n^{\#}\|_{\infty, U_{1/2}[0]} \cdot \frac{1}{2} \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

O.E. sei $0 < R_n$ monoton wachsend (sonst: Übergang zu einer geeigneten Teilfolge). Aus 1. ergibt sich dann die Behauptung mit $h_j := f_{n_j}$ und $\varphi_j := \psi_{n_j}$.
Sind die f_n holomorph in G, so ist nach obigen Überlegungen auch g holomorph in $\mathbb{C}$. □

Wir schreiben $|M| \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ für die Anzahl der Elemente einer Menge M. Dann gilt folgender zentrale Satz.

Satz 9.9 *(Montel; groß)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F} \subset M_\infty(G)$. Lässt $\mathcal{F}$ drei Werte aus, d. h. ist

$$\Big|\mathbb{C}_\infty \setminus \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(G)\Big| \geq 3,$$

so ist $\mathcal{F}$ normal in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$.

Beweis. Nach B./D. 9.6 reicht es, zu zeigen: $\mathcal{F}$ ist normal an z_0 für alle $z_0 \in G$. Wir können daher ohne Einschränkung $z_0 = 0$ und $G = \mathbb{D}$ annehmen. Außerdem können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$0, 1, \infty \notin \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(\mathbb{D})$$

gilt. Ansonsten betrachte man statt $\mathcal{F}$ die Familie $\{\varphi \circ f : f \in \mathcal{F}\}$, wobei $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ eine Möbius-Transformation ist, die die (mindestens) 3 Werte $w_1, w_2, w_3 \notin \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(G)$ nach $0, 1, \infty$ abbildet ($\varphi(z) = \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \cdot \frac{z - w_1}{z - w_3}$ ist im Falle $w_j \neq \infty$ geeignet, $\varphi(z) = \frac{z - w_1}{w_2 - w_1}$ für $w_3 = \infty$).

Dann ist $\mathcal{F} \subset H(\mathbb{D})$. Aus $0 \notin f(\mathbb{D})$ folgt die Existenz m-ter Wurzeln von $f \in \mathcal{F}$, d. h., für alle $m \in \mathbb{N}$ existieren $h \in H(\mathbb{D})$ mit $h^m = f$ (siehe B./D. 3.3). Wir setzen für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_k := \{h \in H(\mathbb{D}) : h^{2^k} = f \text{ für ein } f \in \mathcal{F}\}.$$

Angenommen, $\mathcal{F}$ ist nicht normal. Dann ist auch $\mathcal{F}_k$ nicht normal ($k \in \mathbb{N}$).
(Denn: Ist $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{F}$, die keine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt, und sind $h_n \in \mathcal{F}_k$ so, dass $h_n^{2^k} = f_n$, so hat auch $(h_n)_n$ keine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.)
Es sei $g_k \in H(\mathbb{C})$ eine Grenzfunktion wie im Zalcman-Lemma zu $\mathcal{F}_k$ (die dort g heißt). Dann ist $g_k \not\equiv \text{const}$, da $g_k^{\#}(0) = 1$. Damit ergibt sich aus dem Satz von Hurwitz, dass $g_k(\mathbb{C})$ keine 2^k-ten Einheitswurzeln enthält (jede Funktion $h \in \mathcal{F}_k$ ist so, dass $h(\mathbb{D})$ keine 2^k-ten Einheitswurzeln enthält).
Weiter ist $g_k^{\#} \leq 1$ auf $\mathbb{C}$. Damit ist nach Martys Theorem $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine normale Familie in $C(\mathbb{C}, \mathbb{C}_\infty)$. Ist $g \in H_\infty(\mathbb{C})$ lokal gleichmäßiger Grenzwert einer Teilfolge von $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so ist $g \not\equiv \text{const}$, da $g^{\#}(0) = 1$. Wieder nach dem Satz von Hurwitz enthält $g(\mathbb{C})$ keine 2^k-te Einheitswurzel, jetzt aber für alle $k \in \mathbb{N}$, d. h. $g(\mathbb{C}) \cap W = \emptyset$, wobei

$$W := \{w \in \mathbb{C} : w^{2^k} = 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}.$$

Da W dicht in $\mathbb{S}$ ist und da $g(\mathbb{C})$ ein Gebiet ist, gilt $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{D}$ oder $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{D}^*$. Im ersten Fall ist g konstant nach dem Satz von Liouville. Widerspruch. Im zweiten Fall liefert die Anwendung des Satzes von Liouville auf $1/g$ den gleichen Widerspruch. □

Bemerkung und Definition 9.10 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$ und $f \in H(G\backslash\{a\})$. Hat f an a eine wesentliche Singularität, so folgt aus dem Satz von Casorati-Weierstrass

$$\overline{f\big(U_\delta(a) \setminus \{a\}\big)}^{\mathbb{C}_\infty} = \mathbb{C}_\infty$$

für alle $\delta > 0$ (mit $U_\delta(a) \setminus \{a\} \subset G$). Ein Punkt $w \in \mathbb{C}_\infty$ mit

$$w \notin f\big(U_\delta(a) \setminus \{a\}\big)$$

für ein $\delta > 0$ heißt *(Picardscher) Ausnahmewert* von f an a. Wir verwenden diesen Begriff auch im Falle $f \in M(G\backslash\{a\})$ und schreiben $E_{\infty,f}(a)$ für die Menge der Ausnahmewerte von f an a. Für Funktionen $f \in H(G \setminus \{a\})$ ist der Wert ∞ offenbar stets ein Ausnahmewert. In diesem Fall schreiben wir $E_f(a) := E_{\infty,f}(a) \cap \mathbb{C}$.

Beispiel 9.11 Ist $f(z) = e^{1/z}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), so hat f an 0 eine wesentliche Singularität. Hier ist $E_f(0) = \{0\}$. Dasselbe gilt für $f(z) = e^{1/z}(z-1)$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), obwohl hier $0 \in f\big(\mathbb{C} \setminus \{0\}\big)$.

Satz 9.12 *(großer Satz von Picard)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in G$. Ist $f \in M(G \setminus \{a\})$ mit $|E_{\infty,f}(a)| \geq 3$, so ist f meromorph fortsetzbar nach G. Ist $f \in H(G \setminus \{a\})$ mit $|E_f(a)| \geq 2$, so hat f an a eine hebbare Singularität oder einen Pol.

Beweis. Ohne Einschränkung seien $a = 0$, $\mathbb{D} \subset G$ und $0, 1, \infty \notin f(\mathbb{D}\setminus\{0\})$ Ausnahmewerte (ansonsten wieder Möbius-Transformation ,,nachschalten", vgl. Beweis zu S. 9.9). Dann sind insbesondere f und $1/f$ in $H(U)$, wobei $U := \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Wir definieren

$$g_n(z) := f(z/n) \qquad (n \in \mathbb{N}, z \in U).$$

Dann sind $0, 1, \infty \notin g_n(U)$. Aus dem Satz von Montel folgt, dass $\{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H(U)$ normal in $C(U, \mathbb{C}_\infty)$ ist. Also existieren eine Teilfolge $(g_n)_{n\in I}$ von (g_n) und ein $g \in H_\infty(U)$ mit $g_n \to g$ $(n \to \infty, n \in I)$ lokal gleichmäßig auf U.
1. Fall: $g \not\equiv \infty$. Dann ist $g \in H(U)$. Es sei $M > 0$ so, dass

$$\big|f(z)\big| \leq M \quad \text{und} \quad \big|g(z)\big| \leq M - 1 \qquad \Big(|z| = \frac{1}{2}\Big).$$

Dann ist auch $\big|g_n(z)\big| \leq M$ $(|z| = 1/2)$ für $n \in I$ genügend groß, also

$$\big|f(z)\big| \leq M \qquad \Big(|z| = \frac{1}{2n}\Big)$$

für $n \in I$ genügend groß. Nach dem Maximumprinzip ist damit sogar

$$\big|f(z)\big| \leq M \qquad \Big(\frac{1}{2n} \leq |z| \leq \frac{1}{2}\Big),$$

für solche n und daher auch $|f| \leq M$ auf $U_{1/2}(0) \setminus \{0\}$. Folglich hat f an 0 eine hebbare Singularität (Riemannscher Hebbarkeitssatz).
2. Fall: $g \equiv \infty$. Dann argumentiert man entsprechend mit $1/f$ statt f (beachte $1/f \in H(U)$). Damit hat $1/f$ eine hebbare Singularität an 0 und folglich f einen Pol oder eine hebbare Singularität an 0. □

Bemerkung und Definition 9.13 Es sei $f \in M(\mathbb{C})$. Ein Punkt $w \in \mathbb{C}_\infty$ heißt *(Picardscher) Ausnahmewert* von f (an ∞), falls w Ausnahmewert von $z \mapsto f(1/z)$ an der Stelle 0 ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\big|f^{-1}\big(\{w\}\big)\big| < \infty$ ist (nach dem Identitätssatz existieren keine Häufungspunkte von w-Stellen in $\mathbb{C}$).
Ist f ganz und transzendent, so hat $z \mapsto f(1/z)$ an 0 eine wesentliche Singularität. Also ist die Menge der Ausnahmewerte in $\mathbb{C}$ höchstens 1-elementig nach dem Satz von Picard! Wir schreiben $E_f \subset \mathbb{C}$ für die (leere oder einpunktige) Menge der Picardschen Ausnahmewerte in $\mathbb{C}$. Insbesondere ist also $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ leer oder einpunktig. Dies ist die Aussage des sogenannten kleinen Satzes von Picard.
Für $f(z) = e^z$ ist $0 \notin f(\mathbb{C})$ und für $f(z) = ze^z$ ist $0 \in E_f$, obwohl $0 \in f(\mathbb{C})$ ist.

10 Komplexe Dynamik

Ist (X,d) ein metrischer Raum und ist $f : X \to X$ stetig, so nennt man das Paar (X,f) ein (diskretes) dynamisches System. Man setzt dann $f^0 := \mathrm{id}_X$ und

$$f^n := f^{\circ n} := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{mal}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und betrachtet das Verhalten der Folge (f^n) für $n \to \infty$.
Wir untersuchen im Weiteren – in Ansätzen – das Verhalten von (f^n) für dynamische Systeme $(\mathbb{C}, f)$ im Falle ganzer Funktionen f und dabei insbesondere im Falle von Polynomen.

Für das lokale dynamische Verhalten sind insbesondere Fixpunkte von Bedeutung.

Bemerkung und Definition 10.1 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Ferner sei $z^* \in \Omega$ ein Fixpunkt von f, d. h. $f(z^*) = z^*$. Mit $\lambda := f'(z^*)$ heißt z^*

1. *superattraktiv*, falls $\lambda = 0$,
2. *attraktiv*, falls $0 < |\lambda| < 1$,
3. *neutral*, falls $|\lambda| = 1$,
4. *abweisend*, falls $|\lambda| > 1$.

Ist z^* (super-)attraktiv, so existiert zu jedem $\alpha \in (|\lambda|, 1)$ ein $r > 0$ so, dass für $U = U_r(z^*)$ gilt:

$$(U, f|_U) \text{ ist ein dynamisches System und } f|_U \text{ eine } \alpha\text{-Kontraktion.}$$

(Denn: Es sei $r > 0$ so, dass $\|f'\|_{\infty, U_r[z^*]} \leq \alpha$. Dann gilt nach dem Schrankensatz

$$\big|f(z) - f(w)\big| \leq \alpha |z - w| \qquad (z, w \in U)$$

und speziell für $w = z^*$

$$\big|f(z) - z^*\big| = \big|f(z) - f(z^*)\big| \leq \alpha |z - z^*|,$$

also $f(U) \subset U$.)
Induktiv ergibt sich für $z \in U$ zudem

$$|f^n(z) - z^*| \leq \alpha^n |z - z^*| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Hieraus folgt $f^n \to z^*$ gleichmäßig auf U.

Beispiel 10.2 Für $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$ ist $z^* = 0$ superattraktiver Fixpunkt. Hier ist $f^n(z) = z^{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. Es gilt also

$$f^n(z) = z^{2^n} \to \begin{cases} 0 & \text{in } C(\mathbb{D}, \mathbb{C}) \\ \infty & \text{in } C(\mathbb{D}^*, \mathbb{C}_\infty) \end{cases}.$$

Bemerkung und Definition 10.3 Wir setzen

$$\mathcal{E} := H(\mathbb{C}) \setminus \{f : f(z) = a + bz : a, b \in \mathbb{C}\}.$$

Dann heißt für $f \in \mathcal{E}$

$$F := F_f := \{z \in \mathbb{C} : \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(\mathbb{C}, \mathbb{C}_\infty) \text{ normal an der Stelle } z\}$$

die *Fatou-Menge* von f. Außerdem heißt $J := J_f := \mathbb{C} \setminus F$ die *Julia-Menge* von f. Man beachte: Aus der Definition ergibt sich, dass F offen und damit J abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist. Außerdem ist $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ normal in $C(F, \mathbb{C}_\infty)$ nach S. C.5. Schließlich setzen wir $I = I_f = \big\{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \to \infty \ (n \to \infty)\big\}$ (*Attraktionsmenge* von ∞).

Beispiel 10.4 Es sei wieder $f(z) = z^2$, also $f^n(z) = z^{2^n}$. Aus B. 9.7 ergibt sich, dass $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ genau dann normal an z ist, wenn $|z| \neq 1$ gilt. Also ist hier $J = \mathbb{S}$ und $F = \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}$. Schließlich ist $I_f = \mathbb{D}^*$.

Bemerkung 10.5 Ist z^* ein (super-)attraktiver Fixpunkt von $f \in \mathcal{E}$, so folgt $z^* \in F_f$ aus B./D. 10.1. Ist dagegen z^* abweisend, so gilt stets $z^* \in J_f$.
(Denn: Angenommen, es existiert eine offene Umgebung U von z^* so, dass $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ normal in $C(U, \mathbb{C}_\infty)$ ist. Ist (n_j) so, dass $f^{n_j} \to g$ in $C(U, \mathbb{C}_\infty)$, so gilt auch $(f^{n_j})^\# \to g^\#$ in $C(U, \mathbb{R})$. Es gilt $(f^n)^\#(z^*) = |(f^n)'(z^*)|/(1+|f(z^*)|^2)$ und mit der Kettenregel $(f^n)'(z^*) = (f'(z^*))^n = \lambda^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Also folgt

$$\infty \leftarrow \frac{|\lambda|^{n_j}}{1 + |f(z^*)|^2} = (f^{n_j})^\#(z^*) \to g^\#(z^*) \qquad (j \to \infty).$$

Widerspruch.)

Beispiel 10.6 Für $f(z) = \lambda \sin z$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$, ist $z^* = 0$ Fixpunkt mit $f'(0) = \lambda$. Also ist $0 \in F_f$, falls $|\lambda| < 1$, und $0 \in J_f$, falls $|\lambda| > 1$.

Bemerkung und Definition 10.7 Es seien X eine Menge und $f : X \to X$. Dann heißt eine Menge $M \subset X$

1. *(vorwärts-)invariant (unter f)*, falls $f(M) \subset M$,
2. *rückwärts-invariant (unter f)*, falls $f^{-1}(M) \subset M$,
3. *vollständig invariant (unter f)*, falls $f(M) \subset M$ und $f^{-1}(M) \subset M$.

Man kann sich leicht überlegen ([Ü]): M ist genau dann vollständig invariant, wenn M und $X \setminus M$ invariant sind. Weiter setzen wir

$$O^+(M) := O_f^+(M) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(M), \qquad O^-(M) := O_f^-(M) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^n)^{-1}(M)$$

und

$$O(M) := O_f(M) := O^+(M) \cup O^-(M) \cup M,$$

sowie $O^\pm(x) := O^\pm(\{x\})$ und $O(x) := O(\{x\})$ für $x \in X$.

Satz 10.8 *Für $f \in \mathcal{E}$ sind F_f, J_f und I_f vollständig invariant.*

Beweis. Die Behauptung für I_f ergibt sich sofort aus der Definition. Es reicht also, zu zeigen: F_f ist vollständig invariant (da $J_f = \mathbb{C} \setminus F_f$).
1. Wir zeigen $f^{-1}(F) \subset F$. Dazu sei $K \Subset f^{-1}(F)$ gegeben. Dann ist $f(K) \Subset f(f^{-1}(F)) \subset F$. Für $z \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt mit Marty's Theorem

$$(f^n)^\#(z) = (f^{n-1})^\#(f(z))|f'(z)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||(f^{n-1})^\#||_{\infty,f(K)} \cdot ||f'||_{\infty,K} < \infty.$$

Damit ist $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||(f^n)^\#||_{\infty,K} < \infty$ und wieder nach Marty's Theorem $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ normal in $C(f^{-1}(F), \mathbb{C}_\infty)$.
2. Wir zeigen: $f(F) \subset F$. Ist $z_0 \in F$, so existiert ein $\delta > 0$ so, dass $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ normal auf einer Umgebung von $K := U_\delta[z_0]$ ist. Da f offen ist, ist $f(K)$ eine Umgebung von $w_0 := f(z_0)$.
Es sei $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$. Dann hat die Folge $(f^{n_j+1})_{j\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchy-Teilfolge $(f^{n_j+1})_{j\in L}$ auf K. Für jedes $w \in f(K)$ existiert ein $z \in K$ mit $f(z) = w$. Also ist

$$\max_{w\in f(K)} \chi\big(f^n(w), f^m(w)\big) \leq \max_{z\in K} \chi\big(f^{n+1}(z), f^{m+1}(z)\big) \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Daher ist $(f^{n_j})_{j\in L}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf $f(K)$ und damit auch gleichmäßig konvergent auf $f(K)$. Also ist $w_0 \in F$. □

Bemerkung 10.9 1. Ist (X, f) ein dynamisches System und ist $U \subset X$ offen und vollständig invariant, so ist ∂U invariant.
(Denn: Zum einen ist $f(\partial U) \subset f(X \setminus U) \subset X \setminus U$ und zum anderen ist aufgrund der Stetigkeit von f

$$f(\partial U) \subset f(\overline{U}) \subset \overline{f(U)} \subset \overline{U}.$$

Damit ist $f(\partial U) \subset \partial U$.)
2. Hat $f \in \mathcal{E}$ einen Fixpunkt z^*, so ist sicher $z^* \notin I_f$, also ist insbesondere $I_f \neq \mathbb{C}$. Dies gilt insbesondere für Polynome in $\mathcal{E}$ (nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat $f(z) - z$ eine Nullstelle, also f einen Fixpunkt).

Damit zeigen wir

Satz 10.10 *Ist $f \in \mathcal{E}$ ein Polynom, so ist J_f nichtleer und kompakt.*

Beweis. Es sei $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{d} a_\nu z^\nu$ mit $d \geq 2$ und $a_d \neq 0$. Dann gilt

$$f(z) \sim a_d z^d \qquad (|z| \to \infty)$$

und damit existiert ein $R > 0$ so, dass $\big|f(z)\big| \geq 2|z|$ für $z \in V := V_{R,\infty}(0)$. Induktiv ergibt sich $|f^n(z)| \geq 2^n|z|$ für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in V$. Damit ist $V \subset I_f$, also $\emptyset \neq I_f \neq \mathbb{C}$ mit B. 10.9.2 und daher auch $\partial I_f \neq \emptyset$. Außerdem ist nach Definition von I_f

$$I_f = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-k}(V) \quad \big(= O^-(V)\big).$$

Folglich ist I_f offen, und nach Definition von F_f ist $I_f \subset F_f$ (beachte: es gilt $f^n \to \infty$ gleichmäßig auf $f^{-k}(V)$ für alle $k \in \mathbb{N}$). Damit ist jedenfalls $J_f \subset \mathbb{C} \setminus V$ kompakt.
Nach S. 10.8 und B. 10.9.1 ist weiterhin ∂I_f invariant, also $f^n(\partial I_f) \subset \partial I_f$ $(n \in \mathbb{N})$, und damit ist $(f^n(z))_n$ beschränkt in $\mathbb{C}$ für alle $z \in \partial I_f$ (da ∂I_f beschränkt ist).
Ist $z_0 \in \partial I_f$, so ist $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht normal in $C(U, \mathbb{C}_\infty)$ für alle offenen Umgebungen U von z_0, da $\big(f^n(z_0)\big)_n$ beschränkt ist und $f^n(z) \to \infty$ auf $U \cap I_f$ gilt. Also ist $z_0 \in J_f$. □

Bemerkung 10.11 1. Man kann zeigen (nicht leicht!), dass auch für transzendente f stets $J_f \neq \emptyset$ und in diesem Fall unbeschränkt in $\mathbb{C}$ ist.
2. Der Beweis zu S. 10.10 zeigt, dass $\partial I_f \subset J_f$ für Polynome gilt. Genauer kann man zeigen, dass $J_f = \partial I_f$ für alle $f \in \mathcal{E}$ ist (auch nicht leicht).

Wir nutzen wir nun die Sätze von Montel und Picard, um weitergehende Aussagen auch für allgemeine ganze Funktionen zu machen.
Wesentlich für die gesamte Theorie ist folgende Beobachtung: Ist U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ mit $U \cap J_f \neq \emptyset$, so ist nach dem Satz von Montel $\mathbb{C} \setminus O^+(U)$ höchstens einpunktig. Daraus ergibt sich schon einmal unmittelbar:

Satz 10.12 *Ist $f \in \mathcal{E}$, so ist $J_f = \mathbb{C}$ oder $(J_f)^0 = \emptyset$.*

Beweis. Es sei $z_0 \in (J_f)^0$. Ist $U := U_\delta(z_0) \subset J_f$, so ist (da J_f invariant)

$$O^+(U) \subset J_f,$$

also $1 \geq \big|\mathbb{C} \setminus O^+(U)\big| \geq |\mathbb{C} \setminus J_f|$ und damit $J_f = \mathbb{C}$, da J_f abgeschlossen ist. □

Bemerkung 10.13 1. Für Polynome f ist nach S. 10.10 und S. 10.12 stets $(J_f)^0 = \emptyset$.
2. Man kann zeigen (auch nicht leicht): Ist $f(z) = \lambda e^z$, wobei $\lambda > 0$, so ist $J_f = \mathbb{C}$ genau dann, wenn $\lambda > 1/e$.

