Jürgen Müller

Einführung in die Funktionalanalysis

Skriptum zur Vorlesung
Wintersemester 2022/2023
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Contents

1 Banachräume, Hilberträume und beschränkte Operatoren

Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 1.1 Es sei $X = (X, +, \cdot)$ ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.
1. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ heißt **Halbnorm** (auf X), falls

(i) (**Homogenität**) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (x \in X, \lambda \in \mathbb{K})$,

(ii) (**Dreiecksungleichung**) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in X)$.

Gilt zusätzlich $\|x\| > 0$ für alle $x \neq 0$ (**Definitheit**), so heißt $\|\cdot\|$ eine **Norm** (auf X). Der Raum $X = (X, \|\cdot\|)$ heißt entsprechend **halbnormierter Raum** beziehungsweise **normierter Raum**.
2. Sind $A, B \subset X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, so schreiben wir

$$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\} \quad \text{sowie} \quad \lambda A := \{\lambda x : x \in A\}.$$

Ist $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf X, so setzen wir außerdem

$$B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Eine Menge $M \subset X$ heißt dann **beschränkt**, wenn ein $r > 0$ existiert mit $M \subset rB_X$. Insbesondere ist rB_X beschränkt.

Bemerkung und Definition 1.2 Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist durch

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\| \qquad (x, y \in X)$$

eine Metrik auf X definiert (die sogenannte induzierte Metrik). Im Weiteren soll $(X, \|\cdot\|)$ stets – wenn nicht anders gesagt – durch $d_{\|\cdot\|}$ metrisiert sein. Ist die Metrik $d_{\|\cdot\|}$ vollständig, so heißt $X = (X, \|\cdot\|)$ **Banachraum**.

Beispiele 1.3 1. Für $p \in [1, \infty)$ sind $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ mit

$$\ell_p := \Big\{x = (x_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\Big\}, \quad \|x\| := \|x\|_p := \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\Big)^{1/p}$$

Banachräume.
2. Es seien $S \neq \varnothing$ eine Menge, $(E, |\cdot|_E)$ ein normierter Raum und

$$B(S, E) := \{f : S \to E : f(S) \subset E \text{ beschränkt}\}.$$

Dann ist $\big(B(S, E), \|\cdot\|_\infty\big)$ mit

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\infty, S} := \sup_{t \in S} |f(t)|_E$$

ein normierter Raum und im Falle, dass E ein Banachraum ist, auch ein Banachraum (siehe Analysis). Für $(E, |\cdot|_E) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ schreiben wir $B(S) := B(S, \mathbb{C})$. Speziell setzen wir

$$\ell_\infty := B(\mathbb{N}) = \{x = (x_n) : (x_n) \text{ beschränkt}\}.$$

3. Es seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Dann ist auf

$$\mathscr{L}_p(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ messbar}, \int |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

durch

$$\|f\|_p := \|f\|_{p,\mu} := \Big(\int |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \qquad \big(f \in \mathscr{L}_p(\mu)\big)$$

eine Halbnorm gegeben (siehe Anhang). Mit $N := \{f \in \mathscr{L}_p(\mu) : f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\}$ wird $L_p(\mu) := \mathscr{L}_p(\mu)/N$ mit

$$\big\|[f]\big\|_p := \int |f|^p \, d\mu$$

ein Banachraum. Man schreibt wieder kurz f statt $[f]$ und spricht auch von Funktionen.

Bemerkung 1.4 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt ([Ü]):

1. Ist $\dim(X) < \infty$, so ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.
2. Ist X ein Banachraum und ist $L \subset X$ ein Teilraum, so ist $(L, \|\cdot\|)$ ein Banachraum genau dann, wenn $L \subset X$ abgeschlossen ist.

Bemerkung 1.5 1. Die Räume

$$c := \big\{(x_n) \in \ell_\infty : (x_n) \text{ konvergent}\big\} \quad \text{und} \quad c_0 := \big\{(x_n) \in \ell_\infty : x_n \to 0\big\}$$

sind abgeschlossene Teilräume von ℓ_∞, also Banachräume ([Ü]).
2. Sind (S, d) ein metrischer Raum und $(E, |\cdot|_E)$ ein Banachraum, so setzen wir

$$C(S, E) := \{f : S \to E, f \text{ stetig}\} \quad \text{und} \quad C_b(S, E) := C(S, E) \cap B(S, E).$$

Dann ist $C_b(S, E) \subset B(S, E)$ abgeschlossen (man beachte: Konvergenz in $(B(S, E), \|\cdot\|_E)$ bedeutet gleichmäßige Konvergenz). Also ist $(C_b(S, E), \|\cdot\|_{\infty,S})$ ein Banachraum.
Ist (S, d) kompakt, so ist $C(S, E) = C_b(S, E)$. In diesem Fall gilt zudem (siehe Maß- und Integrationstheorie): Sind $\mathscr{B}(S) = \mathscr{B}(S, d)$ die Borel-σ-Algebra bezüglich (S, d) und μ ein *endliches* Maß auf $\mathscr{B}(S)$, so ist $C(S) := C(S, \mathbb{C})$ dicht in $L_p(\mu)$ für alle $p \in [1, \infty)$.

Satz 1.6 *Es sei $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ein normierter Raum. Dann sind äquivalent:*

a) X ist ein Banachraum.

b) „Jede absolut konvergente Reihe in X ist konvergent", d. h. ist (x_j) eine Folge in X mit $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$, so existiert $\sum_{j=1}^{\infty} x_j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei (x_j) eine Folge in X mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$. Da X ein Banachraum ist, genügt es zu zeigen: $\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\Big)$ ist eine Cauchy-Folge.
Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j=n'+1}^{n} \|x_j\| < \varepsilon \qquad (n > n' \geq N).$$

Also ist nach der Δ-Ungleichung auch

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n'} x_j \Big\| = \Big\| \sum_{j=n'+1}^{n} x_j \Big\| < \sum_{j=n'+1}^{n} \|x_j\| < \varepsilon \qquad (n > n' \geq N).$$

b) $\Rightarrow$ a): Es sei (y_k) eine Cauchy-Folge in X. Dann existiert eine Teilfolge $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$\big\| y_{k_n} - y_{k_{n-1}} \big\| < 1/2^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Setzt man $x_j := y_{k_j} - y_{k_{j-1}}$, so ist

$$y_{k_n} = y_{k_0} + \sum_{j=1}^{n} (y_{k_j} - y_{k_{j-1}}) = y_{k_0} + \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Aus $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} 1/2^j = 1 < \infty$ folgt, dass $\big(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\big)_n$ und damit auch (y_{k_n}) in X konvergiert. Da (y_k) eine Cauchy-Folge ist, ist auch (y_k) konvergent. □

Definition 1.7 Es seien X, Y lineare Räume über $\mathbb{K}$.
1. Ein (linearer) **Operator** T von X nach Y ist eine lineare Abbildung $T : D(T) \to Y$ (genauer: das Tupel $\big(X, Y, T, D(T)\big)$, wobei $D(T)$ ein linearer Teilraum von X ist. Ist $Y = \mathbb{K}$, so nennt man T auch ein (lineares) **Funktional**. Der ($\mathbb{K}$-lineare) Raum X^* aller linearen Funktionale $T : X \to \mathbb{K}$ heißt **algebraisches Dual** von X.
2. Sind $(X, \|\cdot\| = \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\| = \|\cdot\|_Y)$ halbnormiert und $T : X \to Y$ linear, so heißt T **beschränkt**, falls $T(B_X) \subset Y$ beschränkt ist.

Satz 1.8 *Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

a) T ist beschränkt.

b) Es existiert ein $c > 0$ mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in X$.

c) T ist (Lipschitz-)stetig auf X.

d) T ist stetig an 0.

Beweis. Man beachte: Da T linear ist, ist stets $T0 = 0$.
a) $\Rightarrow$ b): Mit $c := \sup\limits_{u \in B_X} \|Tu\|$ gilt für $x \neq 0$

$$\|Tx\| = \|x\| \cdot \Big\| T\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\Big\| \leq c\|x\|.$$

b) $\Rightarrow$ c): Für $x_1, x_2 \in X$ gilt

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \big\|T(x_1 - x_2)\big\| \leq c\|x_1 - x_2\|.$$

Damit ist T Lipschitz-stetig auf X (also insbesondere stetig).
c) $\Rightarrow$ d): Klar.
d) $\Rightarrow$ a): Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ mit $\|Tx\| \leq 1$ für $\|x\| \leq \delta$. Damit folgt für $x \in B_X \setminus \{0\}$

$$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\delta}\Big\|T\Big(\frac{\delta}{\|x\|} \cdot x\Big)\Big\| \leq \frac{1}{\delta}\,.$$

□

Bemerkung und Definition 1.9 Es seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K}$.
1. Wir setzen

$$L(X,Y) := \{T : X \to Y : T \text{ linear und beschränkt}\}$$

und $L(X) := L(X,X)$. Da die Abbildung $L(X,Y) \ni T \mapsto T|_{B_X} \in B(B_X, Y)$ linear und injektiv ist, ist durch

$$\|T\| := \|T|_{B_X}\|_\infty = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|$$

eine Norm auf $L(X,Y)$ definiert. Außerdem ist $\{T|_{B_X} : T \in L(X,Y)\}$ abgeschlossen in $B(B_X, Y)$.

> Denn: Ist (T_n) eine Folge in $L(X,Y)$ mit $T_n|_{B_X} \to f$ in $B(B_X, Y)$, so gilt für alle $x \in X \setminus \{0\}$
>
> $$T_n(x) = \|x\|\, T_n\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) \to \|x\|\, f\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) \quad (n \to \infty).$$
>
> Aus der Linearität von T_n folgt, dass durch $T0 := 0$ und $Tx := \|x\| f(x/\|x\|)$ für $x \neq 0$ ein linearer Operator $T : X \to Y$ definiert ist mit $T|_{B_X} = f$. Damit ist T auch beschränkt.

Ist Y ein Banachraum, so ist damit nach B. 1.3 und B. 1.4 auch $L(X,Y)$ ein Banachraum.
2. Der Raum

$$X' := L(X, \mathbb{K}) := \{T : X \to \mathbb{K} : T \text{ linear und beschränkt}\}$$

heißt **Dualraum** (oder kurz **Dual**) von X. Nach 1. ist X' stets ein Banachraum.

Beispiel 1.10 Es sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann ist durch

$$\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad \big(f \in C^1(I)\big)$$

eine Norm auf $C^1(I)$ gegeben, mit der $(C^1(I), \|\cdot\|_{1,\infty})$ zum Banachraum wird ([Ü]). Ist $T : C^1(I) \to C(I)$ definiert durch

$$Tf := f' \qquad \big(f \in C^1(I)\big),$$

so ist

$$\|Tf\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{1,\infty} \qquad \big(f \in C^1(I)\big).$$

Damit ist T beschränkt mit $\|T\| \leq 1$.
Betrachtet man jedoch T als Operator von $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ nach $(C(I), \|\cdot\|)_\infty)$ mit $D(T) = C^1(I)$, so ist T unbeschränkt!

> Denn: Ohne Einschränkung sei $I = [0,1]$. Ist $f_n(t) = \sin(nt)$, so ist $\|f_n\|_\infty \leq 1$ und $Tf_n(t) = n\cos(nt)$, also $\|Tf_n\|_\infty = |Tf_n(0)| = n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Definition 1.11 Es sei X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt **Skalarprodukt** (auf X), falls gilt

(i) Für alle $y \in X$ ist $\langle\cdot, y\rangle \in X^*$.

(ii) Für alle $x, y \in X$ ist $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

(iii) Für $x \neq 0$ ist $\langle x, x\rangle > 0$.

In diesem Fall heißt $X = (X, \langle\cdot,\cdot\cdot\rangle)$ **unitärer Raum** (oder auch **Prähilbertraum**). Weiter heißen $x, y \in X$ **orthogonal**, falls $\langle x, y\rangle = 0$ gilt. Wir schreiben dann $x \perp y$. Ist $A \subset X$, so schreiben wir $x \perp A$, falls $x \perp y$ für alle $y \in A$.

Bemerkung und Definition 1.12 Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum. Dann gilt (siehe Lineare Algebra)
1. (**Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**): Für alle $x, y \in X$ ist

$$\big|\langle x, y\rangle\big|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Daraus ergibt sich, dass durch

$$\|x\| := \|x\|_X := \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in X)$$

eine Norm auf X definiert ist. Ist dabei $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ein Banachraum, so nennt man $X = (X, \langle\cdot,\cdot\cdot\rangle)$ einen **Hilbertraum**.
2. (**Parallelogrammidentität**): Für alle $x, y \in X$ ist

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

3. (**Satz von Pythagoras**) Sind x, y orthogonal, so gilt

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \ .$$

Beispiel 1.13 Mit

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j \qquad (x, y \in \ell_2)$$

ist $(\ell_2, \langle \cdot, \cdot \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Allgemeiner ist für jeden Maßraum (Ω, Σ, μ) mit

$$\langle f, g \rangle \ := \langle f, g \rangle_{L_2(\mu)} := \int f \overline{g} \, d\mu \qquad \big(f, g \in L_2(\mu)\big)$$

$\big(L_2(\mu), \langle \cdot, \cdot \cdot \rangle\big)$ ein Hilbertraum. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung entspricht hier der Hölder-Ungleichung für $p = q = 2$.

