Jürgen Müller

Funktionentheorie

Skriptum zur Vorlesung Sommersemester 2024
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1 Analytische Funktionen und Cauchyintegrale

Im ersten Abschnitt untersuchen wir (kurz) analytische Funktionen und definieren dann Cauchyintegrale als typisches Beispiele. Zunächst einige Bezeichnungen: Für $a \in \mathbb{K}$ und $0 \leq \rho \leq \infty$ schreiben wir

$$U_\rho(a) := \{x \in \mathbb{K} : |z - a| < \rho\}$$

und

$$B_\rho(a) := \{x \in \mathbb{K} : |x - a| \leq \rho\}, \quad K_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \rho\}$$

sowie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kurz $\mathbb{D} := U_1(0)$ und $\mathbb{S} := K_1(0)$. Ist X eine Menge $f : X \to \mathbb{C}$, so schreiben wir

$$Z(f) := \{a \in X : f(a) = 0\}$$

für die Menge der Nullstellen von f.

Bemerkung und Definition 1.1 Ist $X \subset \mathbb{K}$ offen, so heißt $f : X \to \mathbb{C}$ **analytisch** an $a \in X$, falls ein $R > 0$ und eine Folge (c_k) in $\mathbb{C}$ so existieren, dass

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k \qquad (|h| < R)$$

gilt. In diesem Fall ist f insbesondere beliebig oft differenzierbar auf $U_R(a) \cap X$ [1] mit

$$c_k = f^{(k)}(a)/k! =: c_k(f, a) \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Wieder heißt f kurz **analytisch**, falls f analytisch an jedem Punkt $a \in X$ ist. Ist f analytisch an a, so nennt man (mit $\min \varnothing := \infty$)

$$\operatorname{ord}(f, a) := \min\{k \in \mathbb{N}_0 : c_k(f, a) \neq 0\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

die **Ordnung** von f an a. Ist a eine Nullstelle von f, so ist $\operatorname{ord}(f, a) > 0$.

Bemerkung 1.2 Es sei f analytisch an der Stelle a. Ist $\operatorname{ord}(f, a) = \infty$, so ist $c_k(f, a) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also $f(a + h) = 0$ für $|h| < R$. Ist andererseits $n := \operatorname{ord}(f, a) < \infty$, so ist

$$f(a + h) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f, a) h^k = h^n \varphi(h)$$

mit $\varphi(h) := \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+n}(f, a) h^m$ für $|h| < R$. Dabei ist $\varphi(0) = c_n(f, a) \neq 0$ und aus Stetigkeitsgründen daher $\varphi(h) \neq 0$ auf einer Umgebung U von 0. Also ist f nullstellenfrei auf einer Umgebung von a bis auf die (mögliche) Ausnahmestelle a. Damit sieht man:
Ist $a \in Z(f)$, so ist entweder f lokal konstant $= 0$ an a [2] oder a ein isolierter Punkt von $Z(f)$.

[1] siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 1.26
[2] f heißt lokal konstant an a, falls f auf einer Umgebung von a konstant ist.

Definition 1.3 Es sei (X,d) ein metrischer Raum.

1. (X,d) heißt **zusammenhängend**, falls gilt: Sind $U,V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V = \varnothing$, so ist $U = \varnothing$ oder $V = \varnothing$. Andernfalls heißt X **unzusammenhängend**.

2. $M \subset X$ heißt **zusammenhängend**, falls (M, d_M) zusammenhängend (oder $M = \varnothing$) ist.[3]

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn X und $\varnothing$ die einzigen in (X,d) offen und abgeschlossenen Mengen sind. Eine Menge $G \subset X$ heißt **Gebiet**, falls G nichtleer, offen und zusammenhängend ist.[4]

Satz 1.4 (Identitätssatz)
Es seien $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet und $f,g : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt: Hat $Z(f-g)$ einen Häufungspunkt in G, so ist schon $f = g$.[5]

Beweis. Es reicht, die Behauptung für $g = 0$ zu beweisen (ansonsten betrachte man $f - g$ statt f).
Da $f : G \to \mathbb{C}$ stetig ist, ist $Z(f)$ abgeschlossen in G. Ist $A \subset G$ die Menge der Häufungspunkte von $Z(f)$ in G, so ist $A \subset Z(f)$ und A abgeschlossen in G.[6] Ist $A \neq \varnothing$ und $a \in A$, so ist a nach Bemerkung 1.2 ein innerer Punkt von A. Also ist A auch offen in G. Da G zusammenhängend ist, gilt schon $A = G$. Damit ist auch $Z(f) = G$, also $f = 0$. $\square$