Bemerkung 10.14 Es sei $f \in \mathcal{E}$. Ist $w \in \mathbb{C}$ so, dass $w \notin O^+(U)$ für eine offene Menge U mit $U \cap J_f \neq \emptyset$, so ist

$$O^-(w) \cap O^+(U) = \emptyset.$$

(Denn: Angenommen, es existiert ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $f^n(z_1) = w$ und $z_1 \in f^k(U)$ für gewisse $n, k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$w = f^n(z_1) \in f^n(f^k(U)) = f^{n+k}(U) \subset O^+(U).$$

Widerspruch!)
Nach dem Satz von Montel ist dann

$$O^-(w) \subset \{w\}.$$

Ein $w \in \mathbb{C}$ mit dieser Eigenschaft nennen wir einen *Montelschen Ausnahmewert* von f. Wir schreiben $\widetilde{E}_f$ für die Menge der Montelschen Ausnahmewerte. Damit gilt: Ist U offen mit $U \cap J_f \neq \emptyset$, so ist

$$O^+(U) \supset \mathbb{C} \setminus \widetilde{E}_f.$$

Ist w ein Montelscher Ausnahmewert, so ist entweder $O^-(w) = \emptyset$, d. h. $w \notin f(\mathbb{C})$ (wie etwa $w = 0$ bei $f(z) = e^z$) oder aber $O^-(w) = \{w\}$ und damit w ein Fixpunkt mit $O(w) = \{w\}$ (wie etwa $w = 0$ bei $f(z) = ze^z$ oder auch bei $f(z) = z^2$).
Es sei f ein Polynom. Dann ist $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ (Fundamentalsatz der Algebra). Ist $w \in \mathbb{C}$ mit $O(w) = \{w\}$, so hat die Gleichung $f(z) = w$ nur die Lösung w. Damit ist

$$f(z) - w = c(z - w)^d \tag{10.1}$$

mit $d = \deg(f)$ (≥ 2) und einer Konstante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dies sind also die einzigen Polynome, bei denen ein Montelscher Ausnahmewert existiert. In diesem Fall ist zudem $w \in F_f$ als superattraktiver Fixpunkt (beachte $f'(w) = 0$ dann).
Für transzendente f ist $\widetilde{E}_f \subset E_f$, also jeder Montelsche Ausnahmewert auch ein Picardscher (wovon es nur höchstens einen gibt).
Nach diesen Überlegungen ist stets $|\widetilde{E}_f| \leq 1$ und dabei $\widetilde{E}_f \subset F_f$, falls f ein Polynom ist.

Satz 10.15 *Es sei $f \in \mathcal{E}$. Dann gilt für alle $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $U \cap J_f \neq \emptyset$*

$$O^+(U \cap J_f) \supset J_f \setminus \widetilde{E}_f.$$

Ist f ein Polynom, so gilt $\bigcup_{n=1}^{N} f^n(U \cap J_f) = J_f$ für N genügend groß.

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich aus B. 10.14 und der Tatsache, dass $O^+(J_f \cap U) = J_f \cap O^+(U)$ gilt (beachte: J_f ist vollständig invariant). Ist f ein Polynom, so ist $\widetilde{E}_f \subset F_f$ und damit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U \cap J_f) = O^+(U \cap J_f) = J_f$. Da J_f kompakt und $f^n(U)$ offen in $\mathbb{C}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ (und damit $f^n(U \cap J_f) = J_f \cap f^n(U)$ offen in J), ist $\bigcup_{n=1}^{N} f^n(U \cap J_f) = J_f$ für N genügend groß. $\square$

Bemerkung 10.16 Sind $f : X \to X$, $x \in X$ und $M \subset X$, so ist $x \in O^+(M)$ genau dann, wenn $M \cap O^-(x) \neq \emptyset$. Damit ergibt sich aus S. 10.15 unmittelbar: Ist $f \in \mathcal{E}$ und ist $z \in J_f \setminus \widetilde{E}_f$, so ist $O^-(z)$ dicht in J_f. Ist f ein Polynom, so gilt dies für alle $z \in J_f$.
Dies kann genutzt werden, um Bilder von J_f zu erzeugen. Man startet mit einem beliebigen $z \in J_f$ (kein Montelscher Ausnahmewert) und berechnet sukzessive die entsprechenden Urbilder. Die Vereinigung ,,füllt J_f dicht auf".

Ist $X \neq \emptyset$ und ist $f : X \to X$, so heißt $x_0 \in X$ *periodisch*, falls $f^p(x_0) = x_0$ für ein $p \in \mathbb{N}$ gilt. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so heißt eine Menge $M \subset X$ *perfekt*, falls M kompakt ist und jeder Punkt von M Häufungspunkt von M ist.

Satz 10.17 *Ist $f \in \mathcal{E}$ ein Polynom, so gilt $J_{f^m} = J_f$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und J_f ist perfekt.*

Beweis. 1. $J_{f^m} = J_f$ als [Ü].
2. Es sei $z \in J_f$ gegeben. Wir zeigen zunächst: Es existiert ein $\zeta \in J_f$ mit $z \in O^+(\zeta)$ und $\zeta \notin O^+(z)$, also $\zeta \in O^-(z) \setminus O^+(z)$.
(Denn: Ist z nicht periodisch, so kann man $\zeta \in O^-(z)$ beliebig wählen ($O^-(z)$ ist nicht leer). Es sei also z periodisch und $p \in \mathbb{N}$ die minimale Periode von z. Nach 1. ist $z \in J_{f^p}$ und nach B. 10.14 kein Montelscher Ausnahmewert von f^p. Also existiert ein $\zeta \in O^-_{f^p}(z) \setminus \{z\} \subset O^-(z)$. Dabei ist $\zeta \notin O^+(z)$, denn sonst wäre $\zeta = f^k(z)$ für ein $k < p$ wegen $f^p(z) = z$. Damit wäre mit m so, dass $f^{mp}(\zeta) = z$,

$$f^k(z) = f^k\big(f^{mp}(z)\big) = f^{mp}\big(f^k(z)\big) = f^{mp}(\zeta) = z$$

im Widerspruch zur Minimalität von p.)
Es sei nun U eine Umgebung von z. Ist ζ wie oben, so ist $\zeta \in f^n(U \cap J_f)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ nach S. 10.15. Ist $\eta \in U \cap J_f$ mit $f^n(\eta) = \zeta$, so ist $\eta \neq z$ da $\zeta \notin O^+(z)$. Damit ist z ein Häufungspunkt von J_f. Da J_f kompakt ist, ist J_f perfekt. □

Bemerkung 10.18 Die Aussage von S. 10.17 gilt auch für transzendente Funktionen f in dem Sinne, das jedes $z \in J_f$ Häufungspunkt von J_f ist. Dies ist allerdings schwieriger zu beweisen (wie oben erwähnt, ist schon $J_f \neq \emptyset$ schwer zu zeigen).

Bemerkung und Definition 10.19 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.
1. Eine Menge $M \subset X$ heißt *G_δ-Menge*, falls M abzählbarer Durchschnitt offener Mengen ist. Es gilt damit der Satz von Baire ([Ü]): Ist (X, d) vollständig, so sind abzählbare Durchschnitte dichter G_δ-Mengen dicht in X.
2. Ist $M \subset X$ perfekt, so ist M lokal überabzählbar, d. h. für jede offene, nichtleere Menge $U \subset X$ mit $U \cap M \neq \emptyset$ ist $U \cap M$ überabzählbar ([Ü]).
3. (X, d) heißt *separabel*, falls eine abzählbare dichte Teilmenge existiert.

Satz 10.20 *Es seien $(X, d = d_X)$ ein vollständiger metrischer Raum und $(Y, d = d_Y)$ ein separabler metrischer Raum. Weiter sei (T_n) eine Folge stetiger Abbildungen $T_n : X \to Y$. Ist $M := \{x \in X : \{T_n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $Y\}$, so ist M eine G_δ-Menge und folgende Aussagen sind äquivalent:*

a) *Für alle $\emptyset \neq U \subset X, \emptyset \neq V \subset Y$ offen existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$T_n(U) \cap V = \emptyset \qquad (\Leftrightarrow T_n^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset).$$

b) *M ist dicht in X.*

Beweis. Es sei $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ dicht in Y und

$$\mathcal{U} := \{U_{1/k}(y_j) : j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist $\mathcal{U}$ eine Basis von Y, d. h. jede offene, nichtleere Menge enthält eine Menge aus $\mathcal{U}$. Es sei $(W_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathcal{U}$. Dann ist $x \in M$ genau dann, wenn zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $T_n(x) \in W_m$, d. h. $x \in T_n^{-1}(W_m)$. Also ist

$$M = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} O_m,$$

wobei $O_m := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n^{-1}(W_m)$ offen ist ($m \in \mathbb{N}$). Insbesondere ist M eine G_δ-Menge.
Weiter gilt a) genau dann, wenn O_m dicht in X ist für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit ist b) $\Rightarrow$ a) klar und a) $\Rightarrow$ b) eine Folgerung aus dem Satz von Baire. □

Satz 10.21 *Ist $f \in \mathcal{E}$ mit $\widetilde{E}_f \cap J_f = \emptyset$, so ist $\{z \in J_f : O^+(z)$ dicht in $J_f\}$ eine dichte G_δ-Menge in J_f.*

Beweis. Zunächst ist J_f vollständig (da abgeschlossen in $\mathbb{C}$) und separabel (etwa nach B. 10.16). Es sei $T_n : J_f \to J_f, T_n(z) = f^n(z)$. Nach S. 10.15 ist

$$O^+(U \cap J_f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n(U \cap J_f) = J_f$$

für alle U offen in $\mathbb{C}$ mit $U \cap J_f \neq \emptyset$. Damit ist insbesondere a) aus S. 10.20 erfüllt (man beachte: $A \subset J_f$ ist offen genau dann, wenn $A = A_0 \cap J_f$ für eine offene Menge $A_0 \subset \mathbb{C}$). □

Bemerkung 10.22 1. Der Satz gilt auch ohne die Voraussetzung $\widetilde{E}_f \cap J_f = \emptyset$, allerdings braucht man dann für den Beweis, dass J_f keine isolierten Punkte hat (damit ist insbesondere $w \in \widetilde{E}_f \cap J_f$ nicht isoliert in J_f). Dies haben wir bemerkt (B. 10.18), aber nicht bewiesen.
2. Ist $z \in J_f$ periodisch, so ist $O^+(z)$ endlich und damit nicht dicht in J_f. Man kann zeigen, dass auch eine dichte Menge periodischer Punkte in J_f existiert (für Polynome nicht so schwer).

11 Rungetheorie und Anwendungen

Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und ist $f \in H(\Omega)$, so gilt für jedes $z_0 \in \Omega$ mit $R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^\nu = \lim_{n\to\infty} s_n(z)$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $U_R(z_0)$, wobei

$$s_n(z) = s_n(f, z_0, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^\nu$$

das n-te Taylor-Polynom von f bezüglich z_0 bezeichnet.
Ist $V_{r,R}(a) \subset \Omega$ für ein $a \in \mathbb{C}$ und gewisse $0 \le r < R \le \infty$, so hat f in $V_{r,R}(a)$ eine Laurent-Entwicklung. Ist

$$s_n(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu (z - a)^\nu$$

die n-te Teilsumme der Laurent-Entwicklung, so gilt $s_n \to f$ gleichmäßig auf allen kompakten Mengen $K \subset V_{r,R}(a)$. Insbesondere ist damit f auf solchen K gleichmäßig approximierbar durch rationale Funktionen mit Polen ausschließlich in a und ∞, wobei eine rationale Funktion q einen Pol an ∞ hat, wenn $|q(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$ gilt.

Wir wollen der Frage nachgehen, inwiefern f auf allgemeineren kompakten Mengen durch Polynome oder rationale Funktionen (gleichmäßig) approximiert werden kann.
Ist G ein Gebiet mit Löchern, so kann man im Allgemeinen nicht jede Funktion in $H(G)$ durch Polynome gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen approximieren:

Beispiel 11.1 Es sei $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(z) = 1/z\,(z \in G)$. Für $r > 0$ existiert keine Folge (p_n) von Polynomen mit

$$p_n \to f \text{ gleichmäßig auf } K_r(0).$$

(Angenommen, doch. Dann folgt

$$0 = \int_{K_r(0)} p_n(\zeta)d\zeta \to \int_{K_r(0)} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i \qquad (n \to \infty).$$

Widerspruch!)

Bemerkung und Definition 11.2 Im Weiteren schreiben wir $\operatorname{span} M$ für den linearen Spann einer Teilmenge M eines linearen Raumes. Wir setzen damit für $K \Subset \mathbb{C}$

$$H(K) := \{f : K \to \mathbb{C} : \exists U \supset K \text{ offen und } F \in H(U) : F_{|K} = f\}$$

sowie

$$P(K) := \overline{\operatorname{span}}^K \{z \mapsto z^\nu : \nu \in \mathbb{N}_0\},$$

wobei $\overline{\text{span}}^K M := \overline{\text{span}\, M}^{(C(K,\mathbb{C}),||\cdot||_{\infty,K})}$. Allgemeiner setzen wir für $A \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$

$$R_A(K) := \overline{\text{span}}^K \{g_a^\nu : a \in A, \nu \in \mathbb{N}_0\},$$

wobei $g_a : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ definiert ist durch

$$g_a(z) := \begin{cases} \frac{1}{a-z}, & \text{falls } a \in \mathbb{C} \\ z, & \text{falls } a = \infty \end{cases}.$$

(Damit ist $P(K) = R_{\{\infty\}}(K)$). Mittels Partialbruchzerlegung kann man zeigen, dass der lineare Spann der g_a^ν ($a \in A$, $\nu \in \mathbb{N}_0$) der Menge der rationalen Funktionen mit Polen nur in A entspricht ([Ü]).
Ist etwa $K = U_R[z_0]$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, so ergibt sich mit Taylor-Entwicklung

$$H(K) \subset P(K).$$

Entsprechend folgt mit Laurent-Entwicklung für $K = \{z : r \leq |z-a| \leq R\}$, wobei $a \in \mathbb{C}$ und $0 < r \leq R < \infty$,

$$H(K) \subset R_{\{a,\infty\}}(K).$$

Aus B. 11.1 ergibt sich $g_0 \notin P(K)$ für $K = K_r(0)$, also insbesondere $H(K) \not\subset P(K)$.

Der folgende Satz ist für die weiteren Dinge von zentraler Bedeutung. Für $a, b \in \mathbb{C}$ nennen wir den Pfad $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \gamma_{a,b}(t) := a + t(b-a)$ die *orientierte Strecke* von a nach b.

Satz 11.3 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $K \Subset \Omega$. Dann existiert ein in Ω nullhomologer Zyklus $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ bestehend aus orientierten (achsenparallelen) Strecken γ_ι und so, dass*

$$\text{ind}_\gamma(z) = 1 \qquad (z \in K).$$

Beweis. Es sei

$$\delta := \text{dist}(K, \partial\Omega) \ (> 0).$$

Wir betrachten das Gitter $d\mathbb{Z} + id\mathbb{Z}$, wobei die „Maschenweite" d so ist, dass $d\sqrt{2} < \delta$ (hier ist $d\mathbb{Z} + id\mathbb{Z} = \{dx + idy : x, y \in \mathbb{Z}\}$). Es seien $Q_1, \ldots, Q_N$ die (endlich vielen) kompakten Quadrate mit Ecken in $d\mathbb{Z} + id\mathbb{Z}$, die K treffen (also nichtleeren Schnitt mit K haben). Für $L := \bigcup_{n=1}^N Q_n$ gilt dann

$$K \subset L^0 \subset L \subset \Omega.$$

(Denn: Aus der Definition der Q_n folgt $K \subset L$ und $K \cap \partial L = \emptyset$. Ist $n \in \{1, \ldots, N\}$ und ist $z_n \in Q_n \cap K$, so gilt $U_\delta(z_n) \subset \Omega$. Da $\text{diam}(Q_n) = d\sqrt{2} < \delta$ ist, folgt $Q_n \subset \Omega$.)
Ist Q ein beliebiges kompaktes Quadrat mit Ecken a, b, c, d (positiv orientiert), so ist $\partial Q = \gamma_Q^*$, wobei

$$\gamma_Q := (\gamma_{a,b}, \gamma_{b,c}, \gamma_{c,d}, \gamma_{d,a})$$

ein geschlossener Pfad ist. Wir betrachten nun diejenigen (in dieser Weise orientierten) Strecken, deren Spur zum Rand ∂L von L gehört, und bezeichen diese mit γ_ι ($\iota \in I$). Die Konstruktion der γ_ι zeigt, dass für eine geeignete Zerlegung $(I_\kappa)_{\kappa\in M}$ von I die Ketten $(\gamma_\iota)_{\iota\in I\kappa}$ geschlossene Pfade sind ([Ü]; wichtig dabei: jede Ecke ist gleich oft Anfangs- und Endpunkt). Damit ist $\gamma := (\gamma_\iota)_{\iota\in I}$ ein Zyklus und es gilt

$$\gamma^* = \bigcup_{\iota\in I} \gamma_\iota^* = \partial L \subset \Omega \setminus K.$$

Für beliebige kompakte Quadrate Q gilt ([Ü])

$$\mathrm{ind}_{\gamma_Q}(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in Q^0 \\ 0, & \text{falls } z \notin Q \end{cases}.$$

Nach obiger Konstruktion ist damit

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\iota\in I} \int\limits_{\gamma_\iota} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{ind}_{\gamma_{Q_n}}(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in \bigcup_{n=1}^N Q_n^0 \\ 0, & \text{falls } z \notin L \end{cases}$$

(man beachte: die auf der linken Seite „fehlenden" Strecken werden je zweimal in entgegengesetzter Orientierung durchlaufen).
Aus Stetigkeitsgründen gilt $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 1$ auch für beliebiges $z \in L^0$ und damit auf K. □

Eine erste Version eines Runge-Satzes ist die folgende

Satz 11.4 *(Runge für rationale Approximation mit freien Polen)*
Für jedes $K \Subset \mathbb{C}$ ist

$$H(K) \subset \overline{\mathrm{span}}^K\{g_a : a \in \mathbb{C} \setminus K\}.$$

Beweis. Wir wählen eine offene Umgebung Ω von K so, dass ein $F \in H(\Omega)$ existiert mit $F_{|K} = f$. Ist $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota\in I}$ wie in S. 11.3, so gilt nach dem Cauchy Theorem

$$f(z) = F(z) = (C_\gamma F)(z) = \sum_{\iota\in I} (C_{\gamma_\iota} F)(z) \qquad (z \in K).$$

Da $\gamma^* \subset \mathbb{C} \setminus K$ gilt, reicht es daher zu zeigen: Ist $\tau := \gamma_{a,b}$ eine orientierte Strecke in $\mathbb{C} \setminus K$ und ist $g \in C(\tau^*)$, so gilt

$$C_\tau g \in \overline{\mathrm{span}}^K\{g_a : a \in \tau^*\}.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da

$$\tau^* \times K \ni (\zeta, z) \mapsto \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \in \mathbb{C}$$

(gleichmäßig) stetig auf $\tau^* \times K \Subset \mathbb{C}^2$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{g(\zeta')}{\zeta' - z} \right| < \varepsilon \qquad (\zeta, \zeta' \in \tau^*, |\zeta - \zeta'| < \delta; z \in K).$$

Weiter existieren

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

so, dass für

$$\tau_j := \tau_{|[t_{j-1},t_j]} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

gilt

$$|\zeta - \zeta'| < \delta \qquad (\zeta, \zeta' \in \tau_j^*; j = 1, \ldots, n).$$

Wählt man $a_j \in \tau_j^*$ und setzt damit

$$c_j := g(a_j) \int\limits_{\tau_j} d\zeta \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

so folgt für $z \in K$

$$\begin{aligned}\left|2\pi i C_\tau g(z) - \sum_{j=1}^n c_j \frac{1}{a_j - z}\right| &= \left|\sum_{j=1}^n \left(\int\limits_{\tau_j} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int\limits_{\tau_j} \frac{g(a_j)}{a_j - z}\, d\zeta\right)\right| \\ &\le \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^n L(\tau_j) = \varepsilon \cdot L(\tau) = \varepsilon |b - a|.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\left\| C_\tau g - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n c_j g_{a_j} \right\|_{\infty, K} < \frac{|b-a|}{2\pi} \varepsilon.$$

□

Der Beweis zeigt, dass in der Situation von S. 11.4 die (einfachen) Pole a in γ^* gewählt werden können, wenn γ wie in S. 11.3 ist. Lässt man Pole höherer Ordnung zu, so kann man eine wesentlich genauere Aussage hinsichtlich der Lage der Pole machen.

Satz 11.5 *Es sei $K \Subset \mathbb{C}$.*

1. *Trifft $A \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, so ist*

$$H(K) \subset R_A(K)$$

(Runge für rationale Approximation mit vorgegebenen Polen).

2. *Ist $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ zusammenhängend, so ist*

$$H(K) \subset P(K)$$

(Runge für polynomiale Approximation).

Beweis. Es reicht, die erste Aussage zu beweisen. Die zweite ergibt sich dann unmittelbar aus der ersten mit $A = \{\infty\}$.