Satz 1.14 *Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Ist $C \subset X$ konvex und so, dass $(C, d_{\|\cdot\|})$ vollständig ist, so existiert in jedem $x \in X$ genau ein $y \in C$ mit $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Beweis. Aus der Parallelogrammidentität folgt für beliebige $u, v \in C$

$$2\big(\|x - u\|^2 + \|x - v\|^2\big) = \|2x - u - v\|^2 + \|v - u\|^2 = 4\|x - (u + v)/2\|^2 + \|v - u\|^2,$$

also mit $\|x - (u + v)/2\| \geq d := \operatorname{dist}(x, C)$

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= 2\big(\|x - u\|^2 + \|x - v\|^2\big) - 4\|x - (u + v)/2\|^2 \\ &\leq 2\big(\|x - u\|^2 - d^2\big) + 2\big(\|x - v\|^2 - d^2\big). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Es sei nun (y_n) eine Folge in C mit

$$\|x - y_n\| \to d \qquad (n \to \infty).$$

Mit $u := y_n$, $v := y_m$ in (1.1) sieht man, dass (y_n) eine Cauchy-Folge in C ist. Da $(C, d_{\|\cdot\|})$ vollständig ist, existiert ein $y \in C$ mit $y_n \to y$ $(n \to \infty)$. Wegen

$$d \leq \|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| \to d \qquad (n \to \infty)$$

folgt $\|x - y\| = d$. Ist $z \in C$ mit $\|x - z\| = d$, so ergibt sich $y = z$ aus (1.1), also auch die Eindeutigkeit von y. □

Bemerkung 1.15 Unter den Voraussetzungen von S. 1.14 setzen wir für $x \in X$

$$P(x) = P_C(x) := y,$$

wobei y so, dass $\operatorname{dist}(x, C) = \|x - y\|$. Dann ist $P : X \to X$ wohldefiniert, und es gilt $P(X) = C$ sowie $P \circ P = P$. Außerdem ist $z = P(x)$ für $z \in C$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}\langle x - z, u - z \rangle \leq 0$ für alle $u \in C$ gilt.

Denn: Für $z, u \in C$ und $t \in [0,1]$ ist $z + t(u-z) \in C$ und

$$\big\|x - \big(z + t(u-z)\big)\big\|^2 - \|x-z\|^2 = -2t \ \mathrm{Re}\langle x-z, u-z\rangle \ + t^2\|u-z\|^2. \quad (1.2)$$

$\Leftarrow$: Da die rechte Seite in (1.2) nach Voraussetzung nichtnegativ ist, ergibt sich für $u \in C$ und $t = 1$

$$\|x-u\|^2 - \|x-z\|^2 \geq 0.$$

Damit ist $\mathrm{dist}(x, C) = \|x - z\|$.

$\Rightarrow$: Ist $z = P(x)$, so ist die linke Seite in (1.2) für alle $u \in C$ nichtnegativ. Also ist für $t \in (0,1]$ auch

$$-2 \ \mathrm{Re}\langle x-z, u-z\rangle + t\|u-z\|^2 \geq 0.$$

Für $t \to 0^+$ folgt $\mathrm{Re}\langle x-z, u-z\rangle \leq 0$.

Wir betrachten jetzt spezieller Teilräume L statt konvexer Mengen.

Satz 1.16 (Projektionssatz) *Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum, und es sei $L \subset X$ ein Teilraum so, dass $(L, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist. Dann ist $P_L : X \to X$ linear mit $P_L(X) = L$ und $\|P_L\| \leq 1$. Für $x \in X$ und $z \in L$ gilt dabei $z = P_L(x)$ genau dann wenn*

$$(x-z) \perp L. \quad (1.3)$$

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst die 2. Aussage.
$\Rightarrow$: Ist $u \in L$, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ nach B. 1.15

$$0 \geq \mathrm{Re}\langle x-z, tu-z\rangle = t \ \mathrm{Re}\langle x-z, u\rangle - \mathrm{Re}\langle x-z, z\rangle.$$

Dies impliziert $\mathrm{Re}\langle x-z, u\rangle = 0$. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ergibt sich mit it statt t auch $\mathrm{Im}\langle x-z, u\rangle = 0$.
$\Leftarrow$: Da $u - z \in L$ für alle $u \in L$ gilt, folgt $P_L(x) = z$ aus B. 1.15.
2. Sind $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist $\lambda P_L x + P_L y \in L$, und mit (1.3) gilt

$$\lambda x + y - (\lambda P_L x + P_L y) = \lambda(x - P_L x) + (y - P_L y) \perp L.$$

Wieder mit (1.3) ist also $P_L(\lambda x + y) = \lambda P_L x + P_L y$. Schließlich ergibt sich mit $x - P_L x \perp P_L x$ nach dem Satz von Pythagoras

$$\|x\|^2 = \|x - P_L x + P_L x\|^2 = \|x - P_L x\|^2 + \|P_L x\|^2 \geq \|P_L x\|^2$$

und damit $\|P_L\| \leq 1$. □

Definition 1.17 Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum. Eine Menge $M \subset X$ heißt **Orthonormalsystem**, falls $\langle e, f\rangle = \delta_{e,f}$ (Kronecker-Symbol) für $e, f \in M$ gilt. Für $x \in X$ und $e \in M$ nennt man die Zahlen $\widehat{x}_e := \langle x, e\rangle$ die **Fourier-Koffizienten** von x (bezüglich M). Ist $\mathrm{span}(M)$ dicht in X, so heißt M eine **Orthonormalbasis**.

Beispiele 1.18 1. In $(\ell_2, \langle\cdot,\cdot\cdot\rangle_2)$ ist $M := \{e^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ wobei $e^{(k)}$ den k-ten Einheitsvektor bezeichnet, eine Orthonormalbasis ([Ü]). Man beachte: M ist *keine* algebraische Basis!
2. Es seien $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und m das normierte Bogenmaß auf S, d. h. $2\pi m$ ist das Bildmaß von $\lambda_{[-\pi,\pi]}$ unter der Abbildung $t \mapsto e^{it}$. Es gilt dann

$$\int f\, dm = \frac{1}{2\pi} \int f(e^{it})\, d\lambda_{[-\pi,\pi]}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, dt$$

Durch $M = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_k(z) := z^k$ für $z \in S$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist eine Orthonormalbasis

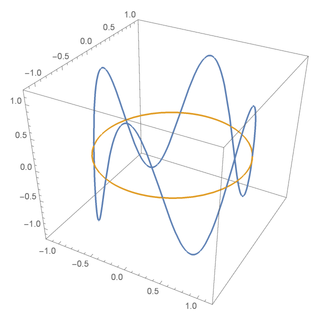

Figure 1: $\mathrm{Re}(z^4) = \cos(4t)$ mit $z = e^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

in $L_2(m)$ gegeben.[1]

Denn: Für $j, k \in \mathbb{Z}$ gilt (da $\overline{z} = z^{-1}$ für $z \in S$)

$$\langle e_k, e_j\rangle = \int z^{k-j}\, dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t} dt = \delta_{jk}\, .$$

Man kann zeigen: $L := \mathrm{span}(M)$ ist dicht in $(C(S), \|\cdot\|_\infty)$ (Weierstraßscher Approximationssatz; Satz von Fejér), also wegen $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$ auch in $C(S)$ versehen mit der Integralnorm $\|\cdot\|_2$. Da $C(S)$ dicht in $L_2(m)$ ist (vgl. B. 1.5), ist L auch dicht in $L_2(m)$.

Bemerkung 1.19 Sind X ein unitärer Raum und $F \subset X$ ein *endliches* Orthonormalsystem, so gilt für $L := \mathrm{span}(F)$ und $x \in X$:

1. $P_L x = \sum_{e \in F} \widehat{x}_e \cdot e$.

2. $\|P_L x\|^2 = \sum_{e \in F} |\widehat{x}_e|^2$ und $\|x - P_L x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{e \in F} |\widehat{x}_e|^2$.

[1] In Polarkoordinaten $z = e^{it}$ ist $z^n = e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$. Daher spricht man auch vom trigonometrischen System M.

Denn: Für $f \in F$ gilt

$$\langle x - \sum_{e \in F} \widehat{x}_e \cdot e, f \rangle = \langle x, f \rangle - \sum_{e \in F} \langle x, e \rangle \langle e, f \rangle = 0,$$

d. h. nach S. 1.16 ist $P_L x = \sum\limits_{e \in F} \widehat{x}_e \cdot e$. Weiter gilt mit dem Satz von Pythagoras

$$\sum_{e \in F} |\widehat{x}_e|^2 = \sum_{e \in F} \|\widehat{x}_e \cdot e\|^2 = \| \sum_{e \in F} \widehat{x}_e \cdot e\|^2 = \|P_L x\|^2$$

und damit

$$\|x\|^2 = \|x - P_L x + P_L x\|^2 = \|x - P_L x\|^2 + \|P_L x\|^2 = \|x - P_L x\|^2 + \sum_{e \in F} |\widehat{x}_e|^2.$$

Als äußerst nützlich für die Formulierung der weiteren Resultate erweist sich das Konzept der Summierbarkeit von Familien.

Bemerkung und Definition 1.20 1. Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ in X heißt **summierbar** (in X), falls ein $x \in X$ und für alle $\varepsilon > 0$ eine *endliche* Menge $F_\varepsilon \subset I$ so existieren, dass

$$\|x - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha\| < \varepsilon$$

für alle endlichen Mengen $F \subset I$ mit $F_\varepsilon \subset F$ gilt. In diesem Fall ist $\{\alpha \in I : x_\alpha \neq 0\}$ abzählbar ([Ü]) und der Wert x eindeutig. Wir schreiben $x := \sum\limits_{\alpha \in I} x_\alpha$. Es gilt folgendes Cauchy-Kriterium für Summierbarkeit: Ist X ein Banachraum und ist (x_α) eine Familie in X, so ist (x_α) genau dann summierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $F_\varepsilon \subset I$ existiert mit

$$\| \sum_{\alpha \in G} x_\alpha \| < \varepsilon$$

für alle endlichen Mengen $G \subset I \setminus F_\varepsilon$. Weiter heißt (x_α) **absolut summierbar**, falls $(\|x_\alpha\|)_{\alpha \in I}$ summierbar in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist. Man sieht leicht (vgl. S. 1.6): Ist X ein Banachraum, so ist jede absolut summierbare Familie summierbar (mit $\| \sum\limits_{\alpha \in I} x_\alpha \| \leq \sum\limits_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|$).
2. Ist $(c_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie in $[0, \infty)$, so ist (c_α) genau dann summierbar in $\mathbb{R}$ (und dann zum Wert c), wenn

$$c := \sup_{F \subset I \text{ endlich}} \sum_{\alpha \in F} c_\alpha < \infty$$

gilt.

Zurück zu Orthonormalsystemen.

Satz 1.21 *Es sei X ein unitärer Raum, und es sei $M \subset X$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt:*

1. *(Bessel-Ungleichung) Für alle* $x \in X$ *ist* $\left(|\widehat{x}_e|^2\right)_{e\in M}$ *summierbar mit*

$$\sum_{e\in M} |\widehat{x}_e|^2 \le \|x\|^2. \tag{1.4}$$

2. *Folgende Aussagen sind äquivalent*

   a) M *ist Orthonormalbasis.*

   b) (Parsevalsche Gleichung) Für alle $x \in X$ *gilt Gleichheit in* (1.4).

   c) (Fourier-Entwicklung) Für alle $x \in X$ *ist*

$$x = \sum_{e\in M} \widehat{x}_e e.$$

Beweis. 1. Nach B. 1.19.2 gilt die Ungleichung für alle endlichen $F \subset M$. Mit B./D. 1.20.2 folgt dann die Behauptung.
2. Nach B. 1.19 ist für $F \subset M$ endlich mit $L_F := \operatorname{span}(F)$ und für alle $x \in X$

$$\|x\|^2 - \sum_{e\in F} |\widehat{x}_e|^2 = \|x - \sum_{e\in F} \widehat{x}_e e\|^2 = \operatorname{dist}^2(x, L_F).$$

Weiter ist M genau dann eine Orthonormalbasis, wenn für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $F_{\varepsilon,x} \subset M$ so existiert, dass $\operatorname{dist}(x, L_F) < \varepsilon$ für alle endlichen Mengen F mit $F_{\varepsilon,x} \subset F \subset M$ gilt. Aus der Definition der Summierbarkeit ergibt sich die Äquivalenz von a), b), c). □

Beispiel 1.22 Es sei $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ wie in B. 1.18.2, d. h. $e_k(z) = z^k$ für $z \in S$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist für $f \in L_2(m)$

$$\widehat{f}_k := \widehat{f}_{e_k} = \int f(z) z^{-k} dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-ikt}\, dt \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Da $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von $L_2(m)$ ist, gilt nach S. 1.21

$$\int |f|^2\, dm = \|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2.$$

Ist $L_n := \operatorname{span}\{e_k : |k| \le n\}$ für $n \in \mathbb{N}$, so nennt man die Folge $(S_n f)$ mit

$$S_n f := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k e_k = P_{L_n} f$$

die **Fourier-Reihe** von f. Nach S. 1.21 gilt in $L_2(m)$

$$f = \lim_{n\to\infty} S_n f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k e_k,$$

also

$$\int |f - S_n f|^2\, dm \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Zum Abschluss diskutieren wir kurz die Frage nach der Existenz von Orthonormalbasen.

Bemerkung 1.23 Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum. Ist $A \subset X$ abzählbar, so existiert zunächst eine linear unabhängige (abzählbare) Menge $B \subset A$ mit $\mathrm{span}(A) = \mathrm{span}(B)$ und dann nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren (siehe Lineare Algebra) ein abzählbares Orthonormalsystem M mit $\mathrm{span}(A) = \mathrm{span}(M)$. Ist also $\mathrm{span}(A)$ dicht in X, so existiert eine abzählbare Orthonormalbasis in X. Insbesondere zeigt dies: Ist X separabel (d. h. existiert eine abzäblare dichte Teilmenge), so existiert eine abzählbare Orthonormalbasis. Die Umkehrung dieser Aussage gilt ebenfalls ([Ü]).