Bemerkung und Definition 1.5 Es sei

$$\varphi(t) := e^{it} = \cos t + i \sin t = (\cos t, \sin t) \qquad (t \in [-\pi, \pi]).$$

Dabei ist $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi) = -1$ sowie $\varphi|_{(-\pi,\pi]}$ injektiv mit $\varphi((-\pi,\pi]) = \mathbb{S} \setminus \{-1\}$. Wir schreiben $R(\mathbb{S})$ für die Menge der Funktionen $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $f \circ \varphi$ eine Regelfunktion auf $[-\pi,\pi]$ ist. Dann gilt $C(\mathbb{S}) \subset R(\mathbb{S})$.[7] Für $f \in R(\mathbb{S})$ setzen wir

$$\int f\, dm := \int f(\zeta)\, dm(\zeta) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ \varphi)(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, dt.$$

Dann gilt

$$\int \zeta^k\, dm(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\, dt = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0 \\ -ie^{ikt}/k\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, & \text{falls } k \neq 0 \end{cases}. \tag{1.1}$$

[3]Dabei bezeichnet d_M die Spurmetrik auf M.
[4]Einige Ergebnisse in diesem Kontext finden sich im Anhang A
[5]Insbesondere ist im Falle $f \neq 0$ damit $Z(f)$ eine diskrete Menge in G.
[6]Für die Begrifflichkeiten siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Seite 30.
[7]Für einen metrischen Raum (X,d) bezeichnet $C(X)$ die Menge der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$.

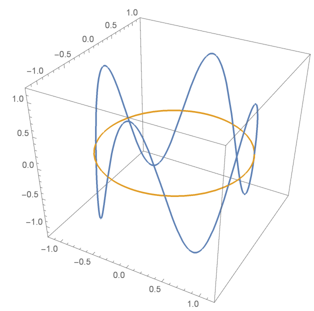

Abbildung 1: $\mathrm{Re}(\zeta^4) = \cos(4t)$ mit $\zeta = e^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

Bemerkung 1.6 Es sei $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ stetig. Existiert eine Stammfunktion $G : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ von g, so erhält man aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$i \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it}) e^{it} \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (g \circ \varphi)(t) \varphi'(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (G \circ \varphi)'(t) \, dt = (G \circ \varphi)\big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

und damit

$$\int g(\zeta)\zeta \, dm(\zeta) = 0. \tag{1.2}$$

Während für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Funktion $z \mapsto z^k/k$ Stammfunktion von $z \mapsto z^{k-1}$ auf $\mathbb{C}$ ist, ergibt sich aus (1.2) in Verbindung mit (1.1) dass, die Funktion $\zeta \mapsto 1/\zeta$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{S}$ hat!

Man kann leicht zeigen, dass Polynome und die Exponentialfunktion exp in $\mathbb{C}$ analytische Funktion sind ([Ü]). Damit sind etwa auch die trigonometrischen Funktionen cos und sin analytisch in $\mathbb{C}$. Wir betrachten nun eine für die Funktionentheorie zentrale Klasse analytischer Funktionen.

Definition 1.7 Für $f \in R(\mathbb{S})$ sei die Funktion $Cf : \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(Cf)(z) := \int \frac{f(\zeta)}{1 - z\overline{\zeta}} \, dm(\zeta) = \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \zeta dm(\zeta) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}).$$

Cf heißt **Cauchyintegral** von f.

Satz 1.8 *Es sei $f \in R(\mathbb{S})$. Ist $a \in \mathbb{D}$, so gilt*

$$(Cf)(a + h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k \qquad (|h| < 1 - |a|)$$

mit

$$c_k = \frac{1}{k!}(Cf)^{(k)}(a) = \int \frac{f(\zeta)\overline{\zeta}^k}{(1 - a\overline{\zeta})^{k+1}} \, dm(\zeta) \qquad (k \in \mathbb{N}_0). \tag{1.3}$$

Insbesondere ist Cf analytisch in $\mathbb{D}$.