Es sei G eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$. Nach S. 11.4 reicht es, zu zeigen: Für alle $a \in G$ ist $g_a \in R_A(K)$. Wir definieren $\varphi : G \to C(K)$ durch

$$\varphi(a) := g_a \qquad (a \in G).$$

Dann ist φ stetig.
(Denn: Es seien $a \in G$ und $\delta := \operatorname{dist}(a, K)$. Ist (a_n) eine Folge in G mit $a_n \to a$, so ist $\operatorname{dist}(a_n, K) \geq \delta/2$ für n genügend groß. Aus

$$\frac{1}{a_n - z} - \frac{1}{a - z} = \frac{a - a_n}{(a_n - z)(a - z)}$$

folgt

$$\|g_{a_n} - g_a\|_{\infty,K} \leq \frac{2}{\delta^2} |a - a_n| \to 0 \qquad (n \to \infty).)$$

Wir setzen $V := \varphi^{-1}\big(R_A(K)\big)$. Dann ist $V \subset G$ abgeschlossen, da $R_A(K) \subset C(K)$ abgeschlossen ist.
Wir zeigen: $\emptyset \neq V$ offen. Da G ein Gebiet ist, ist dann schon $V = G$ und damit $g_a \in R_A(K)$ für alle $a \in G$.
<u>$V \neq \emptyset$</u>: Nach Definition ist $A \cap G \subset V$. Ist G beschränkt, so ist G auch eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Nach Voraussetzung existiert ein $b \in A \cap G (\subset V)$.
Ist G die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$, so ist $G_\infty := G \cup \{\infty\}$ die Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, die ∞ enthält. Ist $b \in A \cap G_\infty$, so ist im Falle $b \neq \infty$ wieder $b \in A \cap G \subset V$. Ist $b = \infty$, so ergibt sich für $|a| > \max_{z \in K} |z|$

$$g_a(z) = \frac{1}{a - z} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - z/a} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{a^{\nu+1}} z^\nu$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf K. Damit ist $g_a \in P(K) = R_\infty(K) \subset R_A(K)$.
<u>V offen</u>: Es sei $b \in V$, d. h. $g_b \in R_A(K)$. Ist $\delta := \operatorname{dist}(b, K)$, so gilt für $a \in U_{\delta/2}(b)$

$$g_a(z) = \frac{1}{b - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b-a}{b-z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (b - a)^\nu \frac{1}{(b - z)^{\nu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (b - a)^\nu g_b^{\nu+1}(z)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf K (beachte: $\left|\frac{b-a}{b-z}\right| \leq 1/2$). Man kann zeigen, dass $R_A(K)$ eine Funktionenalgebra ist ([Ü]). Damit ist insbesondere $g_b^{\nu+1} \in R_A(K)$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$. Also ist auch $g_a \in R_A(K)$. □

Beispiel 11.6 1. Es existiert eine Folge (p_n) von Polynomen mit

$$p_n(0) \to \infty \text{ und } p_n \to 0 \text{ punktweise auf } \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (n \to \infty).$$

(Denn: Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$L_n := \{z = re^{i\varphi} : 1/n \leq r \leq n, \, -\pi \leq \varphi \leq \pi(1 - 1/n)\} \quad \text{und} \quad K_n := L_n \cup \{0\}.$$

Dann ist $K_n \Subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{C}\backslash K_n$ (bzw. $\mathbb{C}_\infty \backslash K_n$) zusammenhängend. Nach S. 11.5.2, angewandt auf $f_n \in H(K_n)$ mit

$$f_n(z) := \begin{cases} 0, & z \in L_n \\ n, & z = 0 \end{cases},$$

existiert ein Polynom p_n mit

$$\|f_n - p_n\|_{\infty,K_n} < \frac{1}{n}.$$

Ist $z \neq 0$, so ist $z \in L_n$ für n genügend groß. Also gilt (für n gengend groß)

$$\left|p_n(z)\right| = \left|p_n(z) - f_n(z)\right| < \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)).$$

Außerdem ergibt sich

$$|p_n(0)| \geq |f_n(0)| - |p_n(0) - f_n(0)| \geq n - 1/n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

2. Es existiert eine Folge (p_n) von Polynomen mit

$$p_n \to 0 \text{ punktweise auf } \mathbb{C} \quad (n \to \infty)$$

und so, dass

$$\|p_n\|_{\infty,U_\delta[0]} \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

für alle $\delta > 0$.
(Denn: Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$L_n := U_n[0] \cap \left(\{\mathrm{Im}\ z \leq 0\} \cup \{\mathrm{Im}\ z \geq 2/n\}\right)$$

und

$$M_n := U_n[0] \cap \{\mathrm{Im}\ z = 1/n\}$$

sowie $K_n := L_n \cup M_n$. Dann ist $K_n \Subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \setminus K_n$ zusammenhängend. Also existiert nach S. 11.5.2, angewandt auf

$$f_n(z) := \begin{cases} 0, & z \in L_n \\ n, & z \in M_n \end{cases}$$

(beachte: $f_n \in H(K_n)$), ein Polynom p_n mit

$$\|f_n - p_n\|_{\infty,K_n} < \frac{1}{n}.$$

Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist $z \in L_n$ für n genügend groß. Wie in 1. ergibt sich $p_n(z) \to 0$ $(n \to \infty)$.
Ist $\delta > 0$, so ist $U_\delta[0] \cap M_n \neq \emptyset$ für n genügend groß. Wählt man $z_n \in U_\delta[0] \cap M_n$, so gilt

$$\|p_n\|_{\infty,U_\delta(0)} \geq \left|p_n(z_n)\right| \geq \left|f_n(z_n)\right| - \left|f_n(z_n) - p_n(z_n)\right| \geq n - \frac{1}{n} \to \infty$$

für $n \to \infty$).

Bemerkung 11.7 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $(K_m) = \big(K_m(\Omega)\big)$ die Standardausschöpfung von Ω. Dann gilt: Jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_m$ enthält eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

(Denn: Wir zeigen zunächst, dass für jede Komponente G von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_m$ ein $\zeta \in G \setminus \Omega$ existiert:
Ist G die Komponente, die ∞ enthält, so ist $\infty \in G \setminus \Omega$. Ist G eine weitere Komponente (falls existent), so ist $G \subset U_m[0]$. Nach Definition von K_m existiert zu $z \in G$ ein $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ mit $|z - \zeta| < 1/m$. Dann gilt $z \in U_{1/m}(\zeta) \subset \mathbb{C} \setminus K_m$. Da $U_{1/m}(\zeta)$ zusammenhängend ist, ergibt sich $U_{1/m}(\zeta) \subset G$, also insbesondere $\zeta \in G$.
Damit ist nach Definition von (Zusammenhangs-)Komponenten auch

$$Z_{\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega}(\zeta) \subset Z_{\mathbb{C}_\infty \setminus K_m}(\zeta) = G.$$

Wir schreiben für $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $A \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$

$$R_A(\Omega) := \overline{\operatorname{span}}^{H(\Omega)}\{g_a^\nu : a \in A, \nu \in \mathbb{N}_0\}, \quad P(\Omega) := R_{\{\infty\}}(\Omega).$$

Dann gilt

Satz 11.8 *(Runge für offene Mengen)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

1. *Trifft $A \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, so ist $H(\Omega) = R_A(\Omega)$, d. h. zu jedem $f \in H(\Omega)$ existiert eine Folge (q_n) rationaler Funktionen mit Polen nur in A und*
$$q_n \to f \text{ lokal gleichmäßig auf } \Omega.$$
2. *Ist $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ zusammenhängend, so ist $H(\Omega) = P(\Omega)$, d. h. zu jedem $f \in H(\Omega)$ existiert eine Folge (p_n) von Polynomen mit*
$$p_n \to f \text{ lokal gleichmäßig auf } \Omega.$$

Beweis. Es reicht, die erste Aussage zu zeigen (dann folgt die zweite wieder mit $A := \{\infty\}$). Dazu sei $m \in \mathbb{N}$. Ist G eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_m$ und ist L eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ mit $L \subset G$ (existiert nach B. 11.7), so ist $\emptyset \neq A \cap L \subset A \cap G$. Nach S. 11.5 existiert eine Funktion $q_m \in \operatorname{span}\{g_a^\nu : a \in A, \nu \in \mathbb{N}_0\}$ (also q_m rational mit Polen nur in A) und

$$\|f - q_m\|_{\infty, K_m} < 1/m.$$

Ist $K \Subset \Omega$ beliebig, so ist $K \subset K_m$ für m genügend groß, also

$$\|f - q_m\|_{\infty, K} < 1/m$$

für m genügend groß. □

Bemerkung 11.9 Wir haben bereits am Beginn des Abschnitts (B. 11.1) gesehen, dass etwa für $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Polynome nicht dicht in $H(\Omega)$ sind. Genauer kann man zeigen, dass für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ ist zusammenhängend,

b) $H(\Omega) = P(\Omega)$,

c) (Cauchysche Integralformel) Ist $f \in H(\Omega)$ und ist γ ein Zyklus in Ω, so gilt
$$\int_\gamma f = 0.$$

d) Jeder Zyklus in Ω ist Ω-nullhomolog.

(Denn:
a) $\Rightarrow$ b) ist S. 11.8.2.
b) $\Rightarrow$ c): Für Polynome p gilt nach S. 3.13 stets $\int_\gamma p = 0$ (p hat eine Stammfunktionen auf $\mathbb{C}$). Sind p_n Polynome mit $p_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω, so folgt durch Vertauschung von Integral und Grenzwert auch $\int_\gamma f = 0$.
c) $\Rightarrow$ d): Anwendung von c) auf g_a für $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ (siehe auch Beweis zum Cauchy Theorem).
d) $\Rightarrow$ a): Angenommen, $M := \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ ist nicht zusammenhängend. Dann existieren zwei disjunkte, abgeschlossene Mengen $K, L \subset M$ mit $M = L \cap K$. Da M abgeschlossen in $\mathbb{C}_\infty$ ist, sind auch K, L abgeschlossen in $\mathbb{C}_\infty$. Es sei $\infty \in L$. Ist $U := \mathbb{C} \setminus L$, so ist U offen in $\mathbb{C}$ und $K \Subset U$. Nach S. 11.3 existiert ein Zyklus γ in $U \setminus K = \Omega$ mit $\mathrm{ind}_\gamma(K) = \{1\}$. Damit ist γ nicht Ω-nullhomolog, im Widerspruch zur Voraussetzung.)

Hat $\Omega \subset \mathbb{C}$ keine Löcher, so ist nach B. 6.8 jeder Zyklus in Ω auch Ω-nullhomolog. Also gelten dann alle obigen Aussagen. Insbesondere ist $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ zusammenhängend. Man kann zeigen, dass umgekehrt offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{C}$, für die $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ zusammenhängend ist, keine Löcher haben. Dies klingt zwar sehr einleuchtend, ist aber nicht so leicht zu beweisen.

Als weitere Anwendung der Rungesätze für polynomiale Approximation beweisen wir die Existenz sogenannter universeller Funktionen in zwei Fällen.

Bemerkung 11.10 Wir betrachten dazu nochmal den Raum $(H(\Omega), d)$. Meist ist man weniger an der konkreten Metrik d sondern lediglich an der davon erzeugten Topologie und dabei insbesondere an Umgebungsbasen interessiert.
Wir setzen für $f \in H(\Omega), \varepsilon > 0$ und $K \Subset \Omega$
$$V_{\varepsilon,K}(f) := \{g \in H(\Omega) : \|f - g\|_{\infty,K} < \varepsilon\} \;\big(= f + V_{\varepsilon,K}(0)\big).$$
Dann gilt: $U \subset H(\Omega)$ ist eine Umgebung von $f \in H(\Omega)$ genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ und ein $K \Subset \Omega$ existieren mit
$$V_{\varepsilon,K}(f) \subset U.$$

(Denn: „$\Rightarrow$" Nach Voraussetzung existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f) \subset U$. Wir wählen $M \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{M} < \varepsilon$. Ist $g \in V_{\varepsilon,K_M}(f)$, so ist $\|f-g\|_{\infty,K_M} < \varepsilon$, also auch

$$\max_{1\le m\le M} \min\left(\frac{1}{m}, \|f-g\|_{\infty,K_m}\right) < \varepsilon$$

und damit $d(f,g) < \varepsilon$. Folglich ist $V_{\varepsilon,K_M}(f) \subset U_\varepsilon(f)$.
„$\Leftarrow$" Es sei $V_{\varepsilon,K}(f) \subset U$. Wir wählen $M \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_M$. Für $\varepsilon' := \min\left(\frac{1}{M}, \varepsilon\right)$ gilt dann: Ist $g \in U_{\varepsilon'}(f)$, so ist $\min\left(\frac{1}{M}, \|f-g\|_{\infty,K_M}\right) < \varepsilon'$, also auch $\|f-g\|_{\infty,K_M} < \varepsilon'$, und damit

$$\|f-g\|_{\infty,K} \le \|f-g\|_{\infty,K_M} < \varepsilon' < \varepsilon.)$$

Ist (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to -\infty$, so gilt $e^{z+a_n} \to 0$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ für $n \to \infty$. Entsprechend gilt $e^{z+a_n} \to \infty$ (sphärisch) lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ im Falle $a_n \to +\infty$. Wir wollen nun zeigen, dass das Verhalten ganzer Funktionen unter Translationen typischerweise viel komplizierter ist.
Ist (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, so sagen wir, dass eine Eigenschaft für komager viele $x \in X$ gilt, falls die Eigenschaft auf einer dichten G_δ-Menge gilt (Mengen, deren Komplement eine dichte G_δ-Menge enthält, nennt man mager).

Satz 11.11 *(Birkhoff)*
Es sei (a_n) eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann ist für komager viele $f \in H(\mathbb{C})$ die Menge der Translationen $f(\cdot + a_n)$ dicht in $H(\mathbb{C})$.

Beweis. Für $a \in \mathbb{C}$ betrachten wir den Translationsoperator $\tau_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ mit

$$(\tau_a f)(z) = f(z+a) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Dann ist $\tau_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ stetig. Weiter ist $(H(\mathbb{C}), d)$ (vollständig und) separabel, da die Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ eine dichte Teilmenge in $H(\mathbb{C})$ bilden ([Ü]).
Wir beweisen a) aus S. 10.20 für (τ_{a_n}) (dann folgt aus S. 10.20 die Behauptung).
Es seien also $\emptyset \ne U, V \subset H(\mathbb{C})$ offen. Dann existieren $g, h \in H(\mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0, K \Subset \mathbb{C}$ (ohne Einschränkung $K = U_R[0]$ für ein $R > 0$) mit

$$V_{\varepsilon,K}(g) \subset U, \qquad V_{\varepsilon,K}(h) \subset V.$$

Also reicht es, zu zeigen: Es existiert ein n mit

$$\tau_{a_n}(V_{\varepsilon,K}(g)) \cap V_{\varepsilon,K}(h) \ne \emptyset.$$

Es sei n so, dass $|a_n| > 2R$. Dann ist $K \cap (K + a_n) = U_R[0] \cap U_R[a_n] = \emptyset$ und $K \cup (K + a_n) \Subset \mathbb{C}$ hat zusammenhängendes Komplement. Wir setzen

$$\varphi(z) := \begin{cases} g(z), & z \in K \\ h(z-a_n) = (\tau_{-a_n} h)(z), & z \in K + a_n \end{cases}.$$

Dann ist $\varphi \in H(K)$. Nach S. 11.5.2 existiert ein Polynom p mit

$$\|\varphi - p\|_{\infty, K\cup(K+a_n)} < \varepsilon.$$

Also ist einerseits $\|g-p\|_{\infty,K} < \varepsilon$ (also $p \in V_{\varepsilon,K}(g)$) und andererseits

$$\|h - \tau_{a_n} p\|_{\infty,K} = \|\tau_{-a_n} h - p\|_{\infty, K+a_n} < \varepsilon\ ,$$

d. h. $\tau_{a_n} p \in V_{\varepsilon,K}(h)$. □

Ist $K \Subset \mathbb{C}$, so ist

$$A(K) := \{f \in C(K) : f|_{K^0} \text{ holomorph in } K^0\}$$

mit der Maximium-Norm $||\cdot||_{\infty,K}$ ein Banachraum. Wir betrachten im folgenden Satz den Fall der Disk Algebra $A = A(\overline{\mathbb{D}})$.
In Abschnitt 4 hatten wir gesehen, dass für $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ die Taylor-Teilsummen $s_n f$ (die nach B. 4.3 mit den Fourier-Teilsummen übereinstimmen) auf $\mathbb{S}$ im quadratischen Mittel gegen f konvergieren (also $||f - s_n f||_2 \to 0$). Das Verhalten außerhalb des abgeschlossenen Kreises $\overline{\mathbb{D}}$ ist typischerweise sehr viel komplizierter, wie der folgende Satz zeigt, der im Wesentlichen auf Luh und Chui/Parnes zurückgeht.

Satz 11.12 *Es sei $G = \mathbb{D}^* \setminus (-\infty, -1)$. Dann ist für komager viele $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ die Menge der Taylor-Teilsummen $s_n f$ dicht in $H(G)$.*

Beweis. Die Abbildungen $s_n : A(\overline{\mathbb{D}}) \to H(G)$ sind stetig ([Ü]). Außerdem ist $H(G)$ separabel (die Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ sind dicht in $H(G)$ nach S. 11.8, da $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ zusammenhängend ist).
Wie im Beweis zu S. 11.11 reicht es, zu zeigen: Sind $g \in A(\overline{\mathbb{D}})$, $h \in H(G)$, $K \Subset G$ sowie $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$s_n\big(U_\varepsilon(g)\big) \cap V_{\varepsilon,K}(h) \neq \emptyset,$$

Hierbei kann man ohne Einschränkung $K = K_m(G)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ (und damit K^c zusammenhängend) sowie $g \in H(\overline{\mathbb{D}})$ annehmen (nach dem Satz von Fejér ist $H(\overline{\mathbb{D}})$ dicht in $A(\overline{\mathbb{D}})$; vgl. [Ü]). Da $(\overline{\mathbb{D}} \cup K)^c$ zusammenhängend und $\overline{\mathbb{D}} \cap K = \emptyset$ ist, existiert nach S. 11.5.2 ein Polynom p mit

$$\|g - p\|_{\infty,\overline{\mathbb{D}}} < \varepsilon \text{ und } \|h - p\|_{\infty,K} < \varepsilon.$$

Ist $n > \deg p$, so ist $s_n p = p$. Damit ist $p \in U_\varepsilon(g)$ und $s_n p = p \in V_{\varepsilon,K}(h)$. □

Definition 11.13 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $h_w \in \operatorname{span}\{g_w^\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ für $w \in \Omega$. Hat $A := \{w \in \Omega : h_w \neq 0\}$ keinen Häufungspunkt in Ω, so heißt $(h_w)_{w\in\Omega}$ eine *Hauptteilverteilung* in Ω.

Es stellt sich die Frage, ob zu jeder Hauptteilverteilung in Ω eine in Ω meromorphe Funktion so existiert, dass für alle $w \in \Omega$ die Laurent-Entwicklung um w (also auf $V_{0,\delta_w}(w)$) den Hauptteil h_w hat. Für endliches A ist dies klar (die rationale Funktion $f = \sum_{w\in A} h_w$ ist geeignet). Mithilfe der Rungsätze kann man zeigen, dass die Frage ganz allgemein positiv beantwortet werden kann.

Satz 11.14 *(Mittag-Leffler)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann existiert zu jeder Hauptteilverteilung $(h_w)_{w\in\Omega}$ eine Funktion $f \in M(\Omega)$ mit Hauptteilen h_w an w für alle $w \in \Omega$.

Beweis. Es sei wieder $(K_m)_m$ die Standardausschöpfung von Ω. Für $m \in \mathbb{N}_0$ setzen wir (mit $K_0 := \emptyset$)

$$A_m := A \cap (K_{m+1} \setminus K_m)$$

und (mit $\sum_\emptyset := 0$)

$$f_m := \sum_{w\in A_m} h_w \in H(\mathbb{C} \setminus A_m)$$

(man beachte: A_m ist endlich, da A keinen Häufungspunkt in Ω hat). Dann ist insbesondere $f_m|_{K_m} \in H(K_m)$. Da jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_m$ einen Punkt aus $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ enthält, gilt

$$f_m|_{K_m} \in R_{\mathbb{C}_\infty\setminus\Omega}(K_m)$$

nach S. 11.5, d. h., es existiert eine rationale Funktion $q_m \in H(\Omega)$ (also Pole nur in $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$) mit

$$\|f_m|_{K_m} - q_m\|_{\infty,K_m} < \frac{1}{m^2}$$

(dabei sei $q_m = 0$, falls $K_m = \emptyset$). Also konvergiert

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} (f_\nu - q_\nu)$$

gleichmäßig auf K_m. Daher ist durch

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \big(f_\nu(z) - q_\nu(z)\big) \qquad (z \in \Omega \setminus A)$$

eine Funktion $f \in H(\Omega \setminus A)$ definiert (beachte: die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig auf $\Omega \setminus A$). Dabei ist für alle $m \in \mathbb{N}$

$$f = \sum_{\nu=0}^{m-1} f_\nu + \underbrace{\sum_{\nu=m}^{\infty} (f_\nu - q_\nu) - \sum_{\nu=0}^{m-1} q_\nu}_{=:g_m}$$

mit $g_m \in H(\Omega \setminus \bigcup_{\nu=m}^{\infty} A_\nu)$. Da $K_m \subset \Omega \setminus \bigcup_{\nu=m}^{\infty} A_\nu$ ist, hat f in K_m genau die vorgeschriebenen Pole mit entsprechenden Hauptteilen. Da m beliebig war, folgt die Behauptung. □

12 Die Familie $\mathscr{S}$

Bemerkung und Definition 12.1 Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine injektive Funktion $f \in H(D)$ heißt *schlicht* (in D). In diesem Fall ist f ist eine konforme Abbildung von D auf $f(D) \subset \mathbb{C}$. Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &:= \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ schlicht},\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1\}\\ &= \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ injektiv},\ f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu \ (z \in \mathbb{D})\}.\end{aligned}$$

Für $f \in \mathscr{S}$ und $0 < r \leq 1$ ist $G_r := f(U_r(0))$ ein Gebiet mit $0 \in G_r$ und zusammenhängendem Komplement bezüglich $\mathbb{C}_\infty$ ([Ü]), also ist G_r einfach zusammenhängend (vgl. B. 11.9).