Wir wollen zeigen, dass stets eine Orthonormalbasis existiert. Der Beweis beruht auf einer Anwendung des Zornschen Lemmas, dessen Formulierung wir einige Bezeichnungen vorausschicken.

Bemerkung und Definition 1.24 Es sei A eine nichtleere Menge.
1. Eine Relation $\leq$ auf A heißt **Halbordnung**, falls für $a, b, c \in A$ gilt

(i) (**Reflexivität**) $a \leq a$.

(ii) (**Transitivität**) Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$.

(iii) (**Antisymmetrie**) Aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$.

Ein Element $m \in A$ heißt **maximal**, falls aus $m \leq a$ schon $m = a$ folgt. Ist $K \subset A$, so heißt $s \in A$ **obere Schranke** von K, falls $a \leq s$ für alle $a \in K$ gilt. Schließlich heißt K eine **Kette**, falls $a \leq b$ oder $b \leq a$ für alle $a, b \in K$ gilt.
2. Mithilfe des Auswahlaxioms kann man das **Lemma von Zorn** beweisen:

Besitzt jede Kette eine obere Schranke, so besitzt A ein maximales Element.

Satz 1.25 *Sind $X \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und $M_0 \subset X$ ein Orthonormalsystem, so existiert eine Orthonormalbasis M von X mit $M_0 \subset M$. Insbesondere existiert eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Wir setzen

$$\mathscr{A} := \{M' \subset X : M' \text{ Orthonormalsystem mit } M_0 \subset M'\}.$$

Mit $\subset$ wird $\mathscr{A}$ zu einer halbgeordneten Menge. Dabei besitzt jede Kette $\mathscr{K}$ in $\mathscr{A}$ die obere Schranke $\bigcup_{M' \in \mathscr{K}} M'$. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element M. Wir zeigen: M ist eine Orthonormalbasis. Angenommen, nicht. Dann ist der Abschluss L von $\mathrm{span}(M)$ ein abgeschlossener Teilraum von X und $L \neq X$. Ist $x \notin L$, so ist nach dem Projektionssatz

$$0 \neq y := x - P_L x \perp L.$$

Also ist $M_y := M \cup \{||y||^{-1} y\} \neq M$ ein Orthonormalsystem mit $M_y \supset M$, im Widerspruch zur Maximalität von M. $\square$

2 Hauptsätze für Operatoren auf Banachräumen

Wir beweisen in diesem Abschnitt verschiedene zentrale Sätze über lineare Abbildungen auf Banachräumen. Die wesentlichen laufen unter den Namen:

- Satz von Banach-Steinhaus,
- Satz von der offenen Abbildung,
- Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Als Ausgangspunkt dient ein Ergebnis der Analysis, das in vielen Situationen äußerst nützlich ist.

Satz 2.1 (Baire) *Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Ist (U_n) eine Folge offener Mengen so, dass U_n dicht in X ist für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X.*

Beweis. Es sei $\varnothing \neq U \subset X$ offen. Zu zeigen ist: $U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \varnothing$. Da U_1 dicht in X ist, ist $U \cap U_1 \neq \varnothing$ und offen. Also existiert eine abgeschlossene Menge $A_1 \subset U \cap U_1$ mit $A_1^\circ \neq \varnothing$ und $\operatorname{diam}(A_1) \leq 1$ (etwa $A_1 := B_{\min\{\delta,1/2\}}(x)$, wobei $B_\delta(x) \subset U \cap U_1$). Da $\overline{U_2} = X$ ist, ist $A_1^\circ \cap U_2 \neq \varnothing$ und offen. Wie oben existiert eine abgeschlossene Menge $A_2 \subset A_1^\circ \cap U_2$ mit $A_2^\circ \neq \varnothing$ und $\operatorname{diam}(A_2) \leq 1/2$. Induktiv erhält man eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Mengen mit $\varnothing \neq A_j \subset A_{j-1} \cap U_j$ sowie $\operatorname{diam}(A_j) \leq 1/j$. Wählt man $x_j \in A_j$, so ist (x_j) eine Cauchy-Folge. Also gilt $x_j \to x$ für ein $x \in X$. Aus $x_j \in A_j \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $j \geq n$ folgt $x \in A_n \subset U_n$. Außerdem ist $x \in A_1 \subset U$, also $x \in U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. □

Bemerkung und Definition 2.2 Abzählbare Schnitte offener Mengen bezeichnet man als **G_δ-Mengen**. In vollständigen metrischen Räumen (X, d) sind nach dem Satz von Baire abzählbare Schnitte offener dichter Mengen dichte G_δ-Mengen. Enthält $M \subset X$ eine dichte G_δ-Menge, so sagt man auch, M sei **residual** (in X). Der Satz von Baire zeigt, dass abzählbare Schnitte residualer Mengen wieder residual sind. Wir werden den Satz im Weiteren auch in dieser Form verwenden.

Bemerkung 2.3 Es seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $G \subset C(X)$. Wir setzen für $x \in X$

$$s^*(x) := \sup_{g\in G} |g(x)| \in [0, \infty].$$

Dann ist die Menge $S_\infty := \{x \in X : s^*(x) = \infty\}$ eine G_δ-Menge und es gilt: Entweder ist S_∞ residual in X oder es existiert eine nichtleere offene Menge U mit $\sup\limits_{x\in U} s^*(x) < \infty$.

Denn: Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$S_n := \{x \in X : s^*(x) > n\} = \bigcup_{g\in G} \{x \in X : |g(x)| > n\}.$$

offen als Vereinigung der Urbilder von (n, ∞) unter $|g| \in C(X, \mathbb{R})$. Außerdem ist nach Definition $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = S_\infty$, also S_∞ eine G_δ-Menge. Ist S_n dicht in S für alle n, so ist S_∞ nach dem Satz von Baire residual. Ist S_n nicht dicht für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $U := X \setminus \overline{S_n}$ nichtleer und offen. Für alle $x \in U$ ist $s^*(x) \leq n$, also auch $\sup_{x\in U} s^*(x) \leq n$.

Satz 2.4 (Banach-Steinhaus; Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) *Es seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $M \subset L(X, Y)$. Dann ist die Menge S_∞ der $x \in X$ mit $\sup_{T\in M} \|Tx\| = \infty$ entweder residual in X oder leer. Im zweiten Fall ist*

$$\sup_{T\in M} \|T\| < \infty.$$

Beweis. Wir wenden B. 2.3 auf die Familie $G := \{x \mapsto \|Tx\| : T \in M\}$ an. Ist die erste Alternative nicht gegeben, so existieren nach B. 2.3 eine offene Menge $\varnothing \neq U \subset X$ und ein $c > 0$ mit $\|Tx\| \leq c$ für alle $x \in U$ und $T \in M$. Ist $y \in U$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(y) \subset U$. Für $T \in M$ und $x \in B_X$ gilt $\delta x + y \in B_\delta(y) \subset U$, also

$$\delta\|Tx\| = \|T(\delta x + y) - Ty\| \leq c + \|Ty\| \leq 2c\ .$$

Damit ist $\sup_{T\in M} \|T\| \leq 2c/\delta =: d$ und für alle $x \in X$ folglich auch $\sup_{T\in M} \|Tx\| \leq d\|x\|$, also S_∞ leer. □

Bemerkung und Definition 2.5 Es seien $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und m das normierte Bogenmaß auf S. In B. 1.22 haben wir Fourierkoeffizienten für $f \in L_2(m)$ definiert. Allgemeiner nennt man für $k \in \mathbb{Z}$ und $f \in L_1(m)$

$$\widehat{f}_k := \int f(\zeta)\overline{\zeta}^k dm(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-ikt} dt$$

den k-ten **Fourierkoeffizient** von f und die Folge $(S_n f)_{n=0}^\infty$ mit

$$(S_n f)(z) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k z^k \quad (z \in S)$$

die **Fourierreihe** von f. Mit $D_n(w) := \sum\limits_{k=-n}^{n} w^k$ für $w \in S$ gilt

$$(S_n f)(z) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k z^k = \int f(\zeta) \sum_{k=-n}^{n} (z\overline{\zeta})^k dm(\zeta) = \int f(\zeta)\, D_n(z\overline{\zeta})\, dm(\zeta).$$

D_n heißt n-ter **Dirichlet-Kern**. In B. 1.22 haben wir gesehen, dass $S_n f \to f$ in $L_2(m)$ gilt. Es drängt sich die Frage nach der punktweisen Konvergenz von $(S_n f)$ auf. Wir zeigen als Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus, dass sogar stetige Funktionen f existieren, deren Fourierreihe nicht überall punktweise konvergiert.

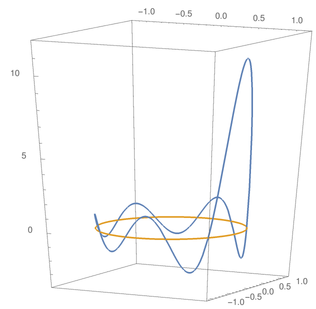

Figure 2: Dirichlet-Kern D_5.

Satz 2.6 *Ist $A \subset S$ abzählbar, so ist für eine resduale Menge von Funktionen $f \in C(S)$ die Folge $((S_n f)(z))_n$ für alle $z \in A$ unbeschränkt.*

Beweis. 1. Es seien $g \in C(S)$ und $T \in C(S)^*$ definiert durch

$$Tf := \langle f, g \rangle = \int f\overline{g}\, dm \quad (f \in C(S)).$$

Dann gilt $|Tf| \leq \int |f|\ |g|\, dm \leq \|g\|_1 \cdot \|f\|_\infty$. Also ist T beschränkt mit $\|T\| \leq \|g\|_1$. Ist $\varepsilon > 0$, so ergibt sich umgekehrt mit $f_\varepsilon := g/(|g| + \varepsilon)$

$$|Tf_\varepsilon| = \int \frac{|g|^2}{|g| + \varepsilon}\, dm \geq \int \frac{|g|^2 - \varepsilon^2}{|g| + \varepsilon}\, dm = \int (|g| - \varepsilon)\, dm = \|g\|_1 - \varepsilon.$$

Da $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ gilt, folgt damit auch $\|T\| \geq \|g\|_1$, also $\|T\| = \|g\|_1$
2. Da abzählbare Schnitte residualer Mengen in $C(S)$ nach dem Satz von Baire wieder residual sind, reicht es, die Behauptung für einpunktige Mengen A zu zeigen. Ohne Einschränkung können wir $A = \{1\}$ wählen. Aus $D_n(\overline{\zeta}) = \overline{D_n}(\zeta)$ folgt

$$(S_n f)(1) = \int f\overline{D_n}\, dm = T_n f,$$

wobei T_n wie in 1. mit $g = D_n$ ist. Also gilt $\|T_n\| = \|D_n\|_1$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus, angewandt auf $M := \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$, genügt es,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|D_n\|_1 = \infty$$

zu zeigen. Für $t \in [-\pi, \pi]$ gilt nach dem Schrankensatz $|e^{it} - 1| \leq |t|$, also für $w = e^{it} \neq 1$

$$|D_n(w)| = |w^n D_n(w)| = \frac{|w^{2n+1} - 1|}{|w - 1|} \geq \frac{|\mathrm{Re}(e^{(2n+1)it} - 1)|}{|t|} = \frac{1 - \cos((2n+1)t)}{|t|}$$

und damit (da der Integrand gerade ist)

$$\begin{aligned} \|D_n\|_1 &\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos((2n+1)t))\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}(1-\cos u)\,\frac{du}{u} \\ &\geq \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(1-\cos u)\,du = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt $\|D_n\|_1 \to \infty$ $(n \to \infty)$. □

Wir betrachten nun allgemeine Folgen stetiger Operatoren.

Satz 2.7 *Es seien X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und (T_n) eine Folge in $L(X, Y)$ mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

Konvergiert die Folge $(T_n x)_n$ für alle x aus einer in X dichten Menge D, so konvergiert $(T_n x)_n$ für alle $x \in X$ und durch $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ ist ein $T \in L(X, Y)$ definiert mit

$$\|T\| \leq \liminf \|T_n\|.$$

Beweis. Es seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $y \in D$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$. Weiter existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T_k y - T_m y\| < \varepsilon$ für $k, m \geq N$. Also gilt für $k, m \geq N$ auch

$$\|T_k x - T_m x\| \leq \|T_k(x - y)\| + \|T_k y - T_m y\| + \|T_m(y - x)\| \leq (2\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| + 1)\varepsilon.$$

Damit ist $(T_n x)$ eine Cauchy-Folge in Y, also konvergent. Da die Abbildungen T_n linear sind, ist die punkteise Grenzfunktion T ebenfalls linear. Es sei (n_j) so, dass

$$\|T_{n_j}\| \to \liminf \|T_n\| \qquad (j \to \infty).$$

Für $x \in B_X$ gilt dann $\|Tx\| = \lim_{j\to\infty} \|T_{n_j} x\| \leq \lim_{j\to\infty} \|T_{n_j}\| = \liminf \|T_n\|$. □

Bemerkung 2.8 Da konvergente Folgen in normierten Räumen beschränkt sind, ergibt sich aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit und S. 2.7 insbesondere: Sind X, Y Banachräume und ist (T_n) eine Folge in $L(X, Y)$, so sind äquivalent:

a) Für alle $x \in X$ ist die Folge $(T_n x)_n$ konvergent in Y.

b) Es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ und es existiert eine dichte Teilmenge D von X so, dass $(T_n x)_n$ für alle $x \in D$ konvergiert.

Außerdem ist in diesem Fall der punktweise Grenzwert $T \in L(X,Y)$.