Beweis. Ist $a \in \mathbb{D}$, so gilt

$$\frac{1}{|1 - a\overline{\zeta}|} \leq \frac{1}{1 - |a|} \tag{1.4}$$

für beliebiges $\zeta \in \mathbb{S}$. Ist nun $|h| < 1 - |a|$, so ergibt sich mit geometrischer Reihe

$$\frac{1}{1 - (a+h)\overline{\zeta}} = \frac{1}{1 - a\overline{\zeta}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{h\overline{\zeta}}{1 - a\overline{\zeta}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{\zeta}^k}{(1 - a\overline{\zeta})^{k+1}}\, h^k$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\mathbb{S}$ (bei festen a, h) nach dem Weierstraß-Kriterium. Durch Vertauschung von Summation und Integration erhält man

$$(Cf)(a+h) = \int \frac{f(\zeta)}{1 - (a+h)\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k \qquad (|h| < 1 - |a|)$$

mit

$$c_k = \int \frac{f(\zeta)\overline{\zeta}^k}{(1 - a\overline{\zeta})^{k+1}}\, dm(\zeta) \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Da $a \in \mathbb{D}$ beliebig war, ist Cf analytisch in $\mathbb{D}$. □

Bemerkung 1.9 Es sei $f \in \mathbb{R}(\mathbb{S})$. Für $a = 0$ ist (1.3)

$$\frac{1}{k!}(Cf)^{(k)}(0) = \int f(\zeta)\overline{\zeta}^k\, dm(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\, dt \tag{1.5}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$[8] und damit

$$(Cf)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int f(\zeta)\overline{\zeta}^k\, dm(\zeta) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Außerdem ergibt sich wegen

$$\Big| \int f(\zeta)\overline{\zeta}^k\, dm(\zeta) \Big| \leq \int |f(\zeta)|\, dm(\zeta) \leq \sup_{\mathbb{S}} |f|$$

die wichtige **Cauchysche Ungleichung**

$$|(Cf)^{(k)}(0)| \leq k! \sup_{\mathbb{S}} |f|) \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Allgemeiner folgt aus (1.4) und (1.3)

$$|(Cf)^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{(1 - |a|)^{k+1}} \sup_{\mathbb{S}} |f| \qquad (a \in \mathbb{D}), \tag{1.6}$$

[8] Das Integral rechts nennt man den k-ten Fourier-Koeffizient von f, auch für negative k.

Beispiel 1.10 Wir betrachten die Monome $p_n(z) := z^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\overline{\zeta} = 1/\zeta$ für $\zeta \in \mathbb{S}$ folgt aus (1.1) und Bemerkung 1.9

$$(Cp_n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int \zeta^{n-k}\, dm(\zeta) = z^n = p_n(z) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Aus Linearitätsgründen gilt damit $(Cp)|_{\mathbb{D}} = p|_{\mathbb{D}}$ für beliebige Polynome p.

Definition 1.11 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar, so nennt man f **holomorph**. Wir setzen $H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph}\}$.

Satz 1.12 (Cauchysche Integralformel)
Es seien $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ und $a \in \mathbb{D}$. Ist $f|_{\mathbb{D}\setminus\{a\}}$ holomorph, so gilt

$$f(a) = \int \frac{f(\zeta)}{1 - a\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) = (Cf)(a).$$

Beweis. Wir definieren $\varphi : [0,1] \times \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(\lambda, \zeta) := \frac{f(a + \lambda(\zeta - a))}{1 - a\overline{\zeta}} \qquad (\lambda \in [0,1],\ \zeta \in \mathbb{S})$$

und $\Phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$\Phi(\lambda) := \int \varphi(\lambda, \zeta)\, dm(\zeta) \qquad (\lambda \in [0,1]).$$

Da φ stetig ist, ist ist Φ stetig auf $[0,1]$ (Stetigkeit von Parameterintegralen). Da zudem $\zeta \mapsto f(a + \lambda(\zeta - a))/\lambda$ für jedes $\lambda \in (0,1)$ eine Stammfunktion zu $\zeta \mapsto f'(a + \lambda(\zeta - a))$ auf $\mathbb{S}$ ist, ergibt sich mit Differenzierbarkeit von Parameterintegralen und (1.2)

$$\Phi'(\lambda) = \int \partial_1 \varphi(\lambda, \zeta)\, dm(\zeta) = \int f'\big(a + \lambda(\zeta - a)\big)\, \zeta\, dm(\zeta) = 0 \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Damit ist Φ konstant auf $[0,1]$ und folglich wegen $(C1)|_{\mathbb{D}} = 1|_{\mathbb{D}}$

$$\int \frac{f(\zeta)}{1 - a\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) = \Phi(1) = \Phi(0) = \int \frac{f(a)}{1 - a\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) = f(a)(C1)(a) = f(a).$$

□

Bemerkung 1.13 Für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{C}$ schreiben wir

$$A(K) := \{f \in C(K) : f|_{K^\circ} \text{ holomorph}\}.$$

Nach Satz 1.12 gilt

$$(Cf)|_{\mathbb{D}} = f|_{\mathbb{D}},$$

für $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$, d. h. f stimmt in $\mathbb{D}$ mit seinem Cauchyintegral überein! Damit gelten sämtliche Aussagen aus Satz 1.8 und Bemerkung 1.9 mit f anstelle von Cf. Insbesondere ist f analytisch in $\mathbb{D}$.