Beispiel 12.2 1. Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \frac{z}{1-z} = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} z^\nu \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Dann ist $f : \mathbb{D} \to \{w : \mathrm{Re}(w) > -1/2\}$ konform, also $f \in \mathscr{S}$.
(Denn: Es gilt

$$2f(z) = \frac{1+z}{1-z} - 1$$

und $\varphi(z) = (1+z)/(1-z)$ bildet $\mathbb{D}$ konform auf $-i\mathbb{H} = \{w : \mathrm{Re}(w) > 0\}$ ab (siehe B. 8.6).
2. (Koebe-Funktion) Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu z^\nu \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Dann ist f eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$, also auch $f \in \mathscr{S}$.
(Denn: Mit φ aus 1. gilt

$$4f(z) = \frac{4z}{(1-z)^2} = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1 = \varphi^2(z) - 1.$$

Da $w \mapsto w^2$ die rechte Halbebene $-i\mathbb{H}$ konform auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ abbildet, ergibt sich die Behauptung durch entsprechende Verknüpfung.)

Bemerkung 12.3 Es seien $f \in \mathscr{S}$ und $0 < |\alpha| \leq 1$. Ist $f_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha} f(\alpha z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu \alpha^{\nu-1} z^\nu \quad (z \in \mathbb{D}),$$

so ist auch $f_\alpha \in \mathscr{S}$.

Satz 12.4 *Ist $f \in \mathscr{S}$, so existiert ein $g \in \mathscr{S}$ mit*

$$g^2(z) = f(z^2) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Beweis. Es sei $f(\zeta) = \zeta\varphi(\zeta)$ $(\zeta \in \mathbb{D})$. Dann ist $\varphi(0) = 1$ und $\varphi(\zeta) \neq 0$ $(\zeta \in \mathbb{D})$. Also existiert ein $\psi \in H(\mathbb{D})$ mit $\psi^2 = \varphi$ (und ohne Einschränkung so, dass $\psi(0) = 1$). Für $g \in H(\mathbb{D})$, definiert durch $g(z) := z\psi(z^2)$ $(z \in \mathbb{D})$, ergibt sich

$$g^2(z) = z^2\psi^2(z^2) = z^2\varphi(z^2) = f(z^2) \qquad (z \in \mathbb{D})$$

und $g \in \mathscr{S}$.
(Denn: Zunächst ist $g(0) = 0$ und $g'(0) = \psi(0) = 1$.
Aus $z, w \in \mathbb{D}$ mit $g(z) = g(w)$ folgt $f(z^2) = f(w^2)$, d. h. $z^2 = w^2$, da f injektiv, also $z = w$ oder $z = -w$. Im zweiten Fall ergibt sich $g(w) = g(z) = -w\psi(w^2) = -g(w)$, also $g(z) = g(w) = 0$. Da $Z(\psi) = Z(\varphi) = \emptyset$, folgt $z = w = 0$.) □

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass für jede Funktion $f \in \mathscr{S}$

$$f(\mathbb{D}) \supset U_{1/4}(0)$$

gilt (Koebescher 1/4-Satz). Dazu betrachten wir zunächst eine andere Familie schlichter Funktionen.

Bemerkung und Definition 12.5 Es sei g schlicht in $\mathbb{D}$ mit $g(0) = 0$. Wir definieren $g^* : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ durch

$$g^*(z) := 1/g(1/z) \quad (z \in \mathbb{D}^*).$$

Dann ist g^* schlicht in $\mathbb{D}^*$. Außerdem ist $\mathbb{C} \setminus g^*(V_{R,\infty}(0))$ für alle $R \geq 1$ kompakt und zusammenhängend.
(Denn: Es sei $r := 1/R$. Dann ist $G_r = g(U_r(0))$ offen in $\mathbb{C}$ (also auch in $\mathbb{C}_\infty$) mit $0 \in G_r$. Da $z \mapsto 1/z$ eine Isometrie auf $\mathbb{C}_\infty$ ist, ist $1/G_r$ offen in $\mathbb{C}_\infty$ mit $\infty \in 1/G_r$, also

$$\mathbb{C} \setminus g^*(V_{R,\infty}(0)) = \mathbb{C}_\infty \setminus \frac{1}{G_r} = \frac{1}{\mathbb{C}_\infty \setminus G_r}$$

kompakt und zusammenhängend nach B./D. 12.1.)
Wir setzen

$$\mathscr{U} := \left\{f \in H(\mathbb{D}^*) : f \text{ schlicht}, \ f(z) = z + O(1) \ (z \to \infty)\right\}.$$

Jedes $f \in \mathscr{U}$ hat (genau) eine Laurent-Entwicklung der Form

$$f(z) = z + \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu / z^\nu,$$

mit lokal gleichmäßiger Konvergenz in $\mathbb{D}^* = V_{1,\infty}(0)$. Außerdem gilt

$$\{g^* : g \in \mathscr{S}\} = \mathscr{U}_0 := \{f \in \mathscr{U} : 0 \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}^*)\}.$$

(Denn:
„$\subset$": Ist $g \in \mathscr{S}$, so ist g^* schlicht in $\mathbb{D}^*$ mit $0 \notin g^*(\mathbb{D}^*)$. Weiter gilt mit einer bei 0 holomorphen Funktion r_1

$$g(w) = w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + \cdots = w + a_2 w^2 + r_1(w) w^3 \qquad (w \in \mathbb{D}),$$

also mit bei 0 holomorphen r_j

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(w)} &= \frac{1}{w} \frac{1}{1 + a_2 w + r_1(w) w^2} = \frac{1}{w} \frac{1}{1 + a_2 w} \cdot \frac{1}{1 + \frac{r_1(w)}{1+a_2 w} w^2} \\
&= \frac{1}{w} (1 - a_2 w + r_2(w) w^2)(1 + r_3(w) w^2) \\
&= \frac{1}{w} (1 - a_2 w)(1 + O(w^2)) \qquad \big(w \to 0\big)
\end{aligned}$$

und damit

$$g^*(z) = z \left(1 - \frac{a_2}{z}\right) \big(1 + O(1/z^2)\big) = z - a_2 + O(1/z) \qquad \big(z \to \infty\big).$$

(Im Weiteren schreiben wir kurz $O(w^k)$ für $w \to 0$ bzw. $O(1/z^k)$ für $z \to \infty$ statt $r_j(w) w^k$ bzw. $r_j(1/z)/z^k$, wenn die konkrete Form von r_j unwichtig ist.)
„$\supset$": Ist $f \in \mathscr{U}_0$, so ist mit analoger Überlegung durch $f^*(z) := 1/f(1/z)$ für $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ und $f^*(0) = 0$ eine Funktion $f^* \in \mathscr{S}$ definiert mit $(f^*)^* = f$.)

Satz 12.6 *(Flächensatz)*
Für $f \in \mathscr{U}$ gilt

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |\alpha_\nu|^2 \leq 1}$$

(und insbesondere $|\alpha_1| \leq 1$).

Beweis. 1. Ohne Einschränkung können wir $\alpha_0 = 0$ (klar) und $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ annehmen (ansonsten: $f(\beta z)/\beta$ für ein geeignetes $\beta \in \mathbb{S}$ betrachten; vgl. B. 12.3). Dann gilt

$$f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + h(z) \qquad \big(|z| > 1\big),$$

wobei $h \in H(\mathbb{D}^*)$ mit $h(z) = O(1/z^2)$ für $z \to \infty$. Wir setzen für $R > 1$

$$U_R := V_{R,\infty}(0), \qquad K_R := K_R(0), \qquad V_R := V_{1,R}(0)$$

und

$$A := R + \frac{\alpha_1}{R}, \qquad B := R - \frac{\alpha_1}{R}.$$

Dann sind $A, B \neq 0$ für R genügend groß. Mit $u := \mathrm{Re} f$ und $v := \mathrm{Im} f$ ergibt sich für $z = Re^{i\varphi} \in K_R$

$$u(z) = A \cos\varphi + \mathrm{Re}\, h(z), \qquad v(z) = B \sin\varphi + \mathrm{Im}\, h(z)$$

und damit für R genügend groß (Division durch A bzw. B, Quadrieren und Addieren)

$$\frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}=1+\frac{2}{A}\cos\varphi\,\operatorname{Re}h+\left(\frac{\operatorname{Re}h}{A}\right)^2+\frac{2}{A}\sin\varphi\,\operatorname{Im}h+\left(\frac{\operatorname{Im}h}{B}\right)^2.$$

Aus $h(z)=O(1/z^2)$ für $z\to\infty$ ergibt sich die Existenz eines $\eta>0$ so, dass für R genügend groß

$$\frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}<1+\frac{\eta}{R^3}$$

gilt. Bezeichnet E_R die (ausgefüllte) Ellipse mit Halbachsen $A\sqrt{1+\eta/R^3}$ und $B\sqrt{1+\eta/R^3}$, also

$$E_R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\le 1+\frac{\eta}{R^3}\right\},$$

so ist damit $f(K_R)\subset E_R^0$ für R genügend groß. Da f schlicht in $\mathbb{D}^*$ ist, sind $f(U_R), f(K_R)$ und $f(V_R)$ paarweise disjunkt. Aus $U_{R'}\subset f(U_R)$ für ein $R'>0$ und der Stetigkeit von f^{-1} ergibt sich mit einem Zusammenhangsargument auch $f(V_R)\subset E_R^0$ (wir verzichten auf die Details).

2. Mit der Substitutionsregel und $g_r(z):=f'(rz)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda_2\big(f(V_R)\big) &= \int\limits_{V_R}|\det J((u,v)^T)|\,d\lambda_2=\int\limits_{V_R}|f'|^2\,d\lambda_2\\ &= \int\limits_1^R\int\limits_0^{2\pi}\left|f'(re^{i\varphi})\right|^2 d\varphi\,r dr=\int\limits_1^R\int\limits_0^{2\pi}\left|g_r(e^{i\varphi})\right|^2 d\varphi\,r dr.\end{aligned}$$

Dabei ist $g_r\in C(\mathbb{S})$ und

$$g_r(z)=1-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu\alpha_\nu}{r^{\nu+1}}\frac{1}{z^{\nu+1}}\quad\text{gleichmäßig auf }\mathbb{S},$$

also mit der Parsevalschen Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|g_r(e^{i\varphi})\right|^2 d\varphi=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2|\alpha_\nu|^2}{r^{2\nu+2}}.$$

Folglich ist

$$\frac{1}{\pi}\lambda_2\big(f(V_R)\big)=2\int\limits_1^R r dr+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^2|\alpha_\nu|^2\int\limits_1^R\frac{dr}{r^{2\nu+1}}=R^2-1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|\alpha_\nu|^2\left(1-\frac{1}{R^{2\nu}}\right)$$

Weiter gilt

$$\lambda_2(E_R)=\pi AB(1+\eta/R^3)=\pi\left(R+\frac{\alpha_1}{R}\right)\left(R-\frac{\alpha_1}{R}\right)\left(1+\frac{\eta}{R^3}\right)\le\pi R^2\left(1+\frac{\eta}{R^3}\right)$$

und damit nach 1.

$$R^2\left(1+\frac{\eta}{R^3}\right)\ge\frac{1}{\pi}\lambda_2(f(V_r))=R^2-1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|a_\nu|^2\left(1-\frac{1}{R^{2\nu}}\right),$$

also
$$\frac{\eta}{R} + 1 \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 \left(1 - \frac{1}{R^{2\nu}}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{R^2}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2$$
für R genügend groß. Durch Grenzübergang $R \to \infty$ ergibt sich die Behauptung. □

Bemerkung 12.7 Es sei $K := \mathbb{C} \backslash f(\mathbb{D}^*)$. Mithilfe des Greenschen Satzes erhält man (siehe etwa Conway, Functions of a Complex Variable II)
$$\lambda_2(K) = \pi\Big(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |\alpha_\nu|^2\Big),$$
also eine Formel für die Fläche von K (daher auch der Name Fächensatz).
Im Falle $f(z) = z$ ist $\alpha_\nu = 0$ $(\nu \in \mathbb{N})$ und $\lambda_2(K) = \lambda_2(\overline{\mathbb{D}}) = \pi$ und im Falle $f(z) = z + 1/z$ ist $\alpha_\nu = \delta_{\nu 1}$ und $\lambda_2(K) = \lambda_2([-2, 2]) = 0$.

Satz 12.8 *Es sei $f \in \mathscr{S}$ mit $f(z) = z + \sum\limits_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$ $(z \in \mathbb{D})$. Dann gilt*

1. $|a_2| \leq 2$,
2. $U_{1/4}(0) \subset f(\mathbb{D})$ *(Koebescher 1/4-Satz).*

Beweis. 1. Es sei $g \in \mathscr{S}$ mit $g^2(z) = f(z^2)$ (existiert nach S. 12.4). Dann gilt ([Ü])
$$g(w) = w\Big(1 + \frac{a_2}{2}\, w^2 + O(w^3)\Big) \qquad (w \to 0).$$
Damit ist $g^* \in \mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$ mit
$$\begin{aligned} g^*(z) &= z \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_2}{2}\, z^{-2} + O(z^{-3})} = \\ &= z \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_2}{2}\, z^{-2}} \cdot \frac{1}{1 + O(z^{-3})} \\ &= z - \frac{a_2}{2}\, z^{-1} + O(z^{-2}) = z + \alpha_1 z^{-1} + O(z^{-2}) \end{aligned}$$
für $z \to \infty$. Nach dem Flächensatz ist
$$1 \geq |\alpha_1| = \Big| - \frac{a_2}{2} \Big|,$$
also $|a_2| \leq 2$.
2. Es sei $w \notin f(\mathbb{D})$. Wir betrachten
$$h(z) = h_w(z) := \frac{f(z)}{1 - f(z)/w} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Dann ist $h \in H(\mathbb{D})$. Außerdem ist h schlicht in $\mathbb{D}$.
(Denn: Es gilt $h = \varphi \circ f$, wobei

$$\varphi(\zeta) := \varphi_w(z) := \frac{\zeta}{1 - \zeta/w} \qquad (\zeta \in \mathbb{C})$$

eine Möbius-Transformation ist.) Schließlich ist

$$\begin{aligned} h(z) &= \Big(z + a_2 z^2 + O(z^3)\Big)\Big(1 + \frac{f(z)}{w} + O(z^2)\Big) \\ &= \big(z + a_2 z^2 + O(z^3)\big)\Big(1 + \frac{z}{w} + O(z^2)\Big)\Big) \\ &= z + \Big(a_2 + \frac{1}{w}\Big) z^2 + O(z^3) \end{aligned}$$

und damit zunächst $h \in \mathscr{S}$ und nach 1. dann auch

$$\Big|a_2 + \frac{1}{w}\Big| \le 2$$

(und $|a_2| \le 2$). Mit der Dreiecksungleichung folgt $|1/w| \le 4$. $\square$

Bemerkung 12.9 Beide Abschätzungen in S. 12.8 sind bestmöglich, denn für die Koebe-Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$$

gilt $a_2 = 2$ und $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \big(-\infty, -1/4\big]$.

Bemerkung 12.10 Ist $K \Subset \mathbb{C}$ mit K und $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend, $|K| \ge 2$, so existiert genau eine konforme Abbildung

$$\psi : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C} \setminus K$$

mit

$$\psi(z) = cz + O(1) \qquad (z \to \infty)$$

und $c > 0$.
(Denn: O.E. sei $0 \in K$. Dann ist $G := 1/(\mathbb{C}_\infty \setminus K)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}_\infty$ und damit auch in $\mathbb{C}$ (da $0 \in K$). Außerdem ist $\mathbb{C}_\infty \setminus G = 1/K$ zusammenhängend. Da $0 \in G \ne \mathbb{C}$ ist, existiert nach dem Riemannschen Abbildungssatz (siehe auch [Ü]) und B. 8.10 genau eine konforme Abbildung $\varphi : \mathbb{D} \to G$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0) > 0$. Nach den Überlegungen in B./D. 12.5 ist die Funktion $\psi := \varphi^*$ dann geeignet. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Eindeutigkeit von φ.)
Die Zahl $c =: \operatorname{cap}(K)$ heißt *(logarithmische) Kapazität* von K.

Als Folgerung aus dem Koebeschen 1/4-Satz ergibt sich

$$\boxed{\operatorname{diam}(K) \leq 4 \cdot \operatorname{cap}(K).}$$

(Denn: Es sei $a \in K$. Dann ist $0 \in K - a$. Ist $\psi : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C} \setminus (K-a)$ die konforme Abbildung von oben (für $K - a$ statt K), so ist $f := \psi/c \in \mathscr{U}_0$ und $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}^*) = (K-a)/c$. Also ist $f^* \in \mathscr{S}$ mit

$$\frac{1}{c}(K-a) = \frac{1}{\mathbb{C}_\infty \setminus f^*(\mathbb{D})}$$

(vgl. B./D. 12.5). Aus dem Koebeschen 1/4-Satz folgt $(K-a)/c \subset U_4[0]$ und damit $K \subset U_{4c}[a]$. Da $a \in K$ beliebig war, ist $\operatorname{diam}(K) \leq 4c$.)

Die Konstante 4 ist bestmöglich, wie die Joukowski-Abbildung zeigt $(\operatorname{cap}\big([-1,1]\big) = 1/2)$.

13 Approximation in $A(K)$

Wir untersuchen nun wieder gleichmäßige Approximation auf kompakten Mengen K in $\mathbb{C}$. Ist

$$f \in R(K) := R_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(K),$$

so gilt $f|_{K^0} \in H(K^0)$.
(Ist (q_n) eine Folge rationaler Funktionen mit Polen in $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ und so, dass $q_n \to f$ gleichmäßig auf K, so folgt aus $q_n|_{K^0} \in H(K^0)$ auch $f|_{K^0} \in H(K^0)$ nach S. 2.12.)
Damit ist

$$P(K) \subset R(K) \subset A(K).$$

B. 11.1 zeigt, dass $P(\mathbb{S}) \neq C(\mathbb{S})(= A(\mathbb{S}))$ gilt (genauer ist $P(\mathbb{S}) = A(\overline{\mathbb{D}})|_{\mathbb{S}}$; siehe [Ü]). Außerdem ist $H(K) \subset R(K)$ nach dem Rungesatz 11.5.
Wir zeigen zunächst, dass auch Kompakta K existieren mit $K^0 = \emptyset$ und so, dass

$$R(K) \neq C(K) \ (= A(K)).$$

Bemerkung 13.1 (Schweizer Käse, A. Roth)
1. Es seien $a_j \in \mathbb{D}$ und $r_j > 0$ $(j \in \mathbb{N})$ mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j < 1$ so, dass die abgeschlossenen Kreise $B_j := U_{r_j}[a_j] \subset \mathbb{D}$ und paarweise disjunkt sind. Dann ist

$$K := K(a_j, r_j) := \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_{r_j}(a_j)$$

kompakt und so, dass $\mathbb{C} \setminus K$ unendlich viele Komponenten hat (sog. Schweizer Käse).
Dabei gilt: Ist $f \in R(K)$, so ist mit $K_j := K_{r_j}(a_j)$

$$\int_{\mathbb{S}} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} f \ . \tag{13.1}$$

(Denn: Es sei q rational mit Polen nur in $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Ist N so groß, dass alle Pole in $\mathbb{D}^* \cup \bigcup\limits_{j=1}^{N} U_{r_j}(a_j)$ liegen, so folgt mit dem Residuensatz für $n \geq N$

$$\int_{\mathbb{S}} q = 2\pi i \sum_{w \in P(q) \cap \mathbb{D}} \operatorname{res}_q(w) = \sum_{j=1}^{n} \int_{K_j} q.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert eine rationale Funktion q mit Polen nur in $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ und $\|f - q\|_{\infty,K} < \varepsilon$. Es folgt für n genügend groß

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{S}} f - \sum_{j=1}^{n} \int_{K_j} f \Big| &= \Big| \int_{\mathbb{S}} (f-q) - \sum_{j=1}^{n} \int_{K_j} (f-q) \Big| \\ &\leq \|f-q\|_{\infty,K} \cdot \Big(2\pi + 2\pi \sum_{j=1}^{n} r_j\Big) < 2\pi\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} r_j\Big) \cdot \varepsilon < 4\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt (13.1)).

2. Ist zusätzlich $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_{r_j}(a_j)$ dicht in $\overline{\mathbb{D}}$, so gilt $K^0 = \emptyset$ (sog. Schweizer Käse ohne innere Punkte).
(Ein solches K existiert: Es sei $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathbb{D} \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$. Wir setzen $a_1 := 0, r_1 := 1/3$ und definieren a_j, r_j $(j = 2, \ldots)$ induktiv. Sind $a_1, \ldots, a_j \in \mathbb{D} \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ und $r_1, \ldots, r_j$ mit $r_j \in (0, 1/3^j)$, so setzen wir

$$n_{j+1} := \min\Big\{n \in \mathbb{N} : w_n \notin \bigcup_{\ell=1}^{j} U_{r_\ell}[a_\ell]\Big\}$$

und $a_{j+1} = w_{n_{j+1}}$ sowie $r_{j+1} \in \big(0, 1/3^{j+1}\big)$ so, dass $U_{r_{j+1}}[a_{j+1}] \subset \mathbb{D}$ und

$$U_{r_{j+1}}[a_{j+1}] \cap \bigcup_{\ell=1}^{j} U_{r_\ell}[a_\ell] = \emptyset.$$

Dann hat K die obigen Eigenschaften (beachte: $\sum\limits_{j=1}^{\infty} 1/3^j = 1/2 < 1$).)