Beispiel 2.9 (Quadraturformeln; Satz von Szegö) Integrale $\int_a^b f$ für $f \in C[a,b]$ werden häufig durch Summen der Form

$$Qf := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(t_k),$$

approximiert, wobei die Gewichte $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und die Stützstellen $a = t_0 < \dots < t_n = b$ unabhängig von f sind. Für das dadurch definierte Funktional $Q \in (C[a,b])^*$ gilt

$$\|Q\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| =: \beta.$$

> Denn: Offensichtlich gilt $|Qf| \leq \beta \|f\|_\infty$ für alle $f \in C[a,b]$. Ist $f \in C[a,b]$ so, dass $f(t_k) = \operatorname{sign}(\alpha_k)$ für $k = 0, \dots, n$ und f linear fortgesetzt auf $[t_{k-1}, t_k]$, so gilt $\|f\|_\infty = 1$ und $Q_n(f) = \beta$.

Ist (Q_n) eine Folge solcher Näherungen, d. h.

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} f\big(t_k^{(n)}\big),$$

so stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen $Q_n(f) \to \int_a^b f \ (n \to \infty)$ gilt. Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz (siehe Analysis) sind die Polynome dicht in $C[a,b]$. Damit sind nach B 2.8 folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $Q_n(f) \to \int_a^b f$ für alle $f \in C[a,b]$,

b) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| < \infty$ und $Q_n(p) \to \int_c^b p$ für alle Polynome p.

Ist speziell $\alpha_k^{(n)} \geq 0$, so gilt $\|Q_n\| = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} = Q_n(1)$. Also folgt a) dann schon aus $Q_n(p) \to \int\limits_a^b p$ für alle Polynome p.[2]

Definition 2.10 Sind X, Y metrische Räume, so heißt $f : X \to Y$ **offen**, falls für alle offenen Mengen $U \subset X$ auch $f(U) \subset Y$ offen ist.

Bemerkung 2.11 Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ linear. Dann gilt
1. Ist T offen, so ist T surjektiv.

[2] Zusammengesetzte Trapez- und Simpsonregeln haben positive Gewichte; Newton-Cotes-Formeln sind nicht für alle stetigen f konvergent.

Denn: Es gilt $T(B_X) \supset T(U_1(0)) \supset U_\delta(0)$ für ein $\delta > 0$. Aus $U_{\delta r}(0) = rU_\delta(0)$ und $rT(B_X) = T(rB_X)$ für $r > 0$ [3] folgt

$$T(X) = T\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_X\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT(B_X) \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{n\delta}(0) = Y.$$

2. Ist $T(B_X) \in \mathscr{U}_Y := \{A \subset Y : A \text{ Nullumgebung}\}$, so ist T offen.

Denn: Es sei $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(0) \subset T(B_X)$. Ist $U \subset X$ offen und ist $y \in T(U)$, so existieren ein $x \in U$ mit $y = Tx$ und ein $\rho > 0$ mit $x + \rho B_X \subset U$. Hieraus folgt

$$T(U) \supset T(x + \rho B_X) = y + \rho T(B_X) \supset y + \rho U_\delta(0) = U_{\delta\rho}(y).$$

Bemerkung und Definition 2.12 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt **von erster Kategorie** (oder **mager**) in X, falls eine Folge abgeschlossener Mengen B_n existiert mit $B_n^\circ = \varnothing$ und $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Andernfalls heißt A **von zweiter Kategorie** in X. Durch Komplementbildung sieht man leicht: A ist genau dann von erster Kategorie, wenn $X \setminus A$ einen abzählbaren Schnitt offener, dichter Mengen enthält. Ist (X, d) vollständig, so ist damit nach dem Satz von Baire $A \subset X$ genau dann von erster Kategorie, wenn $X \setminus A$ residual ist. Da Komplemente nichtleerer offener Mengen nicht dicht sind, ist jede nichtleere offene Menge in X (also insbesondere X) von zweiter Kategorie.

Satz 2.13 *Es seien X ein Banachraum, Y normiert und $T \in L(X, Y)$. Ist $T(X)$ von zweiter Kategorie in Y, so ist T offen.*

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst: Ist $\overline{T(B_X)} \in \mathscr{U}_Y$, so ist T offen. Die Aussage wird auch als **Schauder-Lemma** bezeichnet. Es sei dazu $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(0) \subset \overline{T(B_X)}$. Dann gilt für $r > 0$ auch[4]

$$U_{\delta r}(0) = rU_\delta(0) \subset r\overline{T(B_X)} = \overline{T(rB_X)}.$$

Wir schreiben $B_X/s := (1/s)B_X$ für $s > 0$. Nach B. 2.11 reicht es, $\overline{T(B_X/2)} \subset T(B_X)$ zu zeigen. Dazu sei $y \in \overline{T(B_X/2)}$. Dann existiert ein $x_1 \in B_X/2$ mit $\|y - Tx_1\| < \delta/4$, also $y - Tx_1 \in \overline{T(B_X/4)}$. Damit existiert ein $x_2 \in B_X/4$ mit

$$y - T(x_1 + x_2) = (y - Tx_1) - Tx_2 \in U_{\delta/8}(0).$$

Induktiv erhält man eine Folge (x_n) mit $\|x_n\| \le 1/2^n$ und

$$y - T\Big(\sum_{k=1}^n x_k\Big) \in U_{\delta/2^{n+1}}(0).$$

Aus $\sum\limits_{n=1}^\infty \|x_n\| \le 1$ folgt mit S. 1.6 die Existenz von $x := \sum\limits_{n=1}^\infty x_n \in X$. Außerdem ist $\|x\| \le 1$, also $x \in B_X$. Da T stetig ist, folgt $y = \lim\limits_{n\to\infty} T\Big(\sum\limits_{j=1}^n x_j\Big) = T(x)$.

[3] Ist $T : X \to Y$ linear, so gilt $T(\lambda A) = \lambda T(A)$ und $T(A + B) = T(A) + T(B)$ für $A, B \subset X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

[4] Sind X normiert, $r > 0$ und $A, B \subset X$, so gilt $r\overline{A} = \overline{rA}$ und $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.

2. Mit $B_n := \overline{T(nB_X)}$ ist $T(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(nB_X) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Da nach Voraussetzung $T(X)$ nicht von erster Kategorie ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $B_n^\circ \neq \varnothing$, d. h. es existieren ein $y \in Y$ und ein $\delta > 0$ mit $y + U_\delta(0) = U_\delta(y) \subset B_n$. Aus $y \in B_n$ folgt

$$-y \in -B_n = \overline{T(-nB_X)} = B_n.$$

Also ergibt sich mit $nB_X + nB_X = 2nB_X$

$$U_\delta(0) \subset B_n - y \subset B_n + B_n \subset \overline{T(nB_X) + T(nB_X)} = \overline{T(2nB_X)}$$

und damit $U_{\delta/(2n)}(0) \subset \overline{T(B_X)}$. Nach 1. ist T offen. □

Satz 2.14 (von der offenen Abbildung) *Es seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$. Dann sind äquivalent:*

a) T ist offen.

b) T ist surjektiv.

c) $T(X)$ ist von zweiter Kategorie in Y.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) folgt aus B. 2.11, b) $\Rightarrow$ c) aus B. 2.12 und c) $\Rightarrow$ a) aus S. 2.13. □

Bemerkung 2.15 Es seien X, Y Banachräume. Als eine einfache, aber wichtige Folgerung aus S. 2.14 ergibt sich: Ist $T \in L(X,Y)$ bijektiv, so ist $T^{-1} \in L(Y,X)$.

> Denn: Für alle offenen Menge $U \subset X$ ist $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ offen in Y. Also ist T^{-1} stetig. Die Linearität ist klar.

Ist Y kein Banachraum, so kann T^{-1} unstetig sein! Betrachtet man etwa die identische Abbildung $\mathrm{id} : \big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(C[a,b], \|\cdot\|_1\big)$, so ist id stetig (da $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$), aber id^{-1} nicht ([Ü]).

Bemerkung und Definition 2.16 Es seien X und Y normierte Räume.
1. Für $p \in [1,\infty]$ sind durch

$$\big\|(x,y)\big\|_p := \begin{cases} \big(\|x\|^p + \|y\|^p\big)^{1/p}, & \text{falls } p < \infty \\ \max\{\|x\|, \|y\|\}, & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

(paarweise äquivalente[5]) Normen auf $X \times Y$ gegeben. Wir schreiben für die entsprechend normierten Produkträume $X \oplus_p Y$. Dabei gilt: $X \oplus_p Y$ ist ein Banachraum genau dann,

[5] Zwei Normen $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ auf X sind äquivalent, falls $\mathrm{id} : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|')$ und id^{-1} stetig sind.

wenn X und Y Banachräume sind. Außerdem gilt $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $X \oplus_p Y$ genau dann, wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$.
2. Ist T ein Operator T von X nach Y, so ist der Graph

$$G(T) := \big\{(x, Tx) : x \in D(T)\big\}$$

ein Teilraum von $X \times Y$. Damit heißt T (graph-)**abgeschlossen**, falls $G(T)$ in $X \oplus_1 Y$ abgeschlossen ist.

Bemerkung 2.17 Es seien X, Y normierte Räume. Ein Operator T von X nach Y ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist (x_n) in $D(T)$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$, so ist $x \in D(T)$ und $Tx = y$.

> Denn: Eine Folge (z_n) in $X \times Y$ liegt genau dann in $G(T)$, wenn $z_n = (x_n, Tx_n)$ für eine Folge (x_n) in $D(T)$ ist. Damit ergibt sich die Äquivalenz leicht aus der Tatsache, dass $G(T)$ genau dann abgeschlossen ist, wenn für jede Folge (z_n) in $G(T)$ mit $z_n \to z$ schon $z \in G(T)$ gilt.

Insbesondere ist jeder Operator $T \in L(X, Y)$ damit abgeschlossen.

Beispiele 2.18 1. Es seien $I = [a, b]$, $X = Y = (C(I), \|\cdot\|_\infty)$ und T als Operator von X nach Y definiert durch $D(T) := C^1(I)$ und $Tf := f'$. Dann ist T abgeschlossen.

> Denn: Ist (f_n) in $C^1(I)$ mit $f_n \to f$ in $C(I)$ und $Tf_n = f_n' \to g$ in $C(I)$, so ist $f \in C^1(I)$ mit $g = f'$ ([Ü]). Nach B. 2.17.2 ist T abgeschlossen.

Man beachte: Nach B. 1.10.1 ist T nicht beschränkt!
2. Nicht jeder Operator ist abgeschlossen: Es seien $I = [-1, 1]$, $X = Y = (L_2(I), \|\cdot\|_2)$ und T als Operator von X nach Y wieder definiert durch $Tf := f'$ für $f \in D(T) := C^1(I)$. Für f_n mit

$$f_n(t) = \sqrt{t^2 + 1/n} \qquad (n \in \mathbb{N}, t \in I)$$

gilt $f_n \to f := |\cdot|$ gleichmäßig auf I, also auch in $L_2(I)$ und $f_n' \to \text{sign}$ in $L_2(I)$ ([Ü]). Es ist jedoch $f \notin C^1(I) = D(T)$.

Satz 2.19 (vom abgeschlossenen Graphen; Graphensatz) *Es seien X, Y Banachräume. Ist $T : X \to Y$ linear und abgeschlossen, so ist $T \in L(X, Y)$.*

Beweis. Es seien $P_X : X \times Y \to Y$ und $P_Y : X \times Y \to Y$ definiert durch

$$P_X(x, y) := x, \qquad P_Y(x, y) := y \qquad \big((x, y) \in X \times Y\big).$$

Dann sind $P_X \in L(X \oplus_1 Y, X)$ und $P_Y \in L(X \oplus_1 Y, Y)$. Die Abbildung $S := P_X|_{G(T)} \in L(G(T), X)$ ist injektiv, denn aus $P_X(x, Tx) = 0$, folgt $x = 0$, also auch $Tx = 0$. Da $D(T) = X$ gilt, ist S auch surjektiv, also bijektiv. Da $G(T)$ abgeschlossen im Banachraum $X \oplus_1 Y$ ist, ist $G(T)$ ein Banachraum. Also ist $S^{-1} \in L(X, G(T))$ nach B. 2.15. Aus

$$(P_Y \circ S^{-1})(x) = P_Y(x, Tx) = Tx \qquad (x \in X)$$

folgt die Stetigkeit von T. □

3 Sätze von Hahn-Banach und Folgerungen

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Fortsetzbarkeit linearer Funktionale.

Definition 3.1 Es sei X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt **sublinear**, falls $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für $x, y \in X$ und $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ für $\alpha \geq 0$, $x \in X$ gilt. Insbesondere sind Halbnormen sublinear.

Damit gilt folgende erste Version eines Fortsetzungssatzes.

Satz 3.2 (Hahn-Banach für lineare Räume) *Es seien X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$ und $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear. Ferner seien $L \subset X$ ein Teilraum und $f \in L^*$ so, dass $\operatorname{Re} f \leq p$ auf L. Dann existiert ein $x^* \in X^*$ mit $x^*|_L = f$ und $\operatorname{Re} x^* \leq p$ auf X.*

Beweis. 1. Wir setzen

$$A := \left\{ g \in \big(D(g)\big)^* : D(g) \supset L, g|_L = f, \operatorname{Re} g \leq p \text{ auf } D(g) \right\}$$

und definieren eine Relation $\subset$ auf A durch $g_1 \subset g_2$, falls $D(g_1) \subset D(g_2)$ und $g_2|_{D(g_1)} = g_1$, also $G(g_1) \subset G(g_2)$, gilt. Man sieht leicht, dass $\subset$ eine Halbordnung auf A ist. Es sei K eine Kette in A. Dann ist durch

$$D(g) := \bigcup_{h \in K} D(h)$$

und $g(x) := h(x)$ für $x \in D(h)$ eine Funktion $g : D(g) \to \mathbb{K}$ wohldefiniert.