Durch Übertragung des Satzes 1.8 in Verbindung mit Bemerkung 1.13 auf allgemeine Kreise erhält man, dass aus der Holomorphie einer Funktion stets schon deren Analytizität folgt, ein Art mathematisches Wunder, das die komplexe Analysis in fundamentaler Weise von der reellen unterscheidet:

Satz 1.14 (Analytizität holomorpher Funktionen)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Dann ist f analytisch und für jedes $a \in \Omega$ der Konvergenzradius der Taylorreihe $f(a+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_k h^k$ mindestens $R_a := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$. Zudem gilt für $0 < \rho < R_a$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{\rho^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int f(a+\rho\zeta)\overline{\zeta}^k \, dm(\zeta), \tag{1.7}$$

also insbesondere die Mittelwertformel

$$f(a) = \int f(a+\rho\zeta) \, dm(\zeta).$$

Beweis. Für $\rho < R_a$ sei $g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(w) := f(a+\rho w) \qquad (|w| \leq 1).$$

Dann ist $g \in A(\overline{\mathbb{D}})$. Mit Bemerkung 1.13, angewandt auf g, ergibt sich

$$f(a+h) = g\left(\frac{h}{\rho}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \frac{h^k}{\rho^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \quad (|h| < \rho).$$

Da $\rho < R$ beliebig war, gilt die Darstellung für $|h| < R_a$. Außerdem ist nach (1.5)

$$\frac{\rho^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) = \int g(\zeta)\overline{\zeta}^k \, dm(\zeta) = \int f(a+\rho\zeta)\overline{\zeta}^k \, dm(\zeta).$$

Da $a \in \Omega$ beliebig war, ist f analytisch in Ω. □

Wir ziehen einige wichtige – und teils verblüffende – Folgerungen

Bemerkung 1.15 Nach Satz 1.14 sind alle Ableitungen holomorpher Funktionen wieder holomorph und $H(\Omega)$ stimmt mit der Menge der in Ω analytischen Funktionen überein. Insbesondere sind damit Produkte analytischer Funktionen wieder analytisch und $1/f$ analytisch falls f nullstellnfrei ist. Außerdem folgt aus Satz 1.14: Ist G ein Gebiet und ist $f^{(n)} = 0$ (und damit $f^{(k)} = 0$ für $k \geq n$) lokal an einer Stelle a, so ist f Einschränkung eines Polynoms vom Grad $< n$ auf G.

> Denn: Ist $a \in G$, so gilt $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k h^k$ für $|h| < R_a$, also stimmt f auf $U_{R_a}(a)$ mit dem Polynom $z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} c_k (z-a)^k$ überein. Nach dem Identitätssatz gilt dies dann auch auf G.

Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ nennt man auch eine **ganze Funktion**. Insbesondere sind Polynome und exp, sin, cos ganze Funktionen. Bei ganzen Funktionen ist $R_a = \infty$ für alle $a \in \mathbb{C}$ in Satz 1.14.

Satz 1.16 (Liouville)
Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis. Fur $a \in \mathbb{C}$ und $0 < \rho < \infty$ gilt nach (1.7)

$$\rho|f'(a)| \leq \int |f(a+\rho\zeta)|\, dm(\zeta) \leq \sup_{\mathbb{C}} |f|$$

Da ρ beliebig groß gewählt werden kann, ist $f'(a) = 0$ und damit f konstant nach Bemerkung 1.15. □

Bemerkung 1.17 Als Anwendung des Satzes von Liouville ergibt sich ein sehr kurzer Beweis zum Fundamentalsatz der Algebra: Es sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann gilt $|P(z)| \to +\infty$ für $|z| \to \infty$. Angenommen, p hat keine Nullstelle. Dann ist $1/p$ eine ganze Funktion. Nach dem Satz von Liouville existiert eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|1/p(z_n)| \to \infty$. Da $1/p$ auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ beschränkt ist, folgt $|z_n| \to \infty$. Dies widerspricht aber $1/p(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$.