Satz 13.2 *Ist K ein Schweizer Käse mit $0 \notin K$ und ohne innere Punkte, so ist*

$$R(K) \neq C(K)$$

Beweis. Es sei $f \in C(K)$ definiert durch

$$f(z) := \frac{|z|}{z} \qquad (z \in K).$$

Angenommen, es gilt $f \in R(K)$. Dann folgt mit (13.1)

$$2\pi = \Big|\int_{\mathbb{S}} \frac{d\zeta}{\zeta}\Big| = \Big|\int_{\mathbb{S}} f(\zeta)d\zeta\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{\infty}\int_{K_j} f\Big| \le \sum_{j=1}^{\infty}\Big|\int_{K_j} f\Big| \le \underbrace{\|f\|_{\infty,K}}_{=1} \cdot 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} r_j < 2\pi.$$

Widerspruch! □

Bemerkung 13.3 1. Ist $K = K(a_j, r_j)$ ein Schweizer Käse, so gilt

$$\lambda_2\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_{r_j}(a_j)\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_2(U_{r_j}(a_j)) = \pi\sum_{j=1}^{\infty} r_j^2 < \pi\sum_{j=1}^{\infty} r_j < \pi$$

und damit $\lambda_2(K) = \pi(1 - \sum\limits_{j=0}^{\infty} r_j^2) > 0$. Genauer können zu jedem $\delta > 0$ die r_j so gewählt werden, dass $\lambda_2(K) > \pi(1-\delta)$ gilt, also kann die Fläche beliebig nahe an der Fläche des Einheitskreises liegen.
2. Es gibt auch Schweizer Käse mit $K^0 \neq \emptyset$ und so, dass $R(K) \neq A(K)$ (siehe etwa Gaier, Vorlesungen über Approximation im Komplexen).

Wir wollen nun genau klären, was $P(K)$ ist.

Bemerkung und Definition 13.4 Es sei $K \Subset \mathbb{C}$. Ist U die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$, so heißt

$$\widehat{K} := \mathbb{C} \setminus U \ (= K, \text{falls } \mathbb{C} \setminus K \text{ zusammenhängend})$$

die *polynom-konvexe Hülle* von K (also: $\widehat{K}$ ist die Vereinigung von K und allen beschränkten Komponenten von $\mathbb{C} \setminus K$). Nach dem Maximumprinzip gilt für Polynome p

$$\|p\|_{\infty,K} = \|p\|_{\infty,\widehat{K}}.$$

(Denn: Ist G eine beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$, so ist $\overline{G} \Subset \mathbb{C}$ und $\partial G \subset K$, also ist $\|p\|_{\infty,\overline{G}} = \|p\|_{\infty,\partial G} \leq \|p\|_{\infty,K}$.)
Gilt also $f \in P(K)$, so existiert eine Folge (p_n) von Polynomen mit

$$p_n \to f \text{ gleichmäßig auf } K.$$

Dann ist (p_n) auch eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf $\widehat{K}$. Also existiert ein $F \in A(\widehat{K})$ mit

$$p_n \to F \text{ gleichmäßig auf } \widehat{K},$$

wobei $F|_K = f$ gilt und F eindeutig bestimmt ist durch f nach dem Maximumprinzip. (Genauer ist mit

$$A(\widehat{K})|_K = \{f \in C(K) : \exists\, F \in A(\widehat{K}) : F|_K = f\}$$

die Abbildung $A(\widehat{K}) \ni F \mapsto F|_K \in A(\widehat{K})|_K$ ein isometrischer Isomorphismus). Damit ergibt sich $P(K) \subset A(\widehat{K})|_K$.

Der folgende Satz gibt eine abschließende Antwort auf die Frage, welche Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig durch Polynome approximiert werden können.

Satz 13.5 *(Mergelian) Es sei $K \Subset \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$P(K) = A(\widehat{K})|_K$$

und speziell für $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend (d. h. $K = \widehat{K}$)

$$P(K) = A(K).$$

Für den Beweis benötigen vorweg eine Reihe für sich genommen interessanter Ergebnisse aus der Analysis. Wir setzen für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{C})$

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

sowie

$$C_c(\Omega) := \{f \in C(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \Subset \Omega\},$$
$$C_c^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \Subset \Omega\} \qquad \big(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\big).$$

Bemerkung 13.6 Es sei $K \Subset \mathbb{R}^d$.
1. Ist $U \supset K$ offen, so existiert ein $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$ und $\varphi|_K \equiv 1$. (Denn: Ohne Einschränkung sei U beschränkt. Mit $\delta := \operatorname{dist}(K, \partial U)$ ist $\varphi : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ mt

$$\varphi(x) := \max\Big(0, 1 - \frac{2}{\delta}\operatorname{dist}(x,K)\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

geeignet.)
2. Unter Verwendung von 1. zeigen wir:

a) (Erweiterungssatz von Tietze)
Ist $f \in C(K)$ und $U \supset K$ offen, so existiert ein $F \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $F|_K = f$ und $\operatorname{supp}(F) \subset U$.

b) (stetige Zerlegung der Eins bezüglich einer offenen Überdeckung)
Sind $U_1, \dots, U_m$ offen mit $K \subset \bigcup_{j=1}^m U_j$, so existieren Funktionen $\psi_1, \dots, \psi_m \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \le \psi_j \le 1$, $\operatorname{supp}(\psi_j) \subset U_j$ $(j = 1, \dots, m)$ und

$$\sum_{j=1}^m \psi_j|_K \equiv 1.$$

Zu a): Ohne Einschränkung kann man f reellwertig mit $f(K) \subset [-1, 1]$ annehmen.
Es sei U_0 offen und beschränkt mit $K \subset U_0$ und $\overline{U_0} \subset U$. Wir setzen

$$K^+ := \big\{x \in K : f(x) \ge 1/3\big\}, \quad K^- := \big\{x \in K : f(x) \le -1/3\big\}.$$

Dann ist $K^\pm \Subset K$ und $\operatorname{dist}(K^+, K^-) > 0$. Sind $U^\pm \subset U_0$ offen und disjunkt mit $K^\pm \subset U^\pm$, so existieren nach 1. Funktionen $\varphi^\pm \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi^\pm|_{K^\pm} = 1$, $0 \le \varphi^\pm \le 1$ und $\operatorname{supp}(\varphi^\pm) \subset U^\pm$. Damit ist $f_1 := (\varphi^+ - \varphi^-)/3 \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(f_1) \subset U_0$, $\|f_1\|_{\infty,\mathbb{R}^d} \le 1/3$ und $f_1|_{K^\pm} \equiv \pm 1/3$, also

$$|f - f_1\|_{\infty,K} \le 2/3.$$

Mit entsprechender Argumentation (mit $f - f_1$ statt f) existiert ein $f_2 \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(f_2) \subset U_0$, $\|f_2\|_{\infty,\mathbb{R}^d} \le \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ und

$$\|f - f_1 - f_2\|_{\infty,K} \le (2/3)^2.$$

Induktiv erhält man eine Folge (f_n) in $C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(f_n) \subset U_0$ sowie

$$\|f - \sum_{\nu=1}^n f_\nu\|_{\infty,K} \le \Big(\frac{2}{3}\Big)^n, \qquad \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^d} \le \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}.$$

Damit konvergiert $F := \sum\limits_{\nu=1}^\infty f_\nu$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^d$ (also $F \in C(\mathbb{R}^d)$) mit

$$\sum_{\nu=1}^\infty f_\nu|_K = f.$$

Aus $\operatorname{supp}(f_n) \subset U_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\operatorname{supp}(F) \subset \overline{U_0} \Subset U$.

Zu b): Ohne Einschränkung seien $U_1, \dots, U_m$ beschränkt. Für $x \in K$ sei $\delta_x > 0$ so, dass $U_{\delta_x}[x] \subset U_j$ für ein $j \in \{1, \dots, m\}$. Dann ist $\big(U_{\delta_x}(x)\big)$ eine offene Überdeckung von K, also existieren $x_1, \dots, x_N \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N} U_{\delta_{x_n}}(x_n).$$

Für $j \in \{1, \dots, m\}$ seien

$$I_j := \big\{n \in \{1, \dots, N\} : U_{\delta_{x_n}}[x_n] \subset U_j\big\}$$

und (mit $\bigcup_{\emptyset} := \emptyset$)

$$L_j := \bigcup_{n \in I_j} U_{\delta_{x_n}}[x_n] \Subset U_j.$$

Nach 1. existiert ein $\varphi_j \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi_j|_{L_j} \equiv 1$, $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset U_j$ und $0 \le \varphi_j \le 1$. Wir setzen (mit $\prod_{\emptyset} := 1$)

$$\psi_j := \varphi_j \prod_{\ell=1}^{j-1}(1 - \varphi_\ell) \qquad (j = 1, \dots, m).$$

Dann gilt $\operatorname{supp}(\psi_j) \subset \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset U_j$ und $0 \le \psi_j \le 1$ $(j = 1, \dots, m)$ sowie

$$\sum_{j=1}^{m} \psi_j = 1 - \prod_{j=1}^{m}(1 - \varphi_j)$$

(wie man induktiv sieht). Da nach Konstruktion $K \subset \bigcup_{j=1}^m L_j$ gilt, ist die rechte Seite (und damit auch die linke) $\equiv 1$ auf K.

Bemerkung 13.7 Wir schreiben im Weiteren kurz $C_c^k := C_c^k(\mathbb{C})$ und $C_c := C_c(\mathbb{C})$. Für Beweise zu den folgenden Ergebnissen verweisen wir etwa auf Conway, Functions of one Complex Variable II, Section 18.3.

1. Sind $f \in C_c$ und g (messbar und) lokal integrierbar auf $\mathbb{C}$, d. h. $\int_K |g| d\lambda_2 < \infty$ für alle $\mathbb{K} \Subset \mathbb{C}$, so existiert das Faltungsprodukt

$$(f * g)(z) := \int f(w) g(z - w) d\lambda_2(w)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und es ist $f * g \in C(\mathbb{C})$ mit $f * g = g * f$, also

$$\int f(w) g(z - w) d\lambda_2(w) = \int f(z - u) g(u) d\lambda_2(u)$$

für $z \in \mathbb{C}$. Aus

$$\int_{U_R[0]} \frac{d\lambda_2(w)}{|w|} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{R} \frac{r dr d\varphi}{r} = 2\pi R \qquad (R > 0)$$

folgt, dass

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}_\infty$$

lokal integrierbar ist. Damit existiert für $f \in C_c$ das Faltungsprodukt $f * \frac{1}{\pi \bullet}$.

2. Ist sogar $f \in C_c^1$, so ist $f * g \in C^1(\mathbb{C})$ mit

$$\overline{\partial}(f * g) = (\overline{\partial} f) * g$$

(Stichwort: Differenzierbarkeit von Parameterintegralen).

3. Gilt zusätzlich $g \in C_c$, so ist auch $f * g \in C_c$ mit $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$ (beachte: Ist $z \in \operatorname{supp}(f * g)$, so gilt $z - w \in \operatorname{supp}(g)$ für ein $w \in \operatorname{supp}(f)$).

Satz 13.8 *(Pompeiu-Formel) Für $f \in C_c^1$ ist*

$$f = (\overline{\partial} f) * \frac{1}{\pi \bullet} = \overline{\partial}\Big(f * \frac{1}{\pi \bullet}\Big).$$

Beweis. Es sei $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Wir setzen für $\varphi \in [-\pi, \pi], r \geq 0$

$$F(r, \varphi) := f(z + re^{i\varphi}) = f(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)$$

Dann gilt mit $\zeta = z + re^{i\varphi}$ für $r > 0$

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta)\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta)\sin\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta)(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta)\, r\cos\varphi\,,$$

also

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi} - i\frac{\partial F}{\partial r}\right)(r, \varphi) &= -i\frac{\partial f}{\partial x}(\zeta)\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta)\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)\\ &= e^{-i\varphi}\Big(\frac{\partial f}{\partial y} - i\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(\zeta).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit der Substitutionsregel und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial y} - i\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(\zeta)\,\frac{d\lambda_2(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} e^{i\varphi}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi} - i\frac{\partial F}{\partial r}\Big)(r, \varphi)\, r\,\frac{d\lambda_2(r, \varphi)}{re^{i\varphi}}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi} - i\frac{\partial F}{\partial r}\Big)(r, \varphi)d\varphi dr\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi)d\varphi dr = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\int\limits_0^\infty\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi)dr}_{=F(r,\varphi)|_{r=0}^{\infty}=-F(0,\varphi)}\quad d\varphi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{F(0, \varphi)}_{=f(z)}d\varphi = f(z).\end{aligned}$$

Schließlich ist noch $\partial f/\partial y - i\partial f/\partial x = -2i\overline{\partial} f$ und damit

$$\frac{1}{2\pi i}\int \Big(\frac{\partial f}{\partial y} - i\,\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(\zeta)\frac{d\lambda_2(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{\pi}\int (\overline{\partial} f)(\zeta)\frac{d\lambda_2(\zeta)}{z-\zeta}\ .$$

□

Bemerkung 13.9 (Approximative Eins) Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen ist die Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\alpha(t) := \begin{cases} \exp(-1/(1-t)), & t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}.$$

Man kann zeigen (siehe Analysis), dass $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$ (genauer sogar $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$) gilt. Wir definieren $\varphi \in C_c^1$ durch

$$\varphi(z) := \frac{1}{\int \alpha(|\zeta|^2)d\lambda_2(\zeta)}\alpha(|z|^2) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

und $\varphi_\delta \in C_c^1$ für $\delta > 0$ durch

$$\varphi_\delta(z) := \frac{1}{\delta^2}\,\varphi\Big(\frac{z}{\delta}\Big) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Dann gilt $\operatorname{supp}(\varphi_\delta) = U_\delta[0]$ und

(i) $\displaystyle\int \varphi_\delta d\lambda_2 = 1,$

(ii) $\displaystyle\int \overline{\partial}\varphi_\delta d\lambda_2 = 0$ (genauer: $\displaystyle\int \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x} d\lambda_2 = \int \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial y}\, d\lambda_2 = 0$),

(iii) $\displaystyle\int |\overline{\partial}\varphi_\delta| d\lambda_2 \leq \frac{\pi}{\delta}\|\overline{\partial}\varphi\|_{\infty,\mathbb{C}}.$

(Denn:
Zu (i): Es gilt (Substitutionsregel)

$$\int \varphi_\delta d\lambda_2 = \frac{1}{\delta^2}\int \varphi(z/\delta)\, d\lambda_2(z) = \frac{1}{\delta^2}\int \varphi(u)\,\delta^2 d\lambda_2(u) = \int \varphi d\lambda_2 = 1.$$

Zu (ii): Mit dem Satz von Fubini und dem HDI gilt

$$\int \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x}(z)\, d\lambda_2(z) = \iint \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x}\,(x,y)\, dxdy = \int \underbrace{\big(\varphi_\delta(x,y)\big|_{x=-\infty}^{\infty}\big)}_{=0}\, dy = 0.$$

Entsprechendes gilt für $\int \partial\varphi_\delta/\partial y\, d\lambda_2$.

Zu (iii): Aus $\overline{\partial}\varphi_\delta(z) = (\overline{\partial}\varphi)(z/\delta)/\delta^3$ folgt

$$\int |\overline{\partial}\varphi_\delta| d\lambda_2 = \frac{1}{\delta^3} \int\limits_{U_\delta[0]} |(\overline{\partial}\varphi)(z/\delta)|\, d\lambda_2(z) \leq \frac{1}{\delta^3} ||\overline{\partial}\varphi||_{\infty,\mathbb{C}} \delta^2 \pi\ .)$$

Es sei $f \in C_c$. Für $\delta > 0$ betrachten wir das Faltungsprodukt $f * \varphi_\delta$. Dann gilt $f * \varphi_\delta \in C_c^1$ mit

$$\operatorname{supp}(f * \varphi_\delta) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(\varphi_\delta) = U_\delta\big[\operatorname{supp}(f)\big]$$

(wobei $U_\delta[M] := M + U_\delta[0] = \{z : \operatorname{dist}(z, M) \leq \delta\}$) und $\overline{\partial}(f * \varphi_\delta) = (\overline{\partial}\varphi_\delta) * f$.
Außerdem gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) - (f * \varphi_\delta)(z) \overset{(i)}{=} \int \big(f(z) - f(z-u)\big)\varphi_\delta(u) d\lambda_2(u) \tag{13.2}$$

und damit

$$\|f - f * \varphi_\delta\|_{\infty,\mathbb{C}} \leq \omega(\delta) \cdot \int \varphi_\delta d\lambda_2 \overset{(i)}{=} \omega(\delta),$$

wobei $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\omega(t) := \omega_f(t) := \sup_{|z-\widetilde{z}|\leq t} \big|f(z) - f(\widetilde{z})\big| \qquad (t > 0)$$

den sog. Stetigkeitsmodul von f bezeichnet. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f folgt $\omega(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0^+)$. Damit gilt insbesondere $||f - f * \varphi_\delta||_{\infty,\mathbb{C}} \to 0$ $(\delta \to 0^+)$.
Weiter ergibt sich noch

$$((\overline{\partial}\varphi_\delta) * f)(z) \overset{(ii)}{=} \int \overline{\partial}\varphi_\delta(u)\big(f(z-u) - f(z)\big) d\lambda_2(u)$$

und folglich

$$\big\|\overline{\partial}(f * \varphi_\delta)\big\|_{\infty,\mathbb{C}} = \big\|(\overline{\partial}\varphi_\delta) * f\big\|_{\infty,\mathbb{C}} \overset{(iii)}{\leq} \pi\|\overline{\partial}\varphi\|_{\infty,\mathbb{C}} \cdot \frac{w(\delta)}{\delta}.$$

Damit kommen wir zum **Beweis zu** S. 13.5:
1. Es seien $f \in A(K)$ und $\delta > 0$ gegeben. Nach dem Tietze-Erweiterungssatz können wir ohne Einschränkung zusätzlich $f \in C_c$ und $\operatorname{supp}(f) \subset U_\delta(K)$ annehmen. Aus (13.2) und der Mittelwertformel folgt ([Ü])

$$(f * \varphi_\delta)|_{V\delta} = f|_{V_\delta},$$

wobei $V_\delta := \{z \in K^0 : \operatorname{dist}(z, \partial K) > \delta\}$, und damit $\overline{\partial}(f * \varphi_\delta) = \overline{\partial} f \equiv 0$ auf V_δ. Also ist

$$\operatorname{supp}\big(\overline{\partial}(f * \varphi_\delta)\big) \subset \operatorname{supp}(f * \varphi_\delta) \setminus V_\delta \subset U_{2\delta}[K] \setminus V_\delta =: B_\delta.$$

Nach der Pompeiu-Formel gilt damit

$$(f * \varphi_\delta)(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_\delta} \overline{\partial}(f * \varphi_\delta)(\zeta) \frac{d\lambda_2(\zeta)}{z - \zeta} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Ist nun $\Omega_\delta \supset K$ offen und $r_\delta \in C(B_\delta \times \Omega_\delta)$ so, dass $r_\delta(\zeta, \cdot) \in H(\Omega_\delta)$ für alle $\zeta \in B_\delta$, so ergibt sich für $g_\delta : \Omega_\delta \to \mathbb{C}$ mit

$$g_\delta(z) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_\delta} \overline{\partial}(f * \varphi_\delta)(\zeta) r_\delta(\zeta, z) d\lambda_2(\zeta)$$

zum einen $g_\delta \in H(\Omega_\delta)$ (da $\overline{\partial} g_\delta \equiv 0$ mit Differenziation des Parameterintegrals) und zum anderen für $z \in \Omega_\delta$

$$g_\delta(z) - (f * \varphi_\delta)(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_\delta} \overline{\partial}(f * \varphi_\delta)(\zeta) \Big(r_\delta(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \Big) d\lambda_2(\zeta)$$

und damit

$$\|g_\delta - f * \varphi_\delta\|_{\infty,K} \leq \|\overline{\partial}\varphi\|_{\infty,\mathbb{C}} \frac{\omega(\delta)}{\delta} \sup_{z \in K} \int\limits_{B_\delta} \Big| r_\delta(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \Big| d\lambda_2(\zeta).$$

Gilt also

$$\boxed{\sup_{z \in K} \int\limits_{B_\delta} \Big| r_\delta(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \Big| d\lambda_2(\zeta) = O(\delta)}$$

für $\delta \to 0$, so folgt

$$\|f - g_\delta\|_{\infty,K} \leq \|f - f * \varphi_\delta\|_{\infty,K} + \|f * \varphi_\delta - g_\delta\|_{\infty,K} = O(\omega(\delta)) = o(1) \qquad (\delta \to 0).$$

Aus $g_\delta \in H(K)$ ergibt sich damit insbesondere, dass $H(K)$ dicht in $A(K)$ ist. Nach dem Satz von Runge für polynomiale Approximation ist dann auch $A(K) = P(K)$, falls $K = \widehat{K}$. Der allgemeine Fall ergibt sich mit B. 13.4.

Es bleibt also noch die Aufgabe, die Existenz geeigneter Approximanden r_δ des Cauchy-Kerns im Fall $K = \widehat{K}$ zu beweisen.