> Denn: Ist $x \in D(h_1) \cap D(h_2)$ für $h_1, h_2 \in K$, so ist $h_1 \subset h_2$ oder $h_2 \subset h_1$. Gilt etwa $h_1 \subset h_2$, so ist $D(h_1) \subset D(h_2)$ und $h_2|_{D(h_1)} = h_1$, also $h_1(x) = h_2(x)$.

Ähnlich sieht man, dass $D(g)$ ein linearer Teilraum von X ist und dass $g : D(g) \to \mathbb{K}$ linear ist. Außerdem gilt Re $g \leq p$ auf $D(g)$. Schließlich ist $D(h) \subset D(g)$ und $g|_{D(h)} = h$ für alle $h \in K$. Damit ist g obere Schranke von K. Nach dem Zornschen Lemma besitzt A ein maximales Element x^*.
2. Wir zeigen: $D(x^*) = X$. Dann ist x^* wie gewünscht, da $x^* \in A$.
Den Beweis führen wir nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ läßt sich relativ leicht darauf zurückführen. Man verwendet dabei: Ist g ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional, so ist $\operatorname{Re} g$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional, und es gilt $g = \operatorname{Re} g - i \operatorname{Re} g(i\,\cdot)$.
Angenommen, es ist $D(x^*) \neq X$. Wir fixieren ein $a \in X \setminus D(x^*)$. Dann gilt für $x, y \in D(x^*)$

$$x^*(x) + x^*(y) = x^*(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x+a) + p(y-a),$$

also

$$x^*(y) - p(y-a) \leq p(x+a) - x^*(x).$$

Hieraus folgt

$$\alpha := \sup_{y \in D(x^*)} \big(x^*(y) - p(y-a)\big) \leq \inf_{x \in D(x^*)} \big(p(x+a) - x^*(x)\big) =: \beta.$$

Damit gilt für $\gamma \in [\alpha, \beta]$ und $x, y \in D(x^*)$

$$x^*(x) + \gamma \leq p(x+a) \qquad \text{und} \qquad x^*(y) - \gamma \leq p(y-a). \tag{3.1}$$

Wir setzen $L_a := D(x^*) \oplus (\mathbb{R} \cdot a)$ und für $\gamma \in [\alpha, \beta]$

$$F_\gamma(x + \lambda a) := x^*(x) + \lambda \cdot \gamma \qquad (x + \lambda a \in L_a).$$

Dann ist $F_\gamma \in L_a^*$ eine Fortsetzung von x^*. Aus (3.1) folgt für $\lambda \neq 0$

$$F_\gamma(x + \lambda a) = |\lambda|\, F_\gamma\Big(\frac{1}{|\lambda|}\, x + \frac{\lambda}{|\lambda|}\, a\Big) \leq |\lambda| p\Big(\frac{1}{|\lambda|}\, x + \frac{\lambda}{|\lambda|}\, a\Big) = p(x + \lambda a).$$

Also ist $F_\gamma \in A$ mit $x^* \subset F_\gamma$ sowie $L_a \neq D(x^*)$, was der der Maximilität von x^* widerspricht. □

Wir formulieren eine ganze Reihe von Folgerungen. Wir werden im Weiteren für $x^* \in X^*$ und $x \in X$ meist $\langle x, x^* \rangle$ statt $x^*(x)$ schreiben. Außerdem schreiben wir $x^* \perp L$, falls $x^*|_L = 0$ gilt.

Satz 3.3 (Hahn-Banach für normierte Räume) *Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein halbnormierter Raum, $L \subset X$ ein Teilraum und $f \in L^*$.*

1. *Gilt $|\langle x, f \rangle| \leq \|x\|$ für $x \in L$, so existiert ein $x^* \in X^*$ mit $|\langle x, x^* \rangle| \leq \|x\|$ für $x \in X$ und $x^*|_L = f$.*
2. *Sind $\|\cdot\|$ eine Norm und $f \in L'$, so existiert ein $x' \in X'$ mit $\|x'\| = \|f\|$ und $x'|_L = f$.*

Beweis. 1. Da $\|\cdot\|$ sublinear ist, existiert nach S. 3.2 ein $x^* \in X^*$ mit $x^*|_L = f$ und $\operatorname{Re} x^* \leq \|\cdot\|$. Ist $x \in X$, so existiert ein $\gamma \in \mathbb{K}$ mit $|\gamma| = 1$ und $|\langle x, x^* \rangle| = \gamma \cdot \langle x, x^* \rangle$, also

$$|\langle x, x^* \rangle| = \gamma \langle x, x^* \rangle = \langle \gamma x, x^* \rangle = \operatorname{Re}\langle \gamma x, x^* \rangle \leq \|\gamma x\| = \|x\|.$$

2. Ohne Einschränkung sei $f \neq 0$ und $\|f\| = 1$ (sonst betrachte man $f/\|f\|$). Dann gilt $|\langle x, f \rangle| \leq \|x\|$ für $x \in L$. Nach 1. existiert ein $x' \in X'$ mit $|\langle x, x' \rangle| \leq \|x\|$ für $x \in X$ (also $\|x'\| \leq 1$) und $x'|_L = f$. Klar ist, dass $\|x'\| \geq \|f\| = 1$ gilt. □

Satz 3.4 *Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $L \subset X$ ein Teilraum. Dann gilt:*

1. *Für alle $x \in X$ existiert ein $x' \in B_{X'}$ mit $\langle x, x' \rangle = \operatorname{dist}(x, L)$ und $x' \perp L$.*
2. *Ist $x \in X$ so, dass $\langle x, x' \rangle = 0$ für alle $x' \in X'$ mit $x' \perp L$ gilt, so ist $x \in \overline{L}$.*

3. *Für alle* $x \in X$ *gilt* $\|x\| = \sup_{x' \in B_{X'}} |\langle x, x' \rangle| = \max_{x' \in B_{X'}} |\langle x, x' \rangle|$.[6]

4. *Sind* $x_1, \ldots, x_n$ *linear unabhängig, so existieren* $x_1', \ldots, x_n' \in X'$ *mit* $\langle x_j, x_k' \rangle = \delta_{jk}$ *für* $j, k = 1, \ldots, n$.

Beweis. 1. Ist $d := \operatorname{dist}(x, L) = 0$, so ist $x' = 0$ passend. Es sei also $d > 0$. Auf $L_x := L \oplus (\mathbb{K} \cdot x)$ definieren wir f durch

$$f(y + \lambda x) := \lambda d \qquad (y + \lambda x \in L_x).$$

Dann ist $f \in L^*$ mit $f(x) = d$ und $f \perp L$. Für $\lambda \neq 0$ und $y \in L$ gilt

$$\|y + \lambda x\| = |\lambda| \, \|x - \lambda^{-1} y\| \geq |\lambda| d = |f(y + \lambda x)|,$$

also $\|f\| \leq 1$. Damit folgt die Behauptung aus S. 3.3.
2. Da $\operatorname{dist}(x, L) = 0$ genau dann gilt, wenn $x \in \overline{L}$ ist, ergibt sich 2. aus 1.
3. Da $\|x\| = \operatorname{dist}(x, \{0\})$ gilt, ergibt sich 3. aus 1. mit $L = \{0\}$.
4. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei $L_k := \operatorname{span}\{x_j : j \neq k\}$. Dann ist $d_k := \operatorname{dist}(x_k, L_k) > 0$. Nach 1. existiert ein $y_k' \in X'$ mit $\langle x_k, y_k' \rangle = d_k$ und $y_k' \perp L_k$. Also ist $x_k' := y_k'/d_k$ passend. □

Wichtig für die Anwendung obiger Resultate ist die Kenntnis des Dualraums X' eines normierten Raumes X. Wir wollen nun in einigen Beispielen auf die Darstellung des Dualraumes für wichtige Banachräume eingehen.

Definition 3.5 Es seien X, Y normierte Räume, und es sei $f : X \to Y$.

1. f heißt **isometrisch**, falls $\big\|f(x) - f(y)\big\| = \|x - y\|$ für $x, y \in X$.

2. f heißt **antilinear**, falls $f(x + y) = f(x) + f(y)$ und $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$ für $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Aus der Definition folgt:

- Ist f isometrisch, so ist f injektiv.
- Gilt $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle x und ist f linear oder antilinear, so ist f isometrisch.

Hilberträume sind in gewisser Weise zu sich selbst dual. Genauer gilt

Satz 3.6 (Rieszscher Darstellungssatz für Hilberträume) *Es sei* $(X, \langle \cdot, \cdot \cdot \rangle)$ *ein unitärer Raum. Dann ist* $\langle \cdot, y \rangle \in X'$ *für alle* $y \in X$ *und die Abbildung* $\iota : X \to X'$*, definiert durch* $\iota(y) := \langle \cdot, y \rangle$*, antilinear und isometrisch. Ist* X *ein Hilbertraum, so ist* ι *auch surjektiv.*

[6]Nach Definition der Operatornorm gilt auch die duale Aussage $\|x'\| = \sup_{x \in B_X} |\langle x, x' \rangle|$.

Beweis. Für $y \in X$ ist $\langle \cdot, y\rangle$ linear und nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \le \|x\|\|y\| \qquad (x \in X),$$

also $\langle \cdot, y\rangle \in X'$ mit $\|\langle \cdot, y\rangle\| \le \|y\|$. Aus $\langle y, y\rangle = \|y\|^2$ folgt $\|\iota(y)\| = \|\langle \cdot, y\rangle\| = \|y\|$. Außerdem ist ι antilinear nach Definition des Skalarproduktes und damit auch isometrisch. Es bleibt noch zu zeigen: Ist X Hilbertraum, so ist ι surjektiv. Dazu sei $x' \in X'$ gegeben. Wir setzen $L := \ker(x')$. Ist $L = X$, so ist $x' = 0$ und damit $\iota(0) = x'$. Es sei also $L \ne X$. Dann existiert ein $z \in X$ mit $\langle z, x'\rangle = 1$. Für alle $x \in X$ ist

$$\langle x - \langle x, x'\rangle z, x'\rangle \;=\; \langle x, x'\rangle - \langle x, x'\rangle \;= 0,$$

d. h. $x - \langle x, x'\rangle z \in L$. Da x' stetig ist, ist $L \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum, also $\big(L, \|\cdot\|\big)$ ein Banachraum. Nach dem Projektionssatz ist $z_L := z - P_L z \perp L$ und mit $\alpha := \langle z, z_L\rangle$ dann

$$0 = \langle x - \langle x, x'\rangle\, z, z_L\rangle = \langle x, z_L\rangle - \alpha\langle x, x'\rangle,$$

also $\langle x, z_L\rangle = \alpha\langle x, x'\rangle$. Für $x = z_L$ gilt $0 < \|z_L\|^2 = \alpha\langle z_L, x'\rangle$, also insbesondere $\alpha \ne 0$. Mit $y := \alpha^{-1} z_L$ ergibt sich $\langle x, x'\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x \in X$, also $\iota(y) = x'$. □

Satz 3.7 *Es seien $p, q \in (1, \infty)$ so, dass $p + q = pq$. Dann ist für jedes $y \in \ell_q$ durch*

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j} \qquad (x = (x_j) \in \ell_p)$$

ein Funktional $\langle \cdot, y\rangle \in \ell_p'$ gegeben mit $||\langle \cdot, y\rangle|| = ||y||_q$. Die Abbildung $\iota : \ell_q \to \ell_p'$ mit $\iota(y) := \langle \cdot, y\rangle$ ist antilinear, isometrisch und surjektiv.[7]

Beweis. 1. Aus der Hölder-Ungleichung folgt für $x \in \ell_p$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \le \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\Big)^{1/q} = \|x\|_p \|y\|_q\,.$$

Also existiert $\langle x, y\rangle$ und es gilt $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_p\, \|y\|_q$. Damit ist $\langle \cdot, y\rangle \in \ell_p'$ mit $\|\langle \cdot, y\rangle\| \le \|y\|_q$. Andererseits definieren wir (mit $0^\alpha := 0$ für $\alpha \ne 0$)

$$x_j := |y_j|^{q/p-1} \cdot y_j \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

Dann ist $|x_j|^p = |y_j|^q = |y_j|^{q/p+1} = x_j \overline{y_j}$, also $(x_j) \in \ell_p$ mit $(\|x\|_p)^p = (\|y\|_q)^q$ sowie

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j} = (\|y\|_q)^q = (\|y\|_q)^{1+q/p} = \|y\|_q \|x\|_p$$

und damit auch $\|\langle \cdot, y\rangle\| \ge \|y\|_q$.

[7] Die Aussage ist auch für $p = 1$ und $q = \infty$ richtig, aber nicht für $p = \infty$ und $q = 1$.