Bemerkung und Definition 1.18 (Maximumprinzip) Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Erfüllt u an $a \in \Omega$ die Mittelwertungleichung, d. h. existiert ein $\delta > 0$ mit

$$u(a) \leq \int u(a+\rho\zeta)\, dm(\zeta) \qquad (0 < \rho < \delta),$$

so gilt: Hat u an a ein lokales Maximum, so ist u schon lokal konstant an a.

> Denn: Ohne Einschränkung sei δ so, dass $g(z) := u(a) - u(z) \geq 0$ für $z \in U_\delta(a)$. Nach der Mittelwertungleichung ist
>
> $$0 \leq \int g(a+\rho\zeta)\, dm(\zeta) = u(a) - \int u(a+\rho\zeta)\, dm(\zeta) \leq 0,$$
>
> also $\int g(a+\rho\zeta)\, dm(\zeta) = 0$ für $0 < \rho < \delta$. Da g stetig ist, impliziert dies $g|_{a+\rho\mathbb{S}} = 0$ für $0 < \rho < \delta$, also $u = u(a)$ auf $U_\delta(a)$.

Satz 1.19 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(G)$. Ist a eine Extremstelle von $\mathrm{Re}\, f$, so ist $\mathrm{Re}\, f$ lokal konstant an a.*[9]

[9] Die gleiche Aussage gilt für $\mathrm{Im} f$.

Beweis. Aus der Mittelwerformel für f folgt, dass folgt, dass $u := \operatorname{Re} f$ die Mittelwertungleichung an a sogar mit Gleichheit erfüllt. Ohne Einschränkung sei $a \in \Omega$ eine Maximalstelle von u. Nach Bemerkung 1.18 ist dann $\operatorname{Re} f$ lokal konstant an a. □

Aus dem Maximumprinzip folgt auch, dass $|f|$ (und damit auch f; [Ü]) an Maximalstellen lokal konstant ist. Eine wesentliche Verschärfung stellt folgender Satz dar

Satz 1.20 (offene Abbildung)
Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und ist $f \in H(\Omega)$ an keiner Stelle lokal konstant, so ist f offen.[10]

Beweis. Es seien $a \in \Omega$ und $w = f(a)$. Es reicht zu zeigen, dass zu jedem (genügend kleinen) $r > 0$ mit $B_r(a) \subset \Omega$ ein $\delta > 0$ existiert mit $U_\delta(w) \subset f(B_r(a))$. Da die w-Stellen von f isoliert sind, können wir $r > 0$ so klein wählen, dass $f(z) - w \neq 0$ für $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$. Wegen der Kompaktheit von $f(a + r\mathbb{S})$ ist

$$\delta := \operatorname{dist}(w, f(a + r\mathbb{S}))/2 > 0\,.$$

Es sei nun $u \in U_\delta(w)$. Für $z \in a + r\mathbb{S}$ gilt dann

$$|f(z) - u| = |f(z) - w - (u - w)| \geq |f(z) - w| - |u - w| > \delta\,.$$

Weiter sei $z \in B_r(a)$ so, dass $|f(z) - u| = \min |f - u|(B_r(a))$. Dann gilt

$$|f(z) - u| \leq |f(a) - u| = |w - u| < \delta.$$

Wir zeigen, dass $f(z) = u$ gilt. Angenommen, nicht. Nach dem Maximumprinzip, angewandt auf $1/(f - u)|_{U_r(a)}$, muss dann $z \in a + r\mathbb{S}$ gelten. Also ergibt sich ein Widerspruch. Damit ist $u = f(z) \in f(B_r(0))$. □

Als Folgerung aus dem Satz von der offenen Abbildung erhält man auch die lokale holomorphe – und damit auch analytische – Umkehrbarkeit holomorpher Funktionen an nichtkritischen Stellen:

Satz 1.21 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Ist $a \in \Omega$ mit $f'(a) \neq 0$, so existieren offene Umgebungen U von a und V von $f(a)$ so, dass $f : U \to V$ bijektiv ist mit $(f|_U)^{-1} \in H(V)$ und*

$$(f^{-1})'(w) = 1/f'(f^{-1}(w)) \qquad (w \in V).$$

Beweis. Wegen $f'(a) \neq 0$ existieren nach der umgekehrten Dreiecksungleichung eine Umgebung U von a und $c > 0$ mit $f'(\zeta) \neq 0$ und

$$|f(z) - f(\zeta)| = |z - \zeta| \left| f'(\zeta) - \left(f'(\zeta) - \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \right) \right| \geq c|z - \zeta| \quad (z, \zeta \in U_\delta(a)).$$

[10] f heißt offen, falls Bilder offener Mengen offen sind.