2. (Lemma von Mergelian)
(i) Wir zeigen zunächst folgende „lokale" Aussage:
Es sei $E \Subset \mathbb{D}$ mit $E, \mathbb{C} \setminus E$ zusammenhängend und $\operatorname{cap}(E) > 0$. Ist $d := 1/\operatorname{cap}(E)$, so existiert eine Funktion $r \in C\big(\mathbb{D} \times (\mathbb{C} \setminus E)\big)$ so, dass $r(\zeta, \cdot) \in H(\mathbb{C} \setminus E)$ für alle $\zeta \in \mathbb{D}$ und

$$\|r\|_{\infty, \mathbb{D} \times (\mathbb{C} \setminus E)} \leq d + d^2 + d^3$$

sowie

$$\big| (z - \zeta)^3 r(\zeta, z) - (z - \zeta)^2 \big| \leq 8(d + d^2 + d^3) + 4 \qquad (\zeta \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{C} \setminus E).$$

Ist dabei $\operatorname{diam}(E) \geq 1$, so ist $d \leq 4$ nach B./D. 12.10 und damit

$$d + d^2 + d^3 \leq 84, \qquad 8(d + d^2 + d^3) + 4 \leq 676.$$

(Denn: Es sei ψ wie in B./D. 12.10 und $\varphi = \psi^{-1} : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{D}^*$. Dann ist

$$\varphi(z) = dz + O(1) \qquad (z \to \infty).$$

Ist g definiert durch

$$g(z) := \frac{d}{\varphi(z)} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus E),$$

so ist $g \in H(\mathbb{C} \setminus E)$ mit $\|g\|_{\infty, \mathbb{C}\setminus E} = d$ und

$$g(z) \sim \frac{1}{z} \qquad (z \to \infty).$$

Es sei $\zeta \in \mathbb{D}$. Dann gilt für $|z - \zeta| > 2$ (Laurent-Entwicklung)

$$g(z) = \frac{1}{z-\zeta} + \frac{a(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + O_\zeta\Big(\frac{1}{z^3}\Big) \qquad (z \to \infty)$$

(dabei deutet O_ζ an, dass die entsprechenden Konstanten von ζ abhängig sind). Wir definieren $r : \mathbb{D} \times (\mathbb{C} \setminus E) \to \mathbb{C}$ durch

$$r(\zeta, z) := g(z) - a(\zeta) g^2(z) \qquad (\zeta \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{C} \setminus E).$$

Dann ist $r \in C\big(\mathbb{D} \times (\mathbb{C} \setminus E)\big)$ und $r(\zeta, \cdot) \in H(\mathbb{C} \setminus E)$. Außerdem glit

$$r(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} = a(\zeta)\Big(\frac{1}{(z-\zeta)^2} - g^2(z)\Big) + O_\zeta\Big(\frac{1}{z^3}\Big) = O_\zeta\Big(\frac{1}{z^3}\Big)$$

und damit

$$(z-\zeta)^3 r(\zeta, z) - (z-\zeta)^2 = O_\zeta(1) \qquad (z \to \infty). \tag{13.3}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} a(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_2(\zeta)} (w-\zeta) g(w)\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} (w-\zeta) g(w)\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} w g(w)\,dw - \zeta \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} g(w)\,dw}_{=1 \text{ (da } g(z) \sim 1/z)}, \end{aligned}$$

also

$$\big|a(\zeta)\big| \le \|g\|_{\infty, \mathbb{S}} + |\zeta| \le d + |\zeta| \le d + 1.$$

Folglich ist

$$\big|r(\zeta, z)\big| \le \|g\|_{\infty, \mathbb{C}\setminus E} + \big|a(\zeta)\big|\, \|g\|^2_{\infty, \mathbb{C}\setminus E} \le d + (1+d)d^2$$

und damit für $\zeta \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{D} \setminus E$

$$\big|(z-\zeta)^3 r(\zeta, z) - (z-\zeta)^2\big| \le 8(d + d^2 + d^3) + 4.$$

Nach dem Maximumprinzip und (13.3) gilt dies auch für $z \in \mathbb{C} \setminus E$.)

(ii) Ist nun allgemein $U = U_{2\delta}(a)$ für ein $a \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$, so gilt für jedes Kompaktum $F \subset U$ mit $F, \mathbb{C} \setminus F$ zusammenhängend und diam $(F) \geq 2\delta$ mit $E := \frac{1}{2\delta}(F - a)$

$$E \subset \mathbb{D}, E, \mathbb{C} \setminus E \text{ zusammenhängend, diam } (E) \geq 1.$$

Ist r wie oben, so gilt für $\zeta \in U, z \in \mathbb{C} \setminus F$

$$\Big|(z-\zeta)^3 \underbrace{\frac{1}{2\delta} r\Big(\frac{\zeta - a}{2\delta}, \frac{z-a}{2\delta}\Big)}_{=: r_{\delta,a,F}(\zeta,z)} - (z-\zeta)^2\Big| =$$

$$= 4\delta^2 \Big| \Big(\frac{z-a}{2\delta} - \frac{\zeta - a}{2\delta}\Big)^3 r\Big(\frac{\zeta - a}{2\delta}, \frac{z-a}{2\delta}\Big) - \Big(\frac{z-a}{2\delta} - \frac{\zeta - a}{2\delta}\Big)^2 \Big|$$

$$\leq 4\delta^2 \cdot 676 = 2704 \cdot \delta^2 \ .$$

und

$$\|r_{\delta,a,F}\|_{\infty, U \times (\mathbb{C} \setminus F)} \leq \frac{42}{\delta}.$$

(iii) Es sei $\delta > 0$ gegeben. Dann existieren $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C} \setminus K$ so, dass

$$B_\delta \subset \bigcup_{j=1}^m U_j, \qquad U_j := U_{2\delta}(a_j) \qquad (j = 1, \dots, m)$$

(wichtig dabei: ist $z \in K$ mit $\mathrm{dist}(z, \partial K) > \delta$, so gilt $z \notin B_\delta$).
Weiter existieren Pfade γ_j in $U_j \setminus K$ so, dass $\mathrm{diam}(\gamma_j^*) \geq 2\delta$ gilt und $\mathbb{C} \setminus \gamma_j^*$ zusammenhängend ist. (Da $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhänged ist, ist a_j durch einen Pfad in $\overline{U_j} \setminus K$, bestehend aus orientierten Strecken ohne Überschneidungen, mit einem Randpunkt von U_j verbindbar.)
Es sei $(\psi_j, \dots, \psi_m)$ eine Zerlegung der Eins auf B_δ bezüglich $(U_1, \dots, U_m)$ und es sei $\Omega_\delta := \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^m \gamma_j^*$ sowie (mit $r_{\delta,a_j,\gamma_j^*}(\zeta, z) := 0$, falls $\zeta \notin U_j$)

$$r_\delta(\zeta, z) = \sum_{j=1}^m \psi_j(\zeta) r_{\delta,a_j,\gamma_j^*}(\zeta, z) \qquad (\zeta \in B_\delta, z \in \Omega_\delta).$$

Dann ist $r_\delta \in C(B_\delta \times \Omega_\delta)$ (da $\mathrm{supp}(\psi_j) \Subset U_j$) und $r_\delta(\zeta, \cdot) \in H(\Omega_\delta)$ für $\zeta \in B_\delta$. Schließlich gilt für $z \in K$

$$\int_{B_\delta} \Big| r_\delta(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \Big| d\lambda_2(\zeta) = \int_{B_\delta} \Big| \sum_{j=1}^m \psi_j(\zeta) \Big(r_{\delta,a_j,\gamma_j^*}(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} \Big) \Big| d\lambda_2(\zeta)$$
$$= \int_{B_\delta \cap U_\delta(z)} \dots + \int_{B_\delta \setminus U_\delta(z)} \dots =: I_1 + I_2,$$

wobei

$$I_1 \leq \int\limits_{B_\delta \cap U_\delta(z)} \sum_{j=1}^{m} \psi_j(\zeta)\Big(\underbrace{|r_{\delta,a_j,\gamma_j^*}(\zeta,z)|}_{\leq 42/\delta} + \frac{1}{|z-\zeta|}\Big) d\lambda_2(\zeta)$$

$$\leq \frac{42}{\delta}\underbrace{\lambda_2\big(U_\delta(z)\big)}_{=\pi\delta^2} + \underbrace{\int\limits_{U_\delta(z)} \frac{d\lambda_2(\zeta)}{|\zeta - z|}}_{=\int\limits_{U_\delta(0)} \frac{d\lambda_2(w)}{|w|} = 2\pi\delta} = 44\pi \cdot \delta$$

und

$$I_2 \leq \int\limits_{B_\delta \setminus U_\delta(z)} \sum_{j=1}^{m} \psi_j(\zeta)\, \frac{2704\delta^2}{|\zeta - z|^3}\, d\lambda_2(\zeta)$$

$$\leq 2704 \cdot \delta^2 \cdot \int\limits_{\mathbb{C}\setminus U_\delta(0)} \frac{d\lambda_2(w)}{|w|^3} = 2704 \cdot \delta^2 \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{1}{r^3}\, r dr d\varphi}_{=2\pi\left(-1/r\right)\big|_\delta^\infty = 2\pi/\delta}$$

$$\leq 5408\pi \cdot \delta.$$

Also ergibt sich

$$\sup_{z\in K} \int\limits_{B_\delta} \Big| r_\delta(\zeta,z) - \frac{1}{\zeta - z}\Big| d\lambda_2(\zeta) \leq 5452\pi \cdot \delta.$$

□

Bemerkung 13.10 Wie bereits gesagt, gibt der Satz von Mergelian eine abschließende Antwort auf die Frage, welche Funktionen auf kompakten Mengen in $\mathbb{C}$ gleichmäßig durch Polynome approximierbar sind. Die entsprechende Frage für rationale Approximation ist (noch) wesentlich schwieriger zu beantworten. Der Beweis zum Satz von Mergelian zeigt, dass $R(K) = A(K)$ jedenfalls dann gilt, wenn für beliebig kleine $\delta > 0$ Pfade γ_j wie im Beweisschritt 2.(iii) gewählt werden können.

Wir wollen zum Abschluss des Abschnitts unter Verwendung weitergehender Hilfsmittel der allgemeinen (Funktional-) Analysis zeigen, dass $R(K) = C(K)$ für alle $K \Subset \mathbb{C}$ mit $\lambda_2(K) = 0$ gilt (man beachte: in diesem Fall ist $C(K) = A(K)$). Es gibt auch einen alternativen Beweis zum Satz von Mergelian, der diese – und eine Reihe weiterer – Hilfsmittel verwendet und auf Carleson zurückgeht (siehe etwa Gamelin, Uniform Algebras).

Bemerkung 13.11 1. Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Dann heißt

$$X' := \{\varphi : X \to \mathbb{K} : \varphi \text{ linear und stetig}\}$$

der Dualraum von X. Aus dem Satz von Hahn-Banach (siehe Funktionalanlysis) ergibt sich unmittelbar folgende, für die Approximationstheorie zentrale Aussage:
Ist $L \subset X$ ein Unterraum und ist $x \in X$, so gilt $x \in \overline{L}$ genau dann, wenn für jedes $\varphi \in X'$ mit $\varphi \perp L$ (d. h. $\varphi|_L = 0$) auch $\varphi \perp x$ (d. h. $\varphi(x) = 0$) gilt.

2. Um 1. zu nutzen, ist es für uns wichtig, Informationen über den Dualraum von $C(K)$ zu haben. Dazu müssen wir etwas auf komplexe Maße eingehen:
Ist ν ein endliches Borelmaß auf $K \Subset \mathbb{R}^d$ und ist $h : K \to \mathbb{C}$ messbar mit $|h| = 1$, so ist durch

$$\mu(f) := \int fh d\nu \qquad (f \in C(K))$$

ein stetiges lineares Funktional μ auf $(C(K), \|\cdot\|_{\infty,K})$ definiert. Wir schreiben dafür

$$\mu =: h \cdot \nu.$$

Tatsächlich ist jedes $\mu \in C(K)'$ von dieser Form. Dies ist die Aussage des Rieszschen Darstellungssatzes für stetige Funktionen:

Ist $\varphi \in C(K)'$, so existiert ein Paar (h, ν) wie oben mit $\mu = h \cdot \nu$.

Ein Beweis findet sich etwa in Rudin, Real and Complex Analysis. Wir schreiben im Weiteren auch

$$\int f d\mu := \int f(z) d\mu(z) := \mu(f) = \int fh d\nu \qquad (f \in C(K)).$$

Bemerkung und Definition 13.12 Es sei nun wieder $K \Subset \mathbb{C}$. Ist $A \subset \mathbb{C} \setminus K$, so gilt

$$\mu \perp R_{A,1}(K) := \overline{\operatorname{span}}^K \{g_a : a \in A\}$$

genau dann, wenn $\varphi \perp g_a$, also $\mu(g_a) = \int g_a d\mu = 0$ ist für alle $a \in A$.
Wir definieren die Cauchy-Transformierte $\widehat{\mu} : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ von $\mu \in C(K)'$ durch

$$\widehat{\mu}(\zeta) := \int \frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \int g_\zeta d\mu \qquad (\zeta \in \mathbb{C} \setminus K).$$

Dann ergibt sich $\mu \perp R_{A,1}(K)$ genau dann, wenn $\widehat{\mu}(a) = 0$ für alle $a \in A$.

Satz 13.13 *Es seien $K \Subset \mathbb{C}$ und $\mu \in C(K)'$. Dann gilt*

1. *$\widehat{\mu}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus K$ mit $\widehat{\mu}(\zeta) \to 0$ ($|\zeta| \to \infty$).*
2. *Ist $f \in H(K)$ und sind $U \supset K$ offen sowie $F \in H(U)$ mit $F|_K = f$, so ist*

$$\int f \, d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F \widehat{\mu}$$

   für alle nullhomologen Zyklen in U mit $\operatorname{ind}_\gamma(K) = \{1\}$.
3. *$\mu \perp H(K)$ genau dann, wenn $\widehat{\mu} \equiv 0$ auf $\mathbb{C} \setminus K$ ist.*

Beweis. 1. Der Beweis der Holomorphie verläuft im Wesentlichen wie der Beweis zu S. 1.7. Weiter gilt

$$\Big|\int \frac{d\mu(z)}{\zeta - z}\Big| \le \int \frac{d\nu(z)}{|\zeta - z|} \to 0 \qquad (|\zeta| \to \infty).$$

2. Nach dem Cauchy-Theorem ist

$$f = F|_K = C_\gamma F|_K,$$

also mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \int \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta d\mu(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma F(\zeta) \int \frac{d\mu(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma F\widehat{\mu}\,.\end{aligned}$$

3. $\Rightarrow$: Ist $\mu \perp H(K)$, so gilt insbesondere $\widehat{\mu}(a) = \int g_a d\mu = 0$ für alle $a \in \mathbb{C} \setminus K$.
$\Leftarrow$: Nach 2. folgt aus $\widehat{\mu} \equiv 0$ auch $\mu \perp H(K)$ (man beachte: nach S. 11.3 existiert zu jeder offenen Obermenge U von K ein Zyklus wie in 2.). $\square$

Bemerkung 13.14 Aus B. 13.11 und S. 13.13 ergibt sich unmittelbar folgende Verschärfung von S. 11.4: Ist $A \subset \mathbb{C} \setminus K$ so, dass A in jeder Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ einen Häufungspunkt hat, so ist

$$H(K) \subset R_{A,1}(K).$$

(Denn: Ist $\mu \perp R_{A,1}(K)$, so ist $\widehat{\mu}(a) = 0$ $(a \in A)$. Ist G eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, so hat A einen Häufungspunkt in G. Also ist $\widehat{\mu} \equiv 0$ nach dem Identitätssatz (auch im Falle, dass der Häufungspunkt ∞ ist; ([Ü])). Nach S. 13.13 ist $\mu \perp H(K)$ und damit $H(K) \subset R_{A,1}(K)$ nach B. 13.11.)

Bemerkung 13.15 Sind $K \Subset \mathbb{C}$ und ν ein endliches Maß auf K, so ist für λ_2-fast alle $\zeta \in \mathbb{C}$

$$N(\zeta) := \int \frac{d\nu(z)}{|\zeta - z|} < \infty,$$

und die Funktion N ist lokal integrierbar auf $\mathbb{C}$ (siehe etwa Conway, II, Section 18.5). Ist nun $\mu = h \cdot \nu$, so ist damit

$$\widehat{\mu}(\zeta) := \int \frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \int \frac{1}{\zeta - z} h(z) d\nu(z)$$

für λ_2-fast alle $\zeta \in \mathbb{C}$ definiert und $\widehat{\mu}$ ist lokal integrierbar auf $\mathbb{C}$ (wobei $\widehat{\mu}$ etwa durch 0 auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt sei.)

Satz 13.16 *Ist $K \Subset \mathbb{C}$ und ist $\mu \in C(K)'$, so gilt*

1. *Für alle $f \in C_c^1$ ist*
$$\int f d\mu = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{\partial} f \cdot \widehat{\mu}\, d\lambda_2.$$

2. *Ist $\widehat{\mu} = 0$ λ_2-fast überall, so ist $\mu = 0$.*

Beweis. 1. Es sei $f \in C_c^1$. Dann gilt mit der Pompeiu-Formel und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int f(z) d\mu(z) &= -\frac{1}{\pi} \int \int \frac{(\overline{\partial} f)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\lambda_2(\zeta) d\mu(z) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int \overline{\partial} f(\zeta) \underbrace{\int \frac{d\mu(z)}{\zeta - z}}_{=\widehat{\mu}(\zeta)}\, d\lambda_2(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int \overline{\partial} f \cdot \widehat{\mu}\, d\lambda_2\,.\end{aligned}$$

2. Es sei $\mu \in C(K)'$ mit $\widehat{\mu}(\zeta) = 0$ für λ_2-fast alle $\zeta \in \mathbb{C}$. Dann ist $\mu \perp C_c^1$ nach 1. Da nach B. 13.9 und dem Erweiterungssatz von Tietze C_c^1 dicht in $C(K)$ ist, gilt damit $\mu = 0$. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir

Satz 13.17 *(Hartogs-Rosenthal)*
Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt mit $\lambda_2(K) = 0$. Dann gilt

1. *Trifft $A \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, so ist $C(K) = R_A(K)$.*

2. *Hat $A \subset \mathbb{C} \setminus K$ in jeder Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ einen Häufungspunkt, so ist $C(K) = R_{A,1}(K)$.*

Beweis. 1. Es sei $\mu \in C(K)'$ mit $\mu \perp R_A(K)$. Nach S. 11.5 (Rungesatz für rationale Approximation mit vorgegebenen Polen) ist dann auch $\mu \perp H(K)$, also $\widehat{\mu} \equiv 0$ auf $\mathbb{C} \setminus K$ nach S. 13.13.3. Da $\lambda_2(K) = 0$ ist, ist $\widehat{\mu} = 0$ λ_2-fast überall. Also ist $\mu = 0$ nach S. 13.16 und damit $R_A(K) = C(K)$ nach B. 13.11.
2. Analog mit B. 13.14 anstelle von S. 11.5. □

14 Randverhalten von Taylor-Reihen

Als kleine Anwendung des Satzes von Mergelian beweisen wir eine Variante von S. 11.12.

Satz 14.1 *Komager viele $f \in H(\mathbb{D})$ haben die Eigenschaft, dass die Menge der Taylor-Teilsummen $s_n f$ dicht ist in $A(K)$ für alle $K \Subset \mathbb{C} \setminus (\mathbb{D} \cup (-\infty, -1])$ mit $K = \widehat{K}$.*

Beweis. 1. Es sei zunächst $K \Subset \mathbb{C} \setminus (\mathbb{D} \cup (-\infty, -1])$ mit $K = \widehat{K}$ fest.
Die Abbildungen $s_n : H(\mathbb{D}) \to A(K)$ sind stetig. Außerdem ist $H(\mathbb{D})$ vollständig und $(A(K), \|\cdot\|_{\infty,K})$ separabel (die Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ sind dicht in $A(K)$ nach dem Satz von Mergelian, da $K = \widehat{K}$).
Wir zeigen, dass für komager viele $f \in H(\mathbb{D})$ die Teilsummen $s_n f$ dicht in $A(K)$ sind. Dazu reicht es, zu zeigen (vgl. Beweis zu S. 11.11 und 11.12): Sind $g \in H(\mathbb{D}), r < 1, h \in A(K)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$s_n\big(V_{\varepsilon, U_r[0]}(g)\big) \cap U_\varepsilon(h) \neq \emptyset.$$

Da $(U_r[0] \cup K)$ zusammenhängendes Komplement hat und φ mit

$$\varphi(z) := \begin{cases} g(z), & z \in U_r[0] \\ h(z), & z \in K \end{cases}$$

in $A(U_r[0] \cup K)$ liegt, existiert nach dem Satz von Mergelian ein Polynom p mit

$$\|g - p\|_{\infty, U_r[0]} < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|h - p\|_{\infty,K} < \varepsilon.$$

Ist $n \geq \deg p$, so ist $s_n p = p$. Damit ist $p \in V_{\varepsilon, U_r[0]}(g)$ und $s_n p = p \in U_\varepsilon(h)$.
2. Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$K_m := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq m\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < 1/m\}.$$

Dann gilt $K_m = \widehat{K_m}$. Da nach dem Satz von Baire abzählbare Schnitte dichter G_δ-Mengen wieder dichte G_δ-Mengen sind, sind für komager viele $f \in H(\mathbb{D})$ die Teilsummen $s_n f$ dicht in $A(K_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
Es sei f eine solche Funktion und es seien $K \Subset \mathbb{C} \setminus (\mathbb{D} \cup (-\infty, -1])$ mit $K = \widehat{K}$, $h \in A(K)$ sowie $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem Satz von Mergelian existiert ein Polynom p mit $||h - p||_{\infty,K} < \varepsilon$ und nach Definition von K_m ist $K \subset K_m$ für m genügend groß. Wählt man m mit $K \subset K_m$, so existiert aufgrund der Dichtheit von $\{s_n f : n \in \mathbb{N}\}$ in $A(K_m)$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|s_n f - p\|_{\infty, K_m} < \varepsilon$. Also gilt

$$\|s_n f - h\|_{\infty,K} \leq \|s_n f - p\|_{\infty,K_m} + \|p - h\|_{\infty,K} < 2\varepsilon.$$

□

Ein wesentlicher Unterschied zu S. 11.12 liegt darin, dass im obigen Satz auch eine Aussage

für kompakte Mengen K, die einen nichtleeren Schnitt mit $\mathbb{S}$ haben, gemacht wird. Damit hat man auch ,,Universalität" am Rande des Konvergenzkreises. Dieser Aspekt taucht erstmals in Arbeiten von V. Nestoridis auf.
Aus den Überlegungen in Kapitel 4 folgt, dass die Situation für Funktionen $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ anders ist: In diesem Fall gilt $s_n f \to f$ im quadratischen Mittel (man beachte: die Taylor-Teilsummen stimmen für Funktionen in $A(\overline{\mathbb{D}})$ mit den Fourier-Teilsummen überein) und damit (siehe Maßtheorie) hat jede Teilfolge $(s_{n_j} f)_{j\in\mathbb{N}}$ von $(s_n f)$ eine Teilteilfolge $(s_{n_j} f)_{j\in I}$, die (m-)fast überall gegen f konvergiert (wobei m das normierte eindimensionale Lebesgue-Maß auf $\mathbb{S}$ bezeichnet). Also müssen alle (punktweisen) Grenzfunktionen fast überall mit f übereinstimmen. Wir wollen der Frage nachgehen, ob auf Mengen vom Maß 0 auch andere Grenzfunktionen vorkommen können.