2. Die Abbildung ι ist antilinear und damit nach 1. auch isometrisch. Wir zeigen: ι ist surjektiv. Dazu sei $x' \in \ell_p'$ gegeben und $y_k := \overline{\langle e^{(k)}, x' \rangle}$, wobei $e^{(k)}$ der k-te Einheitsvektor ist, und (x_j) wie in 1. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $s_n := \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^q$

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} = \langle \sum_{j=1}^{n} x_j e^{(j)}, x' \rangle \leq ||x'|| \cdot || \sum_{j=0}^{n} x_j e^{(j)} ||_p = ||x'|| \, s_n^{1/p},$$

also $s_n^{1-1/p} \leq \|x'\|$. Damit ist $y \in \ell_q$. Nach Definition stimmen x' und $\iota(y)$ auf allen $e^{(k)}$, also auf dem Teilraum $\varphi := \operatorname{span}\{e^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ der abbrechenden Folgen überein. Da φ dicht in ℓ_p ist ([Ü]), stimmen die beiden stetigen Funktionale insgesamt überein. □

Bemerkung 3.8 Allgemeiner als – und ähnlich wie – in S. 3.7 kann man mithilfe der Hölder-Ungleichung für Integrale zeigen: Ist (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, so ist für $p, q \in (1, \infty)$ mit $p + q = pq$ und jedes $g \in L_q(\mu)$ durch

$$\langle f, g \rangle := \int f \overline{g} \, d\mu \qquad \big(f \in L_p(\mu)\big)$$

ein Funktional $\langle \cdot, g \rangle \in L_p(\mu)'$ gegeben mit $\|\langle \cdot, g \rangle\| = \|g\|_q$. Außerdem ist wieder $\iota : L_q(\mu) \to L_p(\mu)'$ mit $\iota(g) := \langle \cdot, g \rangle$ antilinear und isometrisch. Unter Verwendung weitergehender Hilfsmittel aus der Maßtheorie (insbesondere dem Satz von Radon-Nikodym) kann man zeigen, dass ι auch surjektiv ist.[8]

Bemerkung 3.9 Es sei (S, d) ein kompakter metrischer Raum. Sind μ ein endliches Maß auf $\mathscr{B}(S)$ und $h : S \to \mathbb{C}$ messbar mit $|h| = 1$, so ist durch

$$\langle f, h\mu \rangle := \int f \, d(h\mu) := \int f h \, d\mu \quad (f \in C(S))$$

ein Funktional in $\langle \cdot, h\mu \rangle \in (C(S), \| \cdot \|_\infty)'$ gegeben (vgl. B. A.5). Man kann zeigen: Jedes Funktional in $C(S)'$ ist von dieser Form. Dies ist die wesentliche Aussage des Rieszschen Darstellungssatzes für $C(S)$.[9]

Interessante Anwendungen des Satzes von Hahn-Banach ergeben sich etwa in der Approximationstheorie. Um einen Eindruck zu vermitteln, wollen wir ein typisches Resultat formulieren und den Beweis skizzieren.

Bemerkung 3.10 Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Wir schreiben $H(K)$ für die Menge aller $f \in C(K)$ mit der Eigenschaft, dass eine offene Menge $U \supset K$ und eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ existieren mit $F|_U = f$. Es gilt der bekannnte

[8] Im Falle σ-endlicher Maße bleibt die Aussage auch für $p = 1$ und $q = \infty$ richtig.

[9] Ein Beweis findet sich etwa in W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

Approximationssatz von Runge: *Ist $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend, so existiert zu jedem $f \in H(K)$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom p mit $||f - p||_\infty < \varepsilon$.*

Wir skizzieren den Beweis. Es sei $e_k(z) := z^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$, $z \in K$ und $L := \text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ der lineare Teilraum der Polynome in $C(K)$. Nach S. 3.4.2. reicht es, zu zeigen: Sind $f \in H(K)$ und $h\mu$ so, dass mit

$$\langle e_k, h\mu\rangle = \int z^k h(z)\, d\mu(z) = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

gilt, so ist auch $\langle f, h\mu\rangle = \int f h\, d\mu = 0$. Wir setzen $G := \mathbb{C} \setminus K$ und definieren das Cauchy-Integral $\widehat{h\mu} : G \to \mathbb{C}$ von $h\mu$ durch

$$\widehat{h\mu}(w) := \int \frac{h(z)}{w - z}\, d\mu(z) \quad (w \in G).$$

Dann ist $\widehat{h\mu}$ analytisch in G und für $|w| > \max\{|z| : z \in K\}$ gilt

$$\widehat{h\mu}(w) = \int h(z) \sum_{k=0}^{\infty} (z^k/w^{k+1})\, d\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle e_k, h\mu\rangle / w^{k+1} = 0.$$

Da G zusammenhängend ist, gilt $\widehat{h\mu} = 0$ nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen (siehe Analysis). Dies implizert $\langle f, h\mu\rangle = 0.$[10]

Wir kommen jetzt zu einer weiteren Version eines Hahn-Banach-Satzes, bei dem es um die Trennung konvexer Mengen geht.

Bemerkung und Definition 3.11 Es sei X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$, und es sei $A \subset X$. Dann heißt die Abbildung $p_A : X \to [0, \infty]$ mit

$$p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} = \inf\{\lambda > 0 : x/\lambda \in A\} \qquad (x \in X),$$

wobei $\inf \varnothing := \infty$, **Minkowski-Funktional** von A. Aus der Definition ergibt sich sofort: Aus $B \subset A$ folgt $p_A \leq p_B$ und für $\alpha > 0$ ist $p_A(\alpha x) = \alpha p_A(x)$ (mit $\alpha\infty := \infty$). Ist X normiert, so gilt $p_{U_\delta(0)}(x) = \|x\|/\delta$ und damit im Fall $U_\delta(0) \subset A$ auch $p_A \leq \|\cdot\|/\delta$.

Bemerkung 3.12 Sind X normiert und $C \subset X$ eine konvexe Nullumgebung, so gilt:
1. Das Minkowski-Funktional p_C ist sublinear.

> Denn: Nach B./D. 3.11 reicht es, die Subadditivität zu zeigen. Dazu seien $x, y \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren $\lambda, \mu > 0$ mit $x/\lambda \in C$, $y/\mu \in C$ und $\lambda \leq p_C(x) + \varepsilon$ sowie $\mu \leq p_C(y) + \varepsilon$. Also folgt
>
> $$\frac{x + y}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\,\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\,\frac{y}{\mu} \in C$$
>
> und damit $p_C(x + y) \leq \lambda + \mu \leq p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$.

[10] Ist γ ein U-nullhomologer Zyklus mit $\text{ind}_\gamma(z) = 1$ für alle $z \in K$, so folgt aus dem Satz von Fubini und der Cauchyschen Integralformel $\int f h\, d\mu = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma F\, \widehat{h\mu}$.

2. Ist C offen, so ist $C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$.

   Denn: Es sei $x \in C$. Da C offen ist, existiert ein $\lambda < 1$ mit $x/\lambda \in C$. Also ist $p_C(x) < 1$. Ist umgekehrt $p_C(x) < 1$, so existiert ein $\lambda < 1$ mit $x/\lambda \in C$. Mit $0 \in C$ ist auch $x = \lambda x/\lambda + (1-\lambda)0 \in C$.

Satz 3.13 *Es sei X ein normierter Raum. Ist $U \subset X$ konvex und offen mit $0 \notin U$, so existiert ein $x' \in X'$ mit $\mathrm{Re}\langle x, x'\rangle < 0$ für alle $x \in U$.*

Beweis. Wir führen den Beweis wieder nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lässt sich wie beim Beweis zu S. 3.2 darauf zurückführen. Wir fixiern ein $a \in -U$ und setzen $V := U + a$. Dann ist V offen und konvex mit $a \notin V$ und $0 \in V$.
Nach B. 3.12.1 ist $p := p_V$ sublinear. Außerdem existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(0) \subset V$. Nach B./D. 3.11 ist damit $p \leq \|\cdot\|/\delta$. Wir definieren $f : \mathbb{R}\cdot a \to \mathbb{R}$ durch

$$f(ta) = tp(a) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt $f \leq p$ auf $\mathbb{R}\cdot a$, denn ist $t \leq 0$, so ist $f(ta) \leq 0 \leq p(ta)$, und ist $t > 0$, so ist $f(ta) = tp(a) = p(ta)$.
Nach S. 3.2 existiert ein $x' \in X^*$ mit $x'|_{\mathbb{R}\cdot a} = f$ und $x' \leq p$. Tatsächlich ist $x' \in X'$, denn für alle x ist

$$\big|\langle x, x'\rangle\big| = \max\{\langle x, x'\rangle, \langle -x, x'\rangle\} \leq \|x\|/\delta.$$

Ist $x \in U$, so ist $v := x + a \in V$. Aus B. 3.12.2 folgt $\langle v, x'\rangle \leq p(v) < 1$ und wegen $a \notin V$ zudem $\langle a, x'\rangle = f(a) = p(a) \geq 1$. Damit ist $\langle x, x'\rangle = \langle v, x'\rangle - \langle a, x'\rangle < 0$. □

Als Folgerung erhalten wir

Satz 3.14 (Trennungssatz von Hahn-Banach) *Es seien X ein normierter Raum und $D, C \subset X$ disjunkte konvexe Mengen. Ist D offen, so existiert ein $x' \in X'$ mit*

$$\mathrm{Re}\langle x, x'\rangle < \mathrm{Re}\langle y, x'\rangle$$

für alle $x \in D$ und $y \in C$.

Beweis. Es sei $U := D - C$. Dann ist U konvex und aus $U = \bigcup_{y \in C}(D - y)$ folgt, dass U auch offen ist. Außerdem ist $0 \notin U$. Also existiert nach S. 3.13 ein $x' \in X'$ mit

$$\mathrm{Re}\langle x, x'\rangle - \mathrm{Re}\langle y, x'\rangle = \mathrm{Re}\langle x - y, x'\rangle < 0 \qquad (x \in D, y \in C).$$

□

4 Kompaktheit und kompakte Operatoren

Definition 4.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$. Dann heißt M

1. **relativ kompakt**, falls jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt,
2. **folgenkompakt** (für uns kurz **kompakt**), falls M relativ kompakt und abgeschlossen ist.[11]
3. **präkompakt** oder auch **total beschränkt**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliche Menge $F \subset X$ (oder äquivalent $F \subset M$; [Ü]) so existiert, dass $M \subset \bigcup_{x \in F} U_\varepsilon(x)$ gilt.

Bemerkung 4.2 Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Dann gilt ([Ü] bzw. Analysis)
1. M ist relativ kompakt genau dann, wenn $\overline{M}$ kompakt ist, und dann auch präkompakt.
2. M ist genau dann kompakt, wenn M überdeckungskompakt ist, also für jede Familie offener Mengen $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ mit $M \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ eine endliche Menge $F \subset I$ existiert mit $M \subset \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$.

Satz 4.3 *Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und ist $M \subset X$ präkompakt, so ist M schon relativ kompakt.*

Beweis. Es sei (x_n) eine Folge in M. Da $M_0 := M$ präkompakt ist, existiert ein $F_1 \subset X$ endlich mit

$$M_0 = \bigcup_{y \in F_1} (U_{1/2}(y) \cap M_0).$$

Da F_1 endlich ist, existiert ein $y_1 \in F_1$ so, dass ∞ viele Folgenglieder von (x_n) in

$$M_1 := U_{1/2}(y_1) \cap M_0$$

liegen. Außerdem ist $\operatorname{diam}(M_1) < 1$.
Da $M_1 \subset M_0$ präkompakt ist, existiert ein $F_2 \subset X$ endlich mit

$$M_1 = \bigcup_{y \in F_2} (U_{1/4}(y) \cap M_1).$$

Wieder existiert ein $y_2 \in F_2$ so, dass unendlich viele Folgenglieder von (x_n) in

$$M_2 := U_{1/4}(y_2) \cap M_1$$

liegen. Dabei ist $\operatorname{diam}(M_2) < 1/2$. Induktiv erhält man auf diese Weise eine Folge (M_j) von Mengen mit $M_j \subset M_{j-1}$ und $\operatorname{diam}(M_j) < 1/j$ so, dass jedes M_j unendlich viele Folgenglieder von (x_n) enthält. Setzt man $n_0 := 1$ und wählt für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $n_j > n_{j-1}$ mit $x_{n_j} \in M_j$, so ist (x_{n_j}) eine Cauchy-Folge in X. Da (X, d) vollständig ist, ist (x_{n_j}) konvergent. □

[11] Äquivalent dazu ist, dass jede Folge in M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

Bemerkung 4.4 Es seien X, Y normierte Räume. Sind $A \subset X$ und $B \subset Y$ (relativ) kompakt, so ist auch $A \times B$ (relativ) kompakt in $X \oplus_1 Y$. Aus der Stetigkeit der Skalarmultiplikation $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ und der Addition $(x, y) \mapsto x + y$ folgt damit, dass λA und im Falle $X = Y$ auch $A + B$ (relativ) kompakt sind.

Der folgende Satz zeigt, dass die schöne Aussage des Satzes von Heine-Borel leider nur in endlich-dimensionalen Räumen gilt.

Satz 4.5 *Es sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum. Dann sind äquivalent:*

a) B_X *ist kompakt,*

b) B_X *ist präkompakt.*

c) $\dim(X) < \infty$,

Beweis. c) $\Rightarrow$ a) folgt aus dem Satz von Heine-Borel (gilt auch in beliebigen endlich-dimensionalen Räumen) und a) $\Rightarrow$ b) aus B. 4.2.
b) $\Rightarrow$ c): Es sei $F \subset X$ endlich mit

$$B_X \subset \bigcup_{x \in F} U_{1/2}(x) = F + \frac{1}{2} U_1(0) \subset F + \frac{1}{2} B_X .$$

Wir setzen $L := \operatorname{span} F$. Dann ist L endlich-dimensional, also auch abgeschlossen in X. Weiter gilt (beachte: $L + (1/2)L = L$)

$$B_X \subset L + \frac{1}{2} B_X \subset L + \frac{1}{2}\Big(L + \frac{1}{2} B_X\Big) = L + \frac{1}{4} B_X,$$

also induktiv $B_X \subset L + 2^{-k} B_X$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $x \in B_X$, so existiert damit eine Folge (x_k) in L mit $\|x - x_k\| < 1/2^k$ für $k \in \mathbb{N}$, also $x_k \to x$. Da L abgeschlossen ist, folgt $x \in L$. Damit ist $B_X \subset L$, also auch $X = \bigcup_{r>0} r\, B_X \subset L$ und folglich $X = L$. $\square$

Angesichts der ernüchternden Erkenntnis des letzten Satzes wird man den Wert von Kompaktsheitsaussagen in unendlich-dimensionalen Räumen zu würdigen wissen. Ist (S, d) ein kompakter metrischer Raum und E ein Banachraum, so ist $(C(S, E), \|\cdot\|_\infty)$ nach B. 1.5 ein Banachraum. Wir wollen eine Kompaktheitsaussage für den Raum $(C(S, E), ||\cdot||_\infty)$ für endlich-dimensionales $(E, |\cdot|)$ beweisen.