Damit ist $f|_U : U \to f(U) =: V$ bijektiv. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist V offen und die auf V definierte Umkehrfunktion f^{-1} stetig. Nach der Umkerregel der eindimensionalen Analysis[11] ist f^{-1} stetig differenzierbar mit $(f^{-1})'(w) = 1/f'(f^{-1}(w))$ für $w \in V$. □

Bemerkung 1.22 Es sei (S, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist für kompakte metrische Räume (K, d') auf $C(K, S)$ durch

$$d_K(f, g) := d_{K,S}(f, g) := \max_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

eine vollständige Metrik definiert.[12] Konvergenz einer Folge bezüglich d_K bedeutet gleichmäßige Konvergenz. Im Fall $S = \mathbb{C}$ ist d_K die von der Maximumnorm induzierte Metrik

$$d_K(f, g) = \max_K |f - g|.$$

Bemerkung und Definition 1.23 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen. Für

$$K_m := K_m(\Omega) := \{z \in \Omega : \mathrm{dist}_\chi(z, \partial\Omega) \geq 1/m\} \quad (m \in \mathbb{N})$$

gilt $K_m = \mathbb{C}_\infty$ für $\Omega = \mathbb{C}_\infty$ und allgemein

- $K_m \subset \Omega$ ist kompakt mit $K_m \subset (K_{m+1})^\circ$.
- Für alle $K \subset \Omega$ kompakt ist $K \subset K_m$ für m genügend groß.

Wir nennen $(K_m) = (K_m(\Omega))$ die **Standardausschöpfung** von Ω. Ist nun (S, d) ein vollständiger metrischer Raum, so definieren wir für $f, g \in C(\Omega, S)$ mit $d_\emptyset(f, g) := 0$

$$d_\Omega(f, g) := d_{\Omega,S}(f, g) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \min\{1/m, d_{K_m}(f, g)\} \quad (\leq 1)\,.$$

Man kann leicht nachrechnen, dass d_Ω eine Metrik auf $C(\Omega, S)$ ist. Im Weiteren soll stets $C(\Omega, S)$ mit dieser Metrik versehen sein.

Bemerkung und Definition 1.24 Es seien (S, d), (X, d') metrische Räume und $f_n : X \to S$. Dann heißt die Folge (f_n) **lokal gleichmäßig konvergent** (auf X), falls zu jedem $a \in X$ eine Umgebung U von a so existiert, dass $(f_n|_U)$ gleichmäßig auf U konvergiert. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen, so gilt $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω genau dann, wenn (f_n) gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen gegen f konvergiert.[13]

[11] siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_GW_WS2020-21.pdf Seite 77

[12] siehe etwa Bem. 9.9 in https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_Analysis_1617.pdf.

[13] ergibt sich aus der der Äquivalenz von Kompaktkeit und Überdeckungskompaktheit; siehe Anhang C

Satz 1.25 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen und (S, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt*

1. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(\Omega, S)$ ist genau dann d_Ω-konvergent, wenn sie lokal gleichmäßig auf Ω konvergiert.*
2. *Der metrische Raum $(C(\Omega, S), d_\Omega)$ ist vollständig.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$: Gilt $f_n \to f$ in $(C(\Omega, S), d_\Omega)$ und ist $K \subset \Omega$ kompakt, so wählen wir ein $M = M_K \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_M$. Dann folgt

$$\min\{1/M, d_{K_M}(f, f_n)\} \leq d_\Omega(f_n, f) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

also auch $d_{K_M}(f, f_n) \to 0$ für $n \to \infty$ und wegen $K \subset K_M$ damit

$$d_K(f, f_n) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

$\Leftarrow$: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $M = M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $1/M < \varepsilon$. Also ist

$$\sup_{m \geq M} \min\{1/m, d_{K_m}(f, f_n)\} \leq 1/M < \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Weiter existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d_{K_M}(f, f_n) < \varepsilon$ für $n > N$. Damit ist auch

$$\max_{1 \leq m \leq M} \min\{1/m, d_{K_m}(f, f_n)\} < \varepsilon$$

für $n > N$, also auch $d_\Omega(f, f_n) < \varepsilon$ für $n > N$.
2. Die Überlegungen aus 1. zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine d_Ω-Cauchyfolge ist, wenn $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(C(K, S), d_K)$ für alle kompakten Teilmengen K von Ω ist. Ist also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine d_Ω-Cauchyfolge, so existiert nach Bemerkung 1.22 für alle kompakten, nichtleeren $K \subset \Omega$ eine stetige Funktion $f_K : K \to S$ mit $f_n \to f_K$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig auf K. Durch $f(z) := f_K(z)$, falls $z \in K$, ist damit eine Grenzfunktion $f \in C(\Omega, S)$ definiert. □