Wir formulieren dazu zunächst zwei Hilfsresultate, die auch für sich genommen von Interesse sind.

Bemerkung und Definition 14.2 Für die Fejér-Polynome F_n, definiert durch

$$F_n(z) := \sum_{\nu=0,\ldots,2n,\,\nu\neq n} \frac{z^\nu}{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{z^\nu}{n-\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{z^\nu}{\nu-n} \qquad (z\in\mathbb{C},\, n\in\mathbb{N}),$$

gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|F_n\|_{\infty,\mathbb{S}} < \infty\,.$$

(Denn; Beweis nach Erdös, Herzog, Piranian: Für $1 \le r \le n$ gilt

$$\sum_{\nu=n-r}^{n-1} \frac{z^\nu}{n-\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{n+r} \frac{z^\nu}{\nu-n} = \frac{z^{n-r}}{r} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{1} - \left(\frac{z^{n+1}}{1} + \ldots + \frac{z^{n+r}}{r}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}\left(z^{n-k} - z^{n+k}\right) = z^n \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}\left(z^{-k} - z^{k}\right)$$

und damit für $z = e^{i\theta}$ mit $\theta\in[-\pi,\pi]$

$$\Big|\sum_{\nu=n-r}^{n-1} \frac{z^\nu}{n-\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{n+r} \frac{z^\nu}{\nu-n}\Big| \le \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}\,|z^k - z^{-k}| = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}\, \underbrace{2\big|\sin(k\theta)\big|}_{\le k|\theta|} \le 2r|\theta|\,.$$

Ist also $n \le [\pi/|\theta|]$ so ergibt sich $|F_n(z)| \le 2\pi$ mit $r = n$.
Für $r < n$ gilt mit Abelscher partieller Summation

$$\sum_{\nu=0}^{n-r-1} \frac{z^\nu}{n-\nu} = \sum_{k=1}^{n-r} \frac{1}{n-k+1} z^{k-1}$$

$$= \frac{1}{r+1} \sum_{\ell=1}^{n-r} z^{\ell-1} - \sum_{k=1}^{n-r-1} \left(\sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1}\right)\left(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{n-k+1}\right).$$

Also ergibt sich mit $|e^{i\theta}-1| \geq 2\theta/\pi$ und der geometrischen Summenformel für $\theta \neq 0$

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{n-r-1} \frac{z^\nu}{n-\nu}\Big| \leq \frac{2}{r+1}\,\frac{1}{|e^{i\theta}-1|} + \frac{2}{|e^{i\theta}-1|} \underbrace{\sum_{j=r+1}^{n-1}\Big(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\Big)}_{\leq 1/(r+1)} \leq \frac{2\pi}{|\theta|}\cdot\frac{1}{r+1}\,.$$

Entsprechendes gilt für $\displaystyle\sum_{\nu=n+r+1}^{2n} \frac{z^\nu}{\nu-n}$. Damit erhält man insgesamt

$$|F_n(z)| \leq 2r|\theta| + \frac{4\pi}{(r+1)|\theta|}.$$

Ist nun $n > [\pi/|\theta|]$, so ergibt sich $|F_n(z)| \leq 2\pi + 4$ mit $r = [\pi/|\theta|]$.)

Satz 14.3 *Es seien $E \subset \mathbb{S}$ endlich, $c \in \mathbb{C}^E$ und q ein Polynom. Dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ ein Polynom p und ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$\|q-p\|_{\infty,\overline{\mathbb{D}}} < \varepsilon \quad \textit{und} \quad s_n p|_E = c.$$

Beweis.
1. Wir zeigen zunächst: Ist $B \subset \mathbb{S}\setminus\{1\}$ endlich, so existiert eine Folge (p_n) von Polynomen mit $\|p_n\|_{\infty,\overline{\mathbb{D}}} \to 0$ $(n \to \infty)$ und

$$s_n p_n|_B = 0, \qquad (s_n p_n)(1) = 1 \qquad (n > |B|).$$

Dazu sei F_n das n-te Fejér-Polynom. Wir setzen $N := |B|$ und

$$F_{n,N}(z) = F_n(z) - \sum_{\nu=n-N}^{n-1} \frac{z^\nu}{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-N-1} \frac{z^\nu}{n-\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{z^\nu}{\nu-n} \quad (n > N)\,.$$

Da $(||F_n||_{\infty,\overline{\mathbb{D}}})_n$ beschränkt ist, ist auch die Folge $(\|F_{n,N}\|_{\infty,\overline{\mathbb{D}}})_{n>N}$ beschränkt. Weiter gilt

$$(s_n F_{n,N})(1) = \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Wir definieren $q_B(z) := \prod_{w \in B}(z-w)$ und

$$p_n(z) := \frac{1}{q_B(1)(s_n F_{n,N})(1)} \cdot q_B(z) \cdot F_{n,N}(z) \quad (n > N).$$

Dann gilt $\|p_n\|_{\infty,\overline{\mathbb{D}}} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Da $F_{n,N}$ keine der Potenzen $z^{n-N}, \ldots, z^n$ enthält, ergibt sich

$$s_n p_n = \frac{q_B}{q_B(1)(s_n F_{n,N})(1)} \cdot s_n F_{n,N}$$

und daher $s_n p_n|_B = 0$ sowie $(s_n p_n)(1) = 1$.

2. Wir setzen $d := c - q|_E$. Ist $0 < \delta < \big(\sum_{w\in E} |d(w)|\big)^{-1}\varepsilon$, so existieren nach Beweisschritt 1, angewandt auf $B = w^{-1}(E \setminus \{w\})$ für $w \in E$, ein $n \geq \deg q$ und Polynome $p_w = p_{n,w}$ $(w \in E)$ mit $\|p_w\|_{\infty,\overline{\mathbb{D}}} < \delta$ and

$$s_n p_w|_{E\setminus\{w\}} = 0 \qquad (s_n p_w)(w) = 1.$$

Wir definieren

$$p := q + \sum_{w\in E} d(w) \cdot p_w.$$

Dann gilt

$$\|p - q\|_{\infty,\overline{\mathbb{D}}} \leq \sum_{w\in E} |d(w)|\, \|p_w\|_{\infty,\overline{\mathbb{D}}} < \varepsilon$$

und aus $n \geq \deg q$ ergibt sich $s_n q = q$. Damit ist

$$(s_n p)(w) = q(w) + \sum_{w'\in E} d(w') s_n p_w(w') = q(w) + d(w) = c(w) \qquad (w \in E).$$

□

Satz 14.4 [1] *Ist $E \subset \mathbb{S}$ abzählbar, so haben komager viele $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ die Eigenschaft, dass für alle $h : E \to \mathbb{C}$ eine Teilfolge von $(s_n f)$ punktweise auf E gegen h konvergiert.*

Beweis. Aus S. 4.9 (oder auch aus dem Satz von Mergelian) folgt, dass die Polynome dicht in $A(\overline{\mathbb{D}})$ sind. Daher kann das Polynom q in S. 14.3 durch eine beliebige Funktion $g \in A(\overline{\mathbb{D}})$ ersetzt werden. Aus S. 10.20 ergibt sich damit, dass für alle endlichen Mengen $E \subset \mathbb{S}$ komager viele $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ die Eigenschaft haben, dass die Teilsummen $s_n f$ dicht in $\mathbb{C}^E$ sind (wobei $\mathbb{C}^E$ identifiziert wird mit $\mathbb{C}^{|E|}$).
Ist $E = \{\zeta_j : j \in \mathbb{N}\}$ und $E_m := \{\zeta_1 \ldots, \zeta_m\}$, so haben komager viele $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ die Eigenschaft, dass die Teilsummen $s_n f$ dicht in $\mathbb{C}^{E_m}$ sind für alle m (wieder mit dem Satz von Baire). Für solche f gilt: Ist $h : E \to \mathbb{C}$, so existiert zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein n_j mit $n_j \geq n_{j-1}$ (im Falle $j > 1$) und $|s_{n_j} f(\zeta) - h(\zeta)| < 1/j$ $(\zeta \in E_j)$. Damit gilt $s_{n_j} f \to h$ punktweise auf E. □

Beispiel 14.5 Ist E die Menge der Einheitswurzeln, so ist E abzählbar und dicht in $\mathbb{S}$. Für komager viele $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ gilt: Zu jeder Funktion $h : E \to \mathbb{C}$ existiert eine streng monoton wachsende Folge (n_j) mit $s_{n_j} f \to h$ punktweise auf E.

[1] G. Herzog, P.C. Kunstmann: Universally divergent Fourier series via Landaus extremal functions, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 56 (2), 159-168 (2015).

Ist $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ mit

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

so stimmen die Taylor-Koeffizienten a_k mit den Fourier-Koeffizienten $\widehat{f}(k)$ überein. Aus der Parsevalschen Gleichung ergibt sich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 = ||f||_2^2 < \infty$$

und damit insbesondere $a_n \zeta^n \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle $\zeta \in \mathbb{S}$. Nach S. 14.4 kann man jedoch im Allgemeinen noch nicht auf die Konvergenz der ,,Randreihen" $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu$ schließen. Wir wollen zum Abschluss zeigen, dass für beliebige Funktionen $f \in H(\mathbb{D})$ mit $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ in Randpunkten $\zeta \in \mathbb{S}$, in denen f „analytisch fortsetzbar" ist, die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu$ folgt.

Definition 14.6 Es sei $f \in H(\mathbb{D})$ und es sei $B = B_{\alpha_1,\alpha_2} \subset \mathbb{S}$ der (abgeschlossene) Bogen $\{e^{i\theta} : \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2\}$. Existieren eine offene Menge $U \supset \mathbb{D} \cup B$ und ein $F \in H(U)$ mit $F|_{\mathbb{D}} = f$, so nennen wir B einen *Holomorphiebogen* (von f). Durch $f^* := F|_B$ ist dann eine Funktion f^* auf der Vereinigung aller Holomorphiebögen von f (wohl-)definiert.

Beispiel 14.7 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Dann gilt $f' = g_1$ in $\mathbb{D}$ (wobei $g_1(z) = 1/(1-z)$ für $z \neq 1$). Ist $F =: \log g_1$ die Stammfunktion von $g_1 = g_1'/g_1$ auf $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ mit $F(0) = 0$, so ist also $F|_{\mathbb{D}} = f$. Damit ist jeder abgeschlossene Bogen B mit $1 \notin B$ ein Holomorphiebogen von f und $f^*(e^{i\theta}) = \log(1/(1-e^{i\theta}))$ für $\theta \in (0, 2\pi)$.

Satz 14.8 *(Fatou und M. Riesz)*
Es sei $f \in H(\mathbb{D})$ mit $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ $(z \in \mathbb{D})$. Dann gilt

1. *Ist (a_n) beschränkt, so ist $(s_n f|_B)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt auf jedem Holomorphiebogen B.*
2. *Aus $a_n \to 0$ folgt $s_n f \to f^*$ gleichmäßig auf jedem Holomorphiebogen B.*

Beweis. 1. Ohne Einschränkung sei $B \neq \mathbb{S}$. Weiter seien U und F wie in obiger Definition. Wir schreiben $s_n := s_n f$ sowie $A_n := \sup\limits_{k \geq n} |a_k|$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Weiter definieren wir $h_n : U \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ durch

$$h_n(z) := \begin{cases} \dfrac{F(z) - s_{n-1}(z)}{z^n} & , z \neq 0 \\ a_n & , z = 0 \end{cases}.$$

Dann ist $h_n \in H(U)$ mit

$$h_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} z^\nu \qquad (|z| < 1),$$

also

$$|h_n(z)| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n+\nu}| \cdot |z|^\nu \leq \frac{A_n}{1-|z|} \qquad (|z| < 1). \tag{14.1}$$

Nach Voraussetzung existiert ein kompakter Kreissektor

$$S = \big\{z = re^{i\theta} : 0 < r \leq R,\, \theta \in [\beta_1, \beta_2]\big\} \subset U,$$

wobei $R > 1$ und $B \subset S^0$. Mit $M := \|F\|_{\infty,S} + 2A_0$ ergibt sich für $z \in S$, $|z| > 1$

$$|h_n(z)| \leq \frac{|F(z)|}{|z|^n} + \frac{|s_{n-1}(z)|}{|z|^n} \leq \frac{||F||_{\infty,S}}{|z|^n} + \frac{2A_0}{|z|-1} \leq \frac{M}{|z|-1} \tag{14.2}$$

(beachte: $|s_{n-1}(z)| \leq A_0 \sum_{\nu=0}^{n-1} |z|^\nu \leq 2A_0|z|^n/(|z-1|)$.)
Wir setzen $w_j := e^{i\beta_j}$ $(j = 1, 2)$ und definieren $g_n \in H(U)$ durch

$$g_n(z) := h_n(z)(w_1 - z)(w_2 - z) \quad (z \in U).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 < r < 1$ ist nach (14.1)

$$\big|g_n(rw_1)\big| \leq \frac{A_1}{1-r}(1-r)|w_1| \cdot |w_2 - rw_1| \leq 2A_1$$

Ist $1 < r \leq R$, folgt aus (14.2)

$$\big|g_n(rw_1)\big| \leq \frac{M}{r-1}(r-1)|w_1| \cdot |w_2 - rw_1| \leq M(1+R).$$

Aus $g_n(w_1) = 0$ und $\big|g_n(0)\big| = |a_n w_1 w_2| \leq A_1$ $(n \in \mathbb{N})$ folgt, dass (g_n) beschränkt ist auf der Strecke zwischen 0 und Rw_1. Entsprechend sieht man, dass (g_n) auf der Strecke zwischen 0 und Rw_2 beschränkt ist.
Ist $\theta \in [\beta_1, \beta_2]$, so folgt wieder mit (14.2)

$$\big|g_n(Re^{i\theta})\big| \leq M\frac{(1+R)^2}{R-1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Damit ist (g_n) beschränkt auf ∂S, also nach dem Maximumprinzip auch auf S.
Nun sei $\delta := \operatorname{dist}\big(\{w_1, w_2\}, B\big)(> 0)$. Dann erhält man

$$\|F - s_{n-1}\|_{\infty,B} = ||h_n||_{\infty,B} \leq \delta^{-2}\|g_n\|_{\infty,B} \leq \delta^{-2}\|g_n\|_{\infty,S} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und damit

$$\|s_{n-1}\|_{\infty,B} \leq \|F\|_{\infty,B} + \delta^{-2} \sup_{k\in\mathbb{N}} \|g_k\|_{\infty,S} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist (s_n) beschränkt auf B.

2. Nun gelte $a_n \to 0$ und damit auch $A_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Nach (14.1) gilt $h_n \to 0$ punktweise auf $\mathbb{D}$, also auch $g_n \to 0$ punktweise auf $\mathbb{D}$. Da (g_n) nach 1. auf S beschränkt ist, ist $(g_n|_{S^0})$ normal nach dem Satz von Montel. Aus dem Satz von Vitali ([Ü]) folgt, dass (g_n) lokal gleichmäßig auf S^0 gegen 0 konvergiert. Mit

$$||F - s_{n-1}||_{\infty,B} \leq \delta^{-2}||g_n||_{\infty,B}$$

ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz von (s_n) auf B gegen F. □

Beispiel 14.9 Wir betrachten wieder

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Nach dem Satz von Fatou und M. Riesz gilt

$$\log\left(\frac{1}{1 - e^{i\theta}}\right) = f^*(e^{i\theta}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{i\nu\theta}}{\nu}$$

für alle $\theta \in (0, 2\pi)$ mit lokal gleichmäßiger Konvergenz auf $(0, 2\pi)$.

Bemerkung 14.10 Kombiniert man B. 14.5 mit dem Satz von Fatou und M. Riesz, so sieht man, dass komager viele $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ nicht über den Einheitskreis hinaus ,,analytisch fortsetzbar" sind, d. h., es existiert keine Funktion $F \in H(U)$, wobei $U \supset \mathbb{D}$, $U \neq \mathbb{D}$ offen ist, mit $F|_{\mathbb{D}} = f$ (beachte: $a_n \to 0$ für $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$).

A Zusammenhängende Mengen

Bemerkung und Definition A.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. X heißt *unzusammenhängend*, falls offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit

$$X = U \cup V,\ U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset,\ U \cap V = \emptyset\,.$$

   Anderenfalls heißt X *zusammenhängend*.

2. $M \subset X$ heißt *unzusammenhängend*, falls $(M, d_{|M \times M})$ unzusammenhängend ist (d. h. falls offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit $M \subset U \cup V, U \cap M \neq \emptyset, V \cap M \neq \emptyset, U \cap V \cap M = \emptyset$). Anderenfalls heißt M *zusammenhängend*.

Aus der Definition ergibt sich leicht, dass einpunktige Mengen zusammenhängend sind, und dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn außer $\emptyset$ und X keine Teilmengen gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Beispiel A.2 Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.
1. Wir betrachten $M = [0, 1] \cup [2, 3]$. Dann gilt für die offenen Mengen $U = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), V = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$:

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap M \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \emptyset\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
2. Ist $M = \mathbb{Q}$, so gilt für die offenen Mengen $U = (-\infty, \sqrt{2}), V = (\sqrt{2}, \infty)$:

$$\mathbb{Q} \subset U \cup V, \quad U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset, \quad V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap \mathbb{Q} = \emptyset\,,$$

also ist auch $\mathbb{Q}$ unzusammenhängend.

In $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ gilt allgemein

Satz A.3 *Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein (ggfs. einpunktiges) Intervall ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Es sei $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann existieren Punkte a, b, c mit $a < c < b$ und $a, b \in M, c \notin M$. Folglich gilt für $U := (-\infty, c), V := (c, \infty)$

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap M \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \emptyset\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
„$\Leftarrow$“: Angenommen, M ist unzusammenhängend. Dann existieren offene Mengen U, V in $\mathbb{R}$ mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \emptyset$, $V \cap M \neq \emptyset$ und $U \cap V \cap M = \emptyset$.
Es seien $a \in U \cap M$, $b \in V \cap M$. Dann ist $a \neq b$ (und dann o.E. $a < b$). Da M ein Intervall ist, gilt $[a, b] \subset M$. Wir setzen $\xi := \sup(U \cap [a, b])$.

Da U offen ist, gilt $\xi > a$. Damit ist $\xi \notin V$ (Denn: angenommen $\xi \in V$. Da V offen ist, existiert dann ein $a < c < \xi$ mit $(c, \xi] \subset V$. Nach Definition des Supremums ist $(c, \xi] \cap U \neq \emptyset$ und damit auch $U \cap V \cap M \neq \emptyset$. Widerspruch.)
Da $M \subset U \cup V$ ist, folgt $\xi \in U$. Da U offen und $\xi < b$ ist, widerspricht dies der Definition von ξ. $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass der Zusammenhang einer Menge sich unter stetigen Abbildungen auf die Bildmenge überträgt.

Satz A.4 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist $M \subset X$ zusammenhängend, so ist auch $f(M) \subset Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir können uns beim Beweis auf den Fall $M = X$ und $Y = f(M)$ beschränken (ansonsten betrachte $g : M \to f(M)$ mit $g(x) := f(x)$ $(x \in M)$).
Es sei $B \subset Y$ offen und abgeschlossen. Dann ist auch $f^{-1}(B) \subset X$ offen und abgeschlossen. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(B) = \emptyset$ oder $f^{-1}(B) = X$. In ersten Fall ist $B = \emptyset$ und im zweiten gilt $Y = f(X) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, also $B = Y$. Damit ist $Y = f(X)$ zusammenhängend. $\square$

Als Konsequenz aus S. A.3 und S. A.4 erhalten wir eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes:

Satz A.5 *Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $M \subset X$ zusammenhängend, so ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

Beweis. Nach S. A.4 ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, also ein Intervall nach S. A.3. $\square$

Bemerkung A.6 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.
Sind M_α $(\alpha \in I)$ zusammenhängende Mengen in X mit $\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha \neq \emptyset$, so ist $\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$ ebenfalls zusammenhängend.
(Denn: Wir setzen $M := \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$. Es seien U und V in X offene Mengen mit $M \subset U \cup V$, $M \cap U \neq \emptyset$ und $M \cap V \neq \emptyset$. Ist $x \in \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha$, so ist $x \in U \cup V$. O. E. sei $x \in U$. Weiter existiert ein $\alpha \in I$ mit $M_\alpha \cap V \neq \emptyset$. Aus $x \in M_\alpha \cap U$ folgt auch $M_\alpha \cap U \neq \emptyset$. Da M_α zusammenhängend ist, folgt $M_\alpha \cap U \cap V \neq \emptyset$. Damit ist auch $M \cap U \cap V \neq \emptyset$.)

Bemerkung und Definition A.7 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$. Für $x \in M$ heißt

$$Z_M(x) := \bigcup \{A \subset M : x \in A, A \text{ zusammenhängend}\}$$

(*Zusammenhangs-)Komponente* von M (bezüglich x).
Nach B. A.6 ist $Z_M(x)$ zusammenhängend. Zudem gilt ([Ü]) für $x, y \in M$ entweder $Z_M(x) = Z_M(y)$ oder $Z_M(x) \cap Z_M(y) = \emptyset$ (also ist $\{Z_M(x) : x \in M\}$ eine Zerlegung von M).

Bemerkung und Definition A.8 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.
1. Ist $\gamma : [a, b] \to X$ stetig, so heißt γ ein *Weg* (in X). Der Punkt $\gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt* des Weges und $\gamma(b)$ heißt *Endpunkt* des Weges. Gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt der Weg *geschlossen*. Ferner heißt γ ein *Jordanweg*, falls aus $\gamma(t) = \gamma(s)$ schon $t, s \in \{a, b\}$ folgt. Schließlich nennt man $\gamma^* := \gamma([a, b])$ die *Spur* von γ. Nach S. A.4 und S. A.3 ist γ^* zusammenhängend.
2. Eine Menge $M \subset X$ heißt *wegzusammenhängend*, falls zu allen Punkten $x, y \in M$ ein Weg γ in M existiert mit Anfangspunkt x und Endpunkt y.