Definition 4.6 Eine Teilmenge M von $C(S, E)$ heißt **gleichgradig stetig** an $t \in S$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass $\big|f(s) - f(t)\big| < \varepsilon$ für alle $s \in U_\delta(t)$ und alle $f \in M$. Ist M gleichgradig stetig an allen $t \in S$, so heißt M kurz gleichgradig stetig.

Satz 4.7 (Arzelà-Ascoli) *Es seien (S, d) ein kompakter metrischer Raum, $(E, |\cdot|)$ ein endlich-dimensionaler normierter Raum und $M \subset C(S, E)$. Ist M gleichgradig stetig und $\sup_{f\in M} |f(t)| < \infty$ für alle $t \in S$, so ist M relativ kompakt.*[12]

Beweis. Nach S. 4.3 genügt es, zu zeigen, dass M präkompakt ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $t \in S$ existiert ein $\delta_t = \delta_{t,\varepsilon} > 0$ so, dass $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ für alle $s \in U_{\delta_t}(t)$ und $f \in M$ gilt. Da S kompakt ist und $S = \bigcup_{t\in S} U_{\delta_t}(t)$ gilt, existiert eine endliche Menge $T \subset S$ mit
$$S = \bigcup_{t\in T} U_{\delta_t}(t).$$
Wir definieren $p : M \to C(T, E) = \mathrm{Abb}(T, E) =: F$ durch
$$p(f) = f|_T \qquad (f \in M).$$
Da T endlich und $\{f(t) : f \in M\}$ für alle $t \in S$ beschränkt ist, existiert ein $c \geq 0$ mit $\big\|p(f)\big\|_{\infty,T} \leq c$ für $f \in M$. Da $(F, \|\cdot\|_{\infty,T})$ endlich-dimensional ist, ist cB_F präkompakt. Damit ist auch $p(M) \subset cB_F$ präkompakt. Folglich existiert eine endliche Menge $H \subset p(M)$ mit
$$p(M) \subset \bigcup_{h\in H} U_\varepsilon(h)$$
Wir wählen $G \subset M$ endlich mit $p(G) = H$. Dann existiert zu jedem $f \in M$ ein $g \in G$ mit $\big\|p(f) - p(g)\big\|_{\infty,T} < \varepsilon$, also
$$\big|f(t) - g(t)\big| < \varepsilon \qquad (t \in T).$$
Ist $s \in S$ beliebig, so ist $s \in U_{\delta_t}(t)$ für ein $t = t_s \in T$. Für dieses t gilt
$$\big|f(s) - f(t)\big| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \big|g(s) - g(t)\big| < \varepsilon,$$
also
$$\big|f(s) - g(s)\big| \leq \big|f(s) - f(t)\big| + \big|f(t) - g(t)\big| + \big|g(t) - g(s)\big| < 3\varepsilon.$$
Folglich ist $\|f - g\|_\infty \leq 3\varepsilon < 4\varepsilon$ und damit $M \subset \bigcup_{g\in G} U_{4\varepsilon}(g)$. □

Bemerkung und Definition 4.8 Es seien X, Y normierte Räume. Ist $T : X \to Y$ linear, so heißt T **kompakt**, falls $T(B_X) \subset Y$ relativ kompakt ist. Wir setzen
$$K(X, Y) := \{T : X \to Y : T \text{ linear und kompakt}\}$$
und $K(X) := K(X, X)$. Da relativ kompakte Mengen in Y beschränkt sind, ist $K(X, Y) \subset L(X, Y)$.

[12] Man kann zeigen, dass auch die Umkehrung der Aussage gilt, d. h. ist M relativ kompakt, so ist M (punktweise) beschränkt und gleichgradig stetig.

Bemerkung 4.9 Es seien $S \subset \mathbb{C}$ kompakt und $k \in C(S \times [a,b])$. Dann ist durch

$$(Tf)(s) := \int_a^b f(t)k(s,t)\,dt \qquad (s \in S,\ f \in L_1[a,b])$$

ein kompakter linearer Operator $T = T_k : L_1[a,b] \to C(S)$ definiert.

Denn: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $S \times [a,b]$ kompakt ist, ist k gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ mit

$$\big|k(s,t) - k(s',t)\big| < \varepsilon \qquad (|s - s'| < \delta,\ t \in [a,b]).$$

Hieraus folgt für alle $f \in L_1[a,b]$ und alle s, s' mit $|s - s'| < \delta$

$$\big|Tf(s) - Tf(s')\big| \leq \int_a^b |f(t)|\,|k(s,t) - k(s',t)|\,dt \leq \varepsilon \|f\|_1.$$

Dies zeigt, dass Tf stetig auf S ist, und dass $M := T(B_{L_1[a,b]}) \subset C(S)$ gleichgradig stetig ist. Offensichtlich ist T linear. Schließlich gilt für alle $f \in L_1[a,b]$ und $s \in S$

$$|Tf(s)| \leq \int_a^b |f(t)|\,|k(s,t)|\,dt \leq \|k\|_\infty \cdot \|f\|_1,$$

also $\|Tf\|_\infty \leq \|k\|_\infty$ für $Tf \in M$. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist M relativ kompakt, also T kompakt.

Satz 4.10 *Es seien X, Y normierte Räume. Dann gilt*

1. *$K(X,Y)$ ist ein Teilraum von $L(X,Y)$.*
2. *Ist Y ein Banachraum, so ist $K(X,Y)$ abgeschlossen in $L(X,Y)$.*

Beweis. 1. Es seien $T, S \in K(X,Y)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt $(T+S)(B_X) \subset T(B_X)+S(B_X)$ und $(\lambda T)(B_X) = \lambda\big(T(B_X)\big)$. Nach B. 4.4 sind $(T+S)(B_X)$ und $(\lambda T)(B_X)$ relativ kompakt.
2. Es sei (T_n) eine Folge in $K(X,Y)$ mit $T_n \to T$ in $L(X,Y)$. Ist $\varepsilon > 0$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T - T_N\| < \varepsilon$. Für $x \in B_X$ folgt

$$Tx = (T - T_N)x + T_N x \in U_\varepsilon(0) + T_N(B_X).$$

Da $T_N(B_X)$ relativ kompakt und damit auch präkompakt ist, existiert eine endliche Menge $F \subset Y$ mit $T_N(B_X) \subset \bigcup_{y\in F} U_\varepsilon(y)$. Hieraus folgt

$$T(B_X) \subset U_\varepsilon(0) + T_N(B_X) \subset U_\varepsilon(0) + \bigcup_{y\in F} U_\varepsilon(y) \subset \bigcup_{y\in F} U_{2\varepsilon}(y).$$

Also ist $T(B_X) \subset Y$ präkompakt. Da Y ein Banachraum ist, ist $T(B_X)$ nach S. 4.3 auch relativ kompakt. $\square$

Satz 4.11 *Es seien X, Y, Z normierte Räume. Sind $S \in L(X,Y)$, $T \in L(Y,Z)$, und ist S oder T kompakt, so ist auch TS kompakt.*[13]

Beweis. Ist S kompakt, so ist $S(B_X) \subset Y$ relativ kompakt. Da $T : Y \to Z$ stetig ist, ist auch $(TS)(B_X) = T\big(S(B_X)\big)$ relativ kompakt.
Ist T kompakt, so ist $T(rB_Y)$ relativ kompakt für alle $r > 0$. Da $S \in L(X,Y)$ ist, existiert ein $r > 0$ mit $S(B_X) \subset rB_Y$. Damit ist auch $T\big(S(B_X)\big) \subset T(rB_Y)$ relativ kompakt. □

[13]Wir schreiben im Weiteren oft kurz TS statt $T \circ S$.

5 Resolvente und Spektrum

Wir starten mit Beispielen linearer partieller Differenzialgleichungen und zeigen, dass ein Lösungsansatz über Variablentrennung zu Eigenwertgleichungen führt.

Definition 5.1 1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wir setzen für $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

$$C^m(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \partial^\alpha f \in C(\Omega) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d,\ |\alpha| \le m\}$$

mit $|\alpha| := \sum_{j=1}^d \alpha_j$ und $\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f$ für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$.
2. Der **Laplace-Operator** $\Delta : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ bezüglich Ω ist definiert durch

$$\Delta u := \sum_{j=1}^d \partial_j^2 u \left(= \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^d u_{x_j x_j} \right)$$

für $u \in C^2(\Omega)$. Ist $\Delta u = 0$ auf Ω, so heißt u **harmonisch** in Ω.

Definition 5.2 Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen und $u : D \to \mathbb{C}$. Wir schreiben Punkte in D in der Form (t, x) mit $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $\Delta u := \Delta_x u := \Delta\big(u(t, \cdot)\big)$. Damit heißt

1. Die Gleichung $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ **Wärmeleitungsgleichung**.
2. Die Gleichung $\dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ **Schrödinger-Gleichung**.
3. Die Gleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ **Wellengleichung**.

Sind I ein offenes Intervall und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $I \times \Omega \subset D$, so versuchen wir, Lösungen u der Form

$$u(t, x) = v(t) w(x) \qquad (t \in I,\ x \in \Omega)$$

zu finden. Bei einem solchen Ansatz zur Bestimmung von Lösungen spricht man von **Trennung der Variablen**.

Satz 5.3 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, I ein offenes Intervall und $u : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ von der Form $u(t, x) = v(t) \cdot w(x)$ mit $v \in C^1(I)$ und $w \in C^2(\Omega)$. Dann gilt*

1. *Für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist u Lösung von*

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

genau dann, wenn Konstanten C, λ so existieren, dass $v(t) = Ce^{\lambda \alpha t}$ für $t \in I$ und $\Delta w(x) = \lambda w(x)$ für $x \in \Omega$.

2. $v \in C^2(I)$ *und* v *ist Lösung von*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

genau dann, wenn Konstanten $A, B, \mu \in \mathbb{C}$ *existieren mit* $v(t) = A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t)$ *und* $\Delta w(x) = -\mu^2 w(x)$.

Beweis. 1. Auf $I \times \Omega$ gilt

$$\Big(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta w\Big)(t,x) = \frac{1}{\alpha}v'(t)w(x) - v(t)\Delta w(x). \tag{5.1}$$

$\Leftarrow$: Ergibt sich durch Einsetzen in (5.1).
$\Rightarrow$: Für $u = 0$ gilt die Behauptung mit $C = \lambda = 0$. Es sei $u \neq 0$ und (s, y) so, dass $u(s, y) \neq 0$, also $v(s) \neq 0$ und $w(y) \neq 0$. Aus (5.1) folgt mit $\lambda := \Delta w(y)/w(y)$

$$v'(t) = \lambda\alpha v(t) \qquad (t \in I).$$

Also existiert eine Konstante $C \neq 0$ mit $v(t) = Ce^{\lambda\alpha t}$. Damit ergibt sich mit (5.1) für $x \in \Omega$

$$C\lambda e^{\lambda\alpha s}w(x) = Ce^{\lambda\alpha s}\Delta w(x),$$

also $\lambda w(x) = \Delta w(x)$ für $x \in \Omega$.
2. Es gilt

$$\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u\Big)x = v''(t)w(x) - v(t)\Delta w(x). \tag{5.2}$$

$\Leftarrow$: Sieht man wieder durch Einsetzen.
$\Rightarrow$: Wie in 1. sei ohne Einschränkung $u \neq 0$ und (s, t) so, dass $u(s, y) \neq 0$, also $v(s) \neq 0$ und $w(y) \neq 0$. Ist $\mu \in \mathbb{C}$ mit $-\mu^2 = \Delta w(y)/w(y)$, so folgt aus (5.2)

$$v''(t) = -\mu^2 v(t) \qquad (t \in I)$$

Also existieren Konstanten A, B mit $v(t) = A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t)$ für $t \in I$. Wegen $v(s) \neq 0$ ergibt sich mit (5.2) für $t = s$ auch $\Delta w(x) = -\mu^2 w(x)$ für $x \in \Omega$. □

Bemerkung 5.4 S. 5.3 zeigt, dass ein Lösungsansatz über Variablentrennung im Falle der Wärmeleitungs-, der Schrödinger- und der Wellengleichung auf ein Eigenwertproblem für den Laplace-Operator führt. Von besonderem Interesse sind dabei Eigenfunktionen mit verschwindenden Randwerten. Ist $A \subset \Omega$ kompakt und glatt berandet, so kann man unter Verwendung der Greenschen Formeln[14] für $u, v \in C^2(\Omega)$ mit $u|_{\partial A} = v|_{\partial A} = 0$ zeigen ([Ü]):

1. Ist $\Delta u(x) = \lambda u(x)$ und $u \neq 0$, so ist $\lambda < 0$.
2. Ist zusätzlich $\Delta v(x) = \mu v(x)$ mit $\lambda \neq \mu$, so ist $\int_A u\overline{v}\, d\lambda_2 = 0$.