Im Weiteren sei $\mathbb{C}$ stets mit der euklidschen Metrik versehen.

Bemerkung 1.26 Als Anwendung von der Cauchyschen Ungleichung ergibt sich: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen[14] und sind $f_n \in H(\Omega)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω, so ist $f \in H(\Omega)$, und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokal gleichmäßig auf Ω. Damit ist $H(\Omega)$ abgeschlossen in $(C(\Omega), d_\Omega)$. Also ist auch $(H(\Omega), d_\Omega)$ als metrischer Raum vollständig.

[14] Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$, also $\infty \notin \Omega$, so ist Ω genau dann offen in $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, wenn Ω offen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist. Daher gibt kein Problem, wenn wir kurz davon sprechen, dass $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen ist.

A Etwas Topologie

Wir stellen hier einige Ergebnisse aus der Topologie zusammen.

Bemerkung und Definition A.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Man sieht leicht ([Ü]), dass eine Teilmenge von M genau dann offen in (M, d_M) ist, wenn sie von der Form $U \cap M$ für eine in (X, d) offene Menge U ist. Also ergibt sich aus Definition 1.3, dass $M \subset X$ genau dann unzusammenhängend ist, wenn offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \varnothing$, $V \cap M \neq \varnothing$ und $U \cap V \cap M = \varnothing$. Man kann leicht zeigen ([Ü]), dass dies äquivalent dazu ist, dass M zerlegt werden kann in zwei nichtleere Mengen A, B mit $\overline{A} \cap B = \varnothing$ und $\overline{B} \cap A = \varnothing$.

Bemerkung A.2 Sind X, Y metrische Räume, ist X zusammenhängend und ist $f : X \to Y$ lokal konstant, so ist f konstant.

> Denn: Es sei $c \in f(X)$. Dann ist $A := \{x : f(x) = c\}$ nichtleer, abgeschlossen (da f stetig ist) und offen (da f lokal konstant ist). Also ist $A = X$.

Satz A.3 *Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. $\Rightarrow$: Es sei $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann existieren Punkte a, b, c mit $a < c < b$ und $a, b \in M, c \notin M$. Folglich gilt für $U := (-\infty, c)$ und $V := (c, \infty)$

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \varnothing, \quad V \cap M \neq \varnothing \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \varnothing\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
$\Leftarrow$: Angenommen, M ist unzusammenhängend. Dann existieren offene Mengen U, V in $\mathbb{R}$ mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \varnothing$, $V \cap M \neq \varnothing$ und $U \cap V \cap M = \varnothing$.
Es seien $a \in U \cap M$, $b \in V \cap M$. Dann ist $a \neq b$ (und dann ohne Einschränkung $a < b$). Da M ein Intervall ist, gilt $[a, b] \subset M$. Wir setzen $\xi := \sup(U \cap [a, b])$. Da U offen ist, gilt $\xi > a$. Angenommen, es ist $\xi \in V$. Da V offen ist, existiert dann ein $a < c < \xi$ mit $(c, \xi] \subset V$. Nach Definition des Supremums ist $(c, \xi] \cap U \neq \varnothing$ und damit auch $U \cap V \cap M \neq \varnothing$. Widerspruch. Damit gilt $\xi \notin V$. Da $M \subset U \cup V$ ist, folgt $\xi \in U$. Da U offen und $\xi < b$ ist, widerspricht dies der Definition von ξ. □

Der folgende Satz zeigt, dass sich der Zusammenhang einer Menge unter stetigen Abbildungen auf die Bildmenge überträgt.