Bemerkung und Definition A.9 Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^d$ heißt *sternförmig* (bzgl. x_0), falls $I[x, x_0] \subset M$ für alle $x \in M$ gilt, d.h. falls $M = \bigcup_{x \in M} I[x, x_0]$ (hierbei ist $I[x, x_0] = \gamma^*_{x_0,x}$, wobei $\gamma_{x_0,x}(t) = x_0 + t(x - x_0)$ für $t \in [0, 1]$). Insbesondere sind konvexe Mengen sternförmig. Außerdem ist jede sternförmige Menge wegzusammenhängend.

Satz A.10 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $M \subset X$ wegzusammenhängend, so ist M auch zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $x_0 \in M$ fest. Dann existiert zu jedem $x \in M$ ein Weg γ_x in M mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x. Damit ist $M = \bigcup_{x \in M} \gamma_x^*$. Da γ_x^* zusammenängend ist und $x_0 \in \bigcap_{x \in M} \gamma_x^*$ gilt, ist M nach B. A.6 zusammenhängend. □

Bemerkung und Definition A.11 1. Eine Menge $G \subset \mathbb{K}^d$ heißt *Gebiet*, falls G offen, nichtleer und zusammenhängend ist.
2. Ist G ein Gebiet, so ist G auch wegzusammenhängend.
(Denn: Es seien $x_0 \in G$ fest und A die Menge aller $x \in G$ so, dass ein Weg γ_x in G existiert mit Endpunkt x und Anfangspunkt x_0. Ist $x \in A$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset G$. Ist $y \in U_\delta(x)$, so lässt sich γ_x durch „Anhängen“ einer Strecke zu einem Weg in G mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt y fortsetzen. Also ist A offen in G. Die gleiche Überlegung liefert auch die (Folgen-)Abgeschlossenheit von A in G. Da $A \neq \emptyset$ ist (beachte: $x_0 \in A$), folgt $A = G$.)
3. Ist $\Omega \subset \mathbb{K}^d$ offen, so ist auch $Z_\Omega(x)$ offen für alle $x \in \Omega$ ([Ü]). Also ist jede Komponente von Ω offen (und damit ein Gebiet). Außerdem hat Ω höchstens abzählbar viele Komponenten ([Ü]).

B Parameterintegrale

Satz B.1 *Es seien $M \subset \mathbb{K}$ kompakt und $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Ferner sei $\varphi : M \times I \to \mathbb{C}$ so, dass $\varphi(z, \cdot)$ für alle $z \in M$ eine Regelfunktion ist. Wir definieren $\Phi : M \to \mathbb{C}$ durch*

$$\Phi(z) := \int_a^b \varphi(z, t)\, dt \qquad (z \in M).$$

1. *Ist φ stetig auf $M \times I$, so ist auch Φ stetig (auf M).*
2. *Ist M konvex und ist $\varphi(\cdot, t)$ für alle $t \in I$ differenzierbar und $\frac{\partial\varphi}{\partial z} : M \times I \to \mathbb{C}$ mit $\frac{\partial\varphi}{\partial z} := \partial_1\varphi$ stetig, so ist Φ (stetig) differenzierbar auf M mit*

$$\Phi'(z) = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z, t)\, dt \qquad (z \in M).$$

Beweis. Es sei $z_0 \in M$ fest.
1. Da $M \times I$ kompakt ist, ist φ gleichmäßig stetig auf $M \times I$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|\varphi(z, t) - \varphi(z_0, t)| < \varepsilon \qquad (|z - z_0| < \delta,\ t \in I).$$

Dann ist für $|z - z_0| < \delta$ auch

$$|\Phi(z) - \Phi(z_0)| \le \int_a^b |\varphi(z, t) - \varphi(z_0, t)| dt \le \varepsilon(b - a)$$

2. Wir setzen für $t \in I$

$$h_t(z) := \varphi(z, t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0, t) \cdot z \qquad (z \in M).$$

Dann ist h_t differenzierbar auf M mit

$$h_t'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z, t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0, t) \qquad (z \in M).$$

Nun sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ stetig auf $M \times I$ ist (und $h_t'(z_0) = 0$ gilt), existiert wie oben ein $\delta > 0$ so, dass

$$|h_t'(z)| < \varepsilon \qquad (|z - z_0| < \delta,\ t \in I).$$

Ist $0 < |z - z_0| < \delta$, so ergibt sich mit $\gamma(s) := z_0 + s(z - z_0)$ für $s \in [0, 1]$ nach dem HDI, Teil 2 (beachte: h_t' ist stetig auf M) und der Kettenregel für alle $t \in I$

$$h_t(z) - h_t(z_0) = \int_0^1 (h_t \circ \gamma)'(s)\, ds = \int_0^1 h_t'(\gamma(s)) ds \cdot (z - z_0).$$

Hieraus folgt für alle $t \in I$

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0,t)(z-z_0)| \\
&\quad = |h_t(z) - h_t(z_0)| \le \int_0^1 \underbrace{|h_t'(\gamma(s))|}_{<\varepsilon} \, ds \cdot |z-z_0| < \varepsilon |z-z_0|,
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
&|\Phi(z) - \Phi(z_0) - \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0,t)\, dt \cdot (z-z_0)| \\
&\le \int_a^b |\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0,t)(z-z_0)|\, dt \le \varepsilon |z-z_0|(b-a)
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\Big|\frac{\Phi(z) - \Phi(z_0)}{z-z_0} - \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0,t) dt\Big| \le \varepsilon(b-a).
$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung B.2 Da Stetigkeit und Differenzierbarkeit lokale Eigenschaften sind, gilt die Aussage des Satzes auch für beliebige offene Mengen M (Man beachte: Ist M offen, so gilt $M = \bigcup_{z \in M} \overline{U_{\delta_z}(z)}$ für geeignete $\delta_z > 0$).

Der folgende Satz wird im Beweis zum Cauchy Theorem verwandt.

Satz B.3 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$ und γ eine Kette in Ω. Dann ist $\Phi : \Omega \to \mathbb{C}$, definiert durch*

$$
\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (z \in \Omega)
$$

wobei der Differenzenquotient für $z = \zeta$ als $f'(z)$ interpretiert wird, holomorph in Ω.

Beweis. 1. Wir definieren $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ durch

$$
g(z,\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & z \ne \zeta \\ f'(z), & z = \zeta \end{cases}.
$$

Dann gilt

$$
\frac{\partial g}{\partial z}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z)}{(\zeta - z)^2}, & \zeta \ne z \\ \dfrac{f''(z)}{2}, & \zeta = z \end{cases}
$$

und g sowie $\partial g/\partial z$ sind stetig auf $\Omega \times \Omega$.
Denn: Ist $(z_0, \zeta_0) \in \Omega \times \Omega$ mit $\zeta_0 \neq z_0$, so gilt mit der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z_0, \zeta_0) = \frac{f(\zeta_0) - f(z_0) - f'(z_0)(\zeta_0 - z_0)}{(\zeta_0 - z_0)^2}.$$

Ist $\zeta_0 = z_0$, so gilt für $z \neq z_0$

$$\begin{aligned}\frac{g(z, z_0) - g(z_0, z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{(z - z_0)^2}\big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big) \\ &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^{\nu-2} \to \frac{f''(z_0)}{2} \quad (z \to z_0).\end{aligned}$$

Die Stetigkeit von $\partial g/\partial z$ ist klar an allen Stellen (z_0, ζ_0) mit $z_0 \neq \zeta_0$.
Es sei also $z_0 = \zeta_0$ und $0 < R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Dann ist nach dem Taylor-Satz für Richtungen ($\to$ Analysis) für $z, \zeta \in U_R(z_0), z \neq \zeta$ mit $\mathbf{v} := \zeta - z$

$$\begin{aligned} f(\zeta) = f(z + \mathbf{v}) &= f(z) + \partial_{\mathbf{v}} f(z) + \int_0^1 (1 - s)\, \partial_{\mathbf{v}}^2 f(z + s\mathbf{v})\, ds \\ &= f(z) + f'(z) \cdot (\zeta - z) + (\zeta - z)^2 \int_0^1 (1 - s)\, f''(z + s\mathbf{v})\, ds.\end{aligned}$$

Weiter ergibt sich aus der Stetigkeit von f'' an z_0

$$\int_0^1 (1 - s) f''(z + s\mathbf{v})\, ds \to f''(z_0) \int_0^1 (1 - s) ds = \frac{f''(z_0)}{2} \qquad ((z, \zeta) \to (z_0, z_0)).$$

Also folgt für $(z, \zeta) \to (z_0, z_0)$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z, \zeta) = \left\{ \begin{array}{ll} \int_0^1 (1 - s)\, f''(z + s\mathbf{v})\, ds, & \text{falls } z \neq \zeta \\ \frac{f''(z)}{2}, & \text{falls } z = \zeta \end{array} \right\} \to \frac{f''(z_0)}{2} = \frac{\partial g}{\partial z}(z_0, z_0).$$

Eine analoge (einfachere) Argumentation unter Nutzung des Taylor-Satzes für $n = 0$ statt $n = 1$ liefert auch die Stetigkeit von g auf $\Omega \times \Omega$.
2. Es sei g wie in 1. Dann ist mit $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z, \zeta)\, d\zeta \left(= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\iota \in I} \int_{\alpha_\iota}^{\beta_\iota} g(z, \gamma_\iota(t))\gamma_\iota'(t) dt \right) \qquad (z \in \Omega).$$

Nach 1. und S. B.1 ist Φ differenzierbar auf Ω mit $\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\partial g}{\partial z}(z, \zeta)\, d\zeta$ für $z \in \Omega$.
Die Stetigkeit von $\partial g/\partial z$ impliziert auch, dass Φ' stetig ist (ergibt sich wieder aus S. B.1).
Damit ist $\Phi \in H(\Omega)$. □

C Der Satz von Arzela-Ascoli

Wir betrachten allgemeine metrische Räume und Mengen stetiger Funktionen zwischen diesen metrischen Räumen. Dazu seien $(X, d = d_X), (Y, d = d_Y)$ metrische Räume. Wir setzen

$$C(X,Y) := \{f : X \to Y : f \text{ stetig}\}$$

und für X kompakt

$$d_\infty(f,g) := \max_{x\in X} d\big(f(x), g(x)\big) \qquad (f, g \in C(X,Y)).$$

(Beachte: Aus

$$\big|d(u,v) - d(\tilde{u},\tilde{v})\big| \le d(u,\tilde{u}) + d(v,\tilde{v}) \qquad (u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \in Y)$$

folgt

$$\big|d(f(x), g(x)) - d\big(f(\tilde{x}), g(\tilde{x})\big)\big| \le d(f(x), f\big(\tilde{x})\big) + d\big(g(x), g(\tilde{x})\big)$$

für alle $x, \tilde{x} \in X$ und damit aus der (gleichmäßigen) Stetigkeit von f und g auch die (gleichmäßige) Stetigkeit von $x \mapsto d\big(f(x), g(x)\big)$. Da X kompakt ist, existiert $d_\infty(f,g)$.)
Ist speziell $(Y,d) = (\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$, so ist

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty \qquad \big(f, g \in C(X,\mathbb{K})\big).$$

Dabei sieht man wie in diesem Fall ($\to$ Analysis) ganz allgemein für X kompakt, Y vollständig:

- $(C(X,Y), d_\infty)$ ist vollständig.
- Ist X endlich und ist Y kompakt, so ist $(C(X,Y) = Y^X, d_\infty)$ kompakt. (Ist $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, so entspricht Y^X dem Produkt $Y^m = Y \times \ldots \times Y$. Wie im Beweis zum Satz von Bolzano-Weierstraß sieht man, dass Y^m kompakt ist.)

Im Allgemeinen ist jedoch im Falle Y kompakt der Raum $C(X,Y)$ nicht kompakt. Ist etwa $X = Y = [0,1]$ (mit $d_X = d_Y = d_{|\cdot|}$), so hat die Folge (f_n) in $C(X,Y)$ mit

$$f_n(x) = x^n \qquad \big(x \in [0,1]\big)$$

keine in $C(X,Y)$ konvergente (also auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergente) Teilfolge, da jede solche gegen $f : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}$$

konvergieren müsste.

Definition C.1 Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ heißt *gleichgradig stetig* an der Stelle $x_0 \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ so existiert, dass

$$d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta \text{ und alle } f \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F}$ heißt *gleichgradig stetig*, falls $\mathcal{F}$ an allen $x_0 \in X$ gleichgradig stetig ist. Weiterhin schreiben wir für $X_0 \subset X$ im Folgenden

$$\mathcal{F}|_{X_0} := \{f|_{X_0} : f \in \mathcal{F}\} .$$

Satz C.2 *(Arzela-Ascoli)*
Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) kompakte metrische Räume. Ist $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ gleichgradig stetig, so ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt.

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst ein Hilfsresultat, das auch für sich genommen von Interesse ist.
Ist (M, d) ein metrischer Raum, so heißt eine Menge $A \subset M$ *präkompakt*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $E \subset M$ so existiert, dass

$$A \subset \bigcup_{x \in E} U_\varepsilon(x)$$

(dabei kann man stets $E \subset A$ wählen; [Ü])). Dann gilt:

$$A \text{ präkompakt } \Leftrightarrow \text{ jede Folge in } A \text{ hat eine Cauchy-Teilfolge.}$$

und damit im Fall eines vollständigen metrischen Raumes

$$A \text{ präkompakt } \Leftrightarrow A \text{ relativ kompakt.}$$

(Denn:
„$\Rightarrow$": Es sei (x_n) eine Folge in A. Da $A_0 := A$ präkompakt ist, existiert eine endliche Menge $E_1 \subset X$ mit

$$A_0 = \bigcup_{y \in E_1} (U_{1/2}(y) \cap A_0).$$

Da E_1 endlich ist, existiert ein $y_1 \in E_1$ so, dass ∞ viele der Folgeglieder von (x_n) in

$$A_1 := U_{1/2}(y_1) \cap A_0$$

liegen (d. h. $|\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A_1\}| = \infty$). Außerdem ist diam $(A_1) \leq 1$.
Da $A_1 \subset A_0$ präkompakt ist, existiert ein $E_2 \subset X$ endlich mit

$$A_1 = \bigcup_{y \in E_2} (U_{1/4}(y) \cap A_1).$$

Wieder existiert ein $y_2 \in E_2$ so, dass ∞ viele Folgeglieder von (x_n) in

$$A_2 = U_{1/4}(y_2) \cap A_1$$

liegen. Dabei ist diam $(A_2) \leq 1/2$.
Induktiv erhält man auf diese Weise eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Mengen mit $A_j \subset A_{j-1}$ und diam $(A_j) \leq 1/j$ so, dass jedes A_j unendlich viele Folgeglieder von (x_n) enthält. Setzt man $n_0 := 1$ und wählt für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $n_j \geq n_{j-1}$ mit $x_{n_j} \in A_j$, so ist (x_{n_j}) eine Cauchy-Folge in X.
„$\Leftarrow$": [Ü])

2. Nach 1. reicht es, zu zeigen: $\mathcal{F}$ ist präkompakt.
Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $x \in X$ existiert ein $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ mit

$$f\big(U_{\delta_{x,\varepsilon}}(x)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x)\big) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{F}.$$

Da X kompakt und $(U_{\delta_{x,\varepsilon}})_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X ist, existiert eine endliche Teilmenge E von X mit

$$X = \bigcup_{x\in E} U_{\delta_{x,\varepsilon}}(x).$$

Da Y kompakt ist, ist auch $\big(Y^E(= C(E,Y)), d_\infty)\big)$ kompakt. Also ist $\mathcal{F}|_E$ präkompakt (da relativ kompakt), d. h. für eine endliche Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ gilt

$$\mathcal{F}|_E \subset \bigcup_{g\in\mathcal{E}} U_\varepsilon(g|_E)\ (\subset Y^E).$$

Es sei $f \in \mathcal{F}$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{E}$ mit $f|_E \in U_\varepsilon(g|_E)$.
Ist $x \in X$ beliebig, so ist $x \in U_{\delta_{x_0,\varepsilon}}(x_0)$ für ein $x_0 \in E$. Für dieses x_0 gilt

$$d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon \quad \text{und} \quad d\big(g(x), g(x_0)\big) < \varepsilon,$$

also

$$d\big(f(x), g(x)\big) \leq d\big(f(x), f(x_0)\big) + d\big(f(x_0), g(x_0)\big) + d\big(g(x_0), g(x)\big) < 3\varepsilon.$$

Folglich ist

$$d_\infty(f,g) < 3\varepsilon$$

und damit

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{g\in\mathcal{E}} U_{3\varepsilon}(g).$$

□

Bemerkung C.3 Aus Satz C.2 ergibt sich auch die folgende Variante des Satzes von Arzela-Ascoli für $\mathbb{K}^q$-wertige Funktionen (wobei $q \in \mathbb{N}$): Ist (X,d) ein kompakter metrischer Raum und ist $\mathcal{F} \subset C(X,\mathbb{K}^q)$ beschränkt in $(C(X,\mathbb{K}^q), \|\cdot\|_\infty)$ und gleichgradig stetig, so

ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt.
(Denn: Ist $\|f\|_\infty \le R$ für alle $f \in \mathcal{F}$, so kann man $\mathcal{F}$ auch als Familie in $C(X, U_R[0])$, wobei (mit $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{K}^q$)

$$U_R[y] := \{z \in \mathbb{K}^q : |z - y| \le R\} \subset \mathbb{K}^q,$$

auffassen. Dabei ist $(U_R[0], d_{|\cdot|})$ kompakt. Also ergibt sich die Behauptung aus S. C.2.

Definition C.4 Es seien (X, d_X) ein metrischer und (Y, d_Y) vollständiger metrischer Raum. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ heißt *normal*, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine Teilfolge besitzt, die gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von X konvergiert, d. h. ist (f_n) eine Folge in $\mathcal{F}$, so existieren eine Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n) und eine Funktion $g : X \to Y$ mit $f_{n_j} \to g$ $(j \to \infty)$ in $(C(K, Y), d_\infty)$ für alle kompakten $K \subset X$.
Man sieht leicht, dass etwa $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, $f_n(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$, normal in $C(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ ist.

Der Zusammenhang zum Satz von Arzela-Ascoli ergibt sich aus folgendem Resultat.

Satz C.5 *Es seien $p \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{K}^p$ offen und (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum. Für $\mathcal{F} \subset C(\Omega, Y)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) $\mathcal{F}$ ist normal.

b) Für alle kompakten $K \subset \Omega$ ist $\mathcal{F}|_K$ relativ kompakt in $(C(K, Y), d_\infty)$.

c) Für alle $x \in \Omega$ existiert eine offene Umgebung U von x so, dass $\mathcal{F}|_U$ normal in $C(U, Y)$ ist.

Beweis. c) $\Rightarrow$ b): Es sei $K \subset \Omega$ kompakt. Für alle $x \in K$ existiert eine offene Umgebung U_x von x so, dass $\mathcal{F}|_{U_x}$ normal ist. Es seien $\delta_x > 0$ so, dass $U_{\delta_x}[x] \subset U_x$ gilt. Dann ist $\big(U_{\delta_x}(x)\big)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K. Also existieren $x_1, \ldots, x_N \in K$ so, dass mit $L_m := U_{\delta_{x_m}}[x_m]$

$$K \subset \bigcup_{m=1}^{N} L_m.$$

Es sei nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$.
Wir setzen $I_0 := \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung (beachte $L_1 \subset U_{x_1}$ kompakt) existiert eine Teilfolge $(f_n)_{n \in I_1}$ von $(f_n)_{n \in I_0}$, die gleichmäßig auf L_1 konvergiert. Wieder nach Voraussetzung existiert eine Teilfolge $(f_n)_{n \in I_2}$ von $(f_n)_{n \in I_1}$, die gleichmäßig auf L_2 (und damit auch auf K_2, wobei $K_m := L_1 \cup \ldots \cup L_m$) konvergiert. Induktiv ergibt sich für jedes $m \in \{1, \ldots, N\}$ eine Teilfolge $(f_n)_{n \in I_m}$ von $(f_n)_{n \in I_{m-1}}$, die gleichmäßig auf K_m konvergiert. Für $m = N$ ergibt sich gleichmäßige Konvergenz auf $K_N \supset K$.

b) $\Rightarrow$ a): Wir setzen

$$K_m := K_m(\Omega) := U_m[0] \cap \{x \in \Omega : \text{dist}\,(x, \partial\Omega) \ge 1/m\}.$$

Dann gilt

- $K_m \subset \Omega$ kompakt ($m \in \mathbb{N}$),
- $K_m \uparrow \Omega$, d. h. $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} K_m = \Omega$ und $K_m \subset K_{m+1}$ (genauer ist sogar $K_m \subset (K_{m+1})^o$),
- Für alle $K \subset \Omega$ kompakt ist $K \subset K_m$ für m genügend groß.

Wie im 1. Beweisschritt sieht man: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$, so existiert (mit $I_0 := \mathbb{N}$) zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f_n)_{n\in I_m}$ von $(f_n)_{n\in I_{m-1}}$, die gleichmäßig auf K_m konvergiert. Definiert man $n_0 := 1$ und wählt $n_j > n_{j-1}$ mit $n_j \in I_j$, so konvergiert die Folge $(f_{n_j})_j$ gleichmäßig auf allen K_m und damit auch gleichmäßig auf allen $K \subset \Omega$ kompakt.

a) $\Rightarrow$ c): Klar. $\square$

Bemerkung C.6 Aus S. C.5 und dem Satz von Arzela-Ascoli (bzw. B. C.3) ergibt sich, dass jede der folgenden Bedingungen hinreichend ist für die Normalität einer Familie $\mathcal{F} \subset C(\Omega, Y)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{K}^p$ offen.

1. (Y, d) ist kompakt und $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig.
2. $\mathcal{F} \subset C(\Omega, \mathbb{K}^q)$ ist beschränkt auf allen kompakten Teilmengen K von Ω (d. h. $\mathcal{F}|_K$ ist beschränkt in $(C(K, \mathbb{K}^q), ||\cdot||_\infty)$) und gleichgradig stetig.