Satz A.4 *Es seien (X, d), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $B \subset f(X)$ offen und abgeschlossen. Dann existieren eine in (Y, d_Y) offene Menge U und eine in (Y, d_Y) abgeschlossene Menge A mit $B = U \cap f(X) = A \cap f(X)$. Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $f^{-1}(B) = f^{-1}(U) = f^{-1}(A)$ offen und abgeschlossen in (X, d) ist. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(B) = \varnothing$ oder $f^{-1}(B) = X$. Im ersten Fall ist $B = \varnothing$ und im zweiten gilt $f(X) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, also $B = f(X)$. Damit ist $f(X)$ zusammenhängend. □

Als Konsequenz aus Satz A.3 und Satz A.4 erhalten wir eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes:

Satz A.5 *Es sei (X, d) ein zusammenhängender metrischer Raum. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(X)$ ein Intervall.*

Beweis. Nach Satz A.4 ist $f(X)$ zusammenhängend, also nach Satz A.3 ein Intervall. □

Bemerkung A.6 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Sind A_α $(\alpha \in I)$ zusammenhängende Mengen in X mit $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \varnothing$, so ist $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ebenfalls zusammenhängend.

> Denn: Wir setzen $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Es seien U und V in X offene Mengen mit $A \subset U \cup V$ und $A \cap U \neq \varnothing$ sowie $A \cap V \neq \varnothing$. Ist $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, so ist $x \in U \cup V$. Ohne Einschränkung sei $x \in U$. Weiter existiert ein $\alpha \in I$ mit $A_\alpha \cap V \neq \varnothing$. Aus $x \in A_\alpha \cap U$ folgt auch $A_\alpha \cap U \neq \varnothing$. Da A_α zusammenhängend ist, folgt $A_\alpha \cap U \cap V \neq \varnothing$. Damit ist auch $A \cap U \cap V \neq \varnothing$.

Bemerkung und Definition A.7 Nach Satz A.3 ist $G \subset \mathbb{R}$ genau dann ein Gebiet, wenn G ein offenes Intervall ist. Da Strecken $[u, v] \subset \mathbb{C}$ nach den Sätzen A.3 und A.4 zusammenhängend sind, sind sternförmige offene Mengen $X \subset \mathbb{C}$ nach Bemerkung A.6 zusammenhängend, also Gebiete (falls nichtleer).

Bemerkung und Definition A.8 Es sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge. Dann heißt M **pfadzusammenhängend**, falls zu allen Punkten $x, y \in M$ ein Pfad γ in M existiert mit Anfangspunkt x und Endpunkt y.

Satz A.9 *Es sei $M \subset \mathbb{C}$. Dann gilt*

1. *Ist M pfadzusammenhängend, so ist M auch zusammenhängend.*
2. *Ist M offen und zusammenhängend, so ist M auch pfadzusammenhängend.*

Beweis. 1. Es sei $a \in M$ fest. Dann existiert zu jedem $z \in M$ ein Pfad $\gamma(z)$ in M mit Anfangspunkt a und Endpunkt z. Damit ist $M = \bigcup_{z \in M} \gamma(z)^*$. Da $\gamma(z)^*$ zusammenhängend ist und $a \in \bigcap_{z \in M} \gamma(z)^*$ gilt, ist M nach Bemerkung A.6 zusammenhängend.
2. Es seien $a \in M$ fest und A die Menge aller $z \in M$ so, dass ein Pfad $\gamma(z)$ in M existiert mit Endpunkt z und Anfangspunkt a. Ist $z \in A$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z) \subset M$. Ist $w \in U_\delta(z)$, so ist $(\gamma(z), s_z^w)$ ein Pfad in M mit Anfangspunkt a und Endpunkt w. Also ist A offen in M. Die gleiche Überlegung liefert auch die Abgeschlossenheit von A in M. Da $A \neq \varnothing$ ist (beachte: $a \in A$), folgt $A = M$. □

Bemerkung und Definition A.10 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x \in X$ heißt

$$G(x) = G_X(x) := \bigcup \{A \subset X : x \in A \text{ und } A \text{ zusammenhängend}\}$$

Zusammenhangskomponente oder kurz **Komponente** von X bezüglich x. Nach Bemerkung A.6 ist $G(x)$ zusammenhängend. Außerdem gilt für $x, y \in X$ entweder $G(x) = G(y)$ oder $G(x) \cap G(y) = \varnothing$. Also ist $(G(x))_{x \in X}$ eine Zerlegung von X in maximale zusammenhängende Teilmengen. Ist $X \subset \mathbb{K}$ offen, so ist auch $G_X(x)$ offen für alle $x \in X$ ([Ü]). Also ist jede Komponente von X offen und damit ein Gebiet.