[14] Siehe etwa `https://www.math.uni-trier.de//~mueller/Diffgleichungen/DGL-2018.pdf`, Satz 7.7

Definition 5.5 Es sei X ein Banachraum, und es sei T ein Operator in X, also $T : D(T) \to X$ mit $D(T) \subset X$. Mit $I := \mathrm{id}_X$ heißt

$$\rho(T) := \big\{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T : D(T) \to X \text{ bijektiv und } (\lambda I - T)^{-1} \in L(X)\big\}$$

Resolventenmenge von T und $R = R_T : \rho(T) \to L(X)$, definiert durch

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} \qquad \big(\lambda \in \rho(T)\big),$$

Resolvente von T. Die Menge $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ heißt **Spektrum** von T und

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ Eigenwert von } T\} = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \text{ nicht injektiv}\} \subset \sigma(T)$$

Punktspektrum von T.

Bemerkung 5.6 Ist $\dim(X) < \infty$, so gilt für jede lineare Abbildung $T : X \to X$ (siehe Lineare Algebra): $\lambda I - T$ ist injektiv genau dann, wenn $\lambda I - T$ surjektiv ist, und dann ist auch $(\lambda I - T)^{-1}$ stetig. Also ist $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \text{ injektiv}\}$ und damit auch $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. Im Fall $\dim(X) = \infty$ kann durchaus $\sigma_p(T) \neq \sigma(T)$ sein. Betrachtet man etwa den **Volterra-Operator** $V : C[0,1] \to C[0,1]$, definiert durch

$$(Vf)(t) = \int_0^t f \qquad (t \in [0,1],\ f \in C[0,1]),$$

so ist $(Vf)' = f$ nach dem Hauptsatz über Integralfunktionen. Aus $Vf = 0$ folgt also $f = 0$ und damit ist V injektiv, d. h. $0 \notin \sigma_p(V)$. Allerdings ist V wegen $V(C[0,1]) \subset C^1[0,1]$ nicht surjektiv, also $0 \in \sigma(V)$.

Satz 5.7 *Es seien X ein Banachraum und T ein abgeschlossener Operator in X. Dann gilt*

1. *Ist $\lambda I - T$ injektiv, so ist $(\lambda I - T)^{-1} : X \supset \mathrm{Bild}(\lambda I - T) \to X$ abgeschlossen.*
2. *$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T : D(T) \to X$ bijektiv$\}$.*

Beweis. 1. Ist (x_n) eine Folge in $D(T)$ mit $x_n \to x$ und $(\lambda I - T)x_n \to y$, so gilt

$$Tx_n = \lambda x_n - (\lambda I - T)x_n \to \lambda x - y.$$

Da T abgeschlossen ist, folgt $x \in D(T)$ und $Tx = \lambda x - y$, also $(\lambda I - T)x = y$. Damit ist auch $\lambda I - T$ abgeschlossen. Ist nun $\lambda I - T$ injektiv, so existiert $(\lambda I - T)^{-1} : \mathrm{Bild}(\lambda I - T) \to X$. Mit $G(\lambda I - T) \subset X \times X$ ist auch $G((\lambda I - T)^{-1})$ abgeschlossen.[15]
2. Aufgrund der Definition des Spektrums ist nur $\supset$ zu zeigen. Ist $\lambda I - T$ bijektiv, so ist $(\lambda I - T)^{-1} : X \to X$ nach 1. abgeschlossen. Nach dem Graphensatz ist damit $(\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$ □

[15] Ist $\tau : X \oplus_1 X \to X \oplus_1 X$ definiert durch $\tau(x,y) := (y,x)$, so ist $\tau = \tau^{-1}$ stetig und $G(f^{-1}) = \tau^{-1}(G(f))$ für alle Funktionen $f : X \supset D(f) \to X$.

Bemerkung und Definition 5.8 (**Neumannsche Reihe**): Es seien X ein Banachraum und $T \in L(X)$. Aus $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ folgt

$$r(T) := \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|.$$

Die Zahl $r(T)$ heißt **Spektralradius** von T.[16] Damit gilt: Für $|q| < 1/r(T)$ ist $I - qT \in L(X)$ invertierbar mit

$$(I - qT)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} q^j T^j.$$

Denn: Aus der Voraussetzung folgt $\limsup \|(qT)^n\|^{1/n} = |q|r(T) < 1$. Nach dem Wurzelkriterium und S. 1.6 ist damit die Reihe $S := \sum\limits_{j=0}^{\infty} (qT)^j$ (absolut) konvergent in $L(X)$. Aus

$$S(I - qT) \leftarrow \big(\sum_{j=0}^{n} q^j T^j\big)(I - qT) = I - q^{n+1}T^{n+1} \to I \quad (n \to \infty),$$

folgt $S(I - qT) = I$. Entsprechend sieht man $(I - qT)S = I$.

Satz 5.9 *Es seien X ein Banachraum und T ein abgeschlossener Operator in X.*

1. ***(Resolventengleichung)** Für alle $\lambda, \mu \in \rho(T)$ ist*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu).$$

2. *$\rho(T)$ ist offen und es gilt $R(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j(\lambda - a)^j \big(R(a)\big)^{j+1}$ für alle $a \in \rho(T)$ und $\lambda \in U_{1/r(R(a))}(a)$.*

3. *Ist $T \in L(X)$, so gilt $R(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1}T^j$ für $|\lambda| > r(T)$.*

Beweis. 1. Für $\lambda, \mu \in \rho(T)$ gilt wegen $\mathrm{Bild}\big(R(\mu)\big) = D(T)$

$$(\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu) = R(\lambda)\big((\mu I - T) - (\lambda I - T)\big)R(\mu) = R(\lambda) - R(\mu).$$

2. Es seien $a \in \rho(T)$ und $|\lambda - a| < 1/r(R(a))$. Nach B. 5.8 ist $I - (a - \lambda)R(a)$ invertierbar in $L(X)$ mit

$$(I - (a - \lambda)R(a))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j(\lambda - a)^j \big(R(a)\big)^j.$$

Weiter gilt

$$\big(I - (a - \lambda)R(a)\big)(aI - T) = aI - T - (a - \lambda)I = \lambda I - T,$$

[16] Man kann zeigen, dass die Folge $(\|T^n\|^{1/n})$ konvergent ist ([Ü]), also $\limsup$ durch $\lim$ ersetzt werden darf.

also ist auch $\lambda I - T : D(T) \to X$ bijektiv und damit $\lambda \in \rho(T)$ nach S. 5.7. Wegen $R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = R(a)\big(I - (a-\lambda)R(a)\big)^{-1}$ folgt die Behauptung.

3. Nach B. 5.8 ist $\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$ invertierbar mit $(\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}\sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j}T^j$. □

Bemerkung 5.10 S. 5.9 zeigt insbesondere, dass für abgeschlossene Operatoren auf Banachräumen das Spektrum $\sigma(T)$ stets abgeschlossen ist. Ist $T \in L(X)$, so ist $\sigma(T)$ nach S. 5.9 auch beschränkt (also kompakt) mit $\sigma(T) \subset r(T)B_{\mathbb{K}}$. Ist T unstetig, so kann $\sigma(T) = \mathbb{C}$ sein: Ist etwa $T : C[0,1] \supset C^1[0,1] \to C[0,1]$ der Ableitungsoperator, also $Tf := f'$, so ist $T\exp(\lambda\,\cdot) = \lambda\exp(\lambda\,\cdot)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, also $\sigma_p(T) = \mathbb{C}$.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass etwa schon gewisse Drehungen auf $\mathbb{R}^2$ keine (reellen) Eigenwerte und damit leeres Spektrum haben. Wir zeigen[17], dass im Fall komplexer Banachräume das Spektrum stets nichtleer ist. Genauer gilt (mit $\max\varnothing := 0$)

Satz 5.11 *Es seien X ein komplexer Banachraum und $T \in L(X)$. Dann gilt*

1. $r(T) = \max\limits_{z\in\sigma(T)} |z|$.
2. *Ist $X \neq \{0\}$, so ist $\sigma(T) \neq \varnothing$.*

Beweis. 1. Wir setzen $\tau := \max_{z\in\sigma(T)} |z|$. Nach B. 5.10 ist nur $r(T) \le \tau$ zu zeigen. Für $\ell' \in L(X)'$ sei die Funktion $f = f_{\ell'} : \rho(T) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \langle R(z), \ell'\rangle \qquad (z \in \rho(T)).$$

Dann gilt für $a \in \rho(T)$ und $|z-a| < 1/\|R(a)\|$

$$f(z) = \Big\langle \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(z-a)^j\big(R(a)\big)^{j+1}, \ell'\Big\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(z-a)^j\Big\langle\big(R(a)\big)^{j+1}, \ell'\Big\rangle.$$

Also ist f analytisch in $\rho(T)$. Außerdem gilt

$$f(z) = \Big\langle \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{j+1}}\, T^j, \ell\Big\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{j+1}} \langle T^j, \ell'\rangle, \tag{5.3}$$

zunächst für $|z| > r(T)$, aber dann aufgrund der Tatsache, dass f analytisch in $\rho(T)$ ist, auch in $|z| > \tau$ (siehe Funktionentheorie). Ist $s > \tau$, so ergibt sich für $\ell' \in B_{L(X)'}$ aus der Cauchyschen Ungleichung (wieder Funktionentheorie)

$$\big|\langle T^n, \ell'\rangle\big| \le s^{n+1}\max_{|z|=s}|f(z)| \le s^{n+1}\max_{|z|=s}\|R(z)\| \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

[17] Ehrlicherweise muss man sagen, dass der Beweis einige Blackboxen aus der Funktionentheorie enthält.

Nach B. 3.4.3 ist damit $\|T^n\| \leq s^{n+1} \max_{|z|=s} \|R(z)\|$, also $r(T) = \limsup \|T^n\|^{1/n} \leq s$. Da $s > \tau$ beliebig war, gilt $r(T) \leq \tau$
2. Aus (5.3) folgt insbesondere $f(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Ist $\sigma(T) = \varnothing$, also $\rho(T) = \mathbb{C}$, so ist $f = f_{\ell'}$ für alle ℓ' beschränkt und analytisch in $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Liouville (siehe Funktionentheorie) ist $\langle R, \ell' \rangle = f = 0$. Da $\ell' \in L(X)'$ beliebig war, ist $R = 0$ nach S. 3.4.3. Insbesondere ist dann $0 = -R(0) = T^{-1}$. Dies impliziert $X = \{0\}$. $\square$

Bemerkung 5.12 Ist X ein komplexer Banachraum und ist $T \in L(X)$, so kann das Punktspektrum $\sigma_p(T)$ leer sein: Ist etwa V der Volterra-Operator aus B. 5.6, also $V \in L(C[0,1])$ mit $(Vf)(t) := \int_0^t f$, so ist $r(V) = 0$ ([Ü]) und damit $\sigma(T) = \{0\}$ nach S. 5.11 (oder auch nach B. 5.6 und B. 5.10). Da $0 \notin \sigma_p(T)$ gilt, ist $\sigma_p(T) = \emptyset$.

6 (Selbst-)adjungierte Operatoren

Wir wollen nun eine wichtige Klasse von Operatoren auf Hilberträumen untersuchen.

Bemerkung und Definition 6.1 Es seien X, Y unitäre Räume und T ein Operator von X nach Y. Ist T **dicht definiert**, also $D(T) \subset X$ dicht, so setzen wir

$$D(T^*) := \{y \in Y : \exists\, u \in X : \langle \cdot, y\rangle \circ T = \langle \cdot, u\rangle|_{D(T)}\}.$$

Man beachte: Da $D(T) \subset X$ dicht ist und da $u \mapsto \langle \cdot, u\rangle \in X'$ nach S. 3.6 (Rieszscher Darstellungssatz) injektiv ist, existiert für alle y höchstens ein solches $u \in X$. Dies zeigt, dass durch

$$T^*(y) := u \qquad \big(y \in D(T^*)\big)$$

eine Abbildung $T^* : D(T^*) \to X$ definiert ist. T^* heißt **Adjungierte** von T. Nach Definition gilt damit

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \qquad (x \in D(T),\, y \in D(T^*)). \tag{6.1}$$

Außerdem ist T^* linear, also ein Operator von Y nach X. Ist X ein Hilbertraum, so gilt

$$D(T^*) = \{y \in Y : \langle \cdot, y\rangle \circ T \in D(T)'\}.$$

Denn: Nach S. 3.3 existiert ein $x' \in X'$ mit $\langle \cdot, y\rangle \circ T = x'|_{D(T)}$ und dann wieder nach S. 3.6 ein $u \in X$ mit $x' = \langle \cdot, u\rangle$.

Satz 6.2 *Es seien X, Y unitäre Räume und T ein dicht definierter Operator von X nach Y. Dann gilt*

1. *T^* ist abgeschlossen,*
2. $\mathrm{Bild}(T)^\perp = \mathrm{Kern}(T^*)$.[18]

Beweis. 1. Es sei (y_n) eine Folge in $D(T^*)$ mit $y_n \to y$ und $T^*y_n \to u \in X$. Dann gilt für alle $x \in D(T)$

$$\langle Tx, y\rangle \leftarrow \langle Tx, y_n\rangle = \langle x, T^*y_n\rangle \to \langle x, u\rangle \qquad (n \to \infty),$$

also ist $y \in D(T^*)$, und es gilt $T^*y = u$.
2. Es sei $y \in Y$. Dann ist $y \in \mathrm{Bild}(T)^\perp$ genau dann, wenn $\langle Tx, y\rangle = 0$ für alle $x \in D(T)$, also $\langle \cdot, y\rangle \circ T = 0$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $y \in D(T^*)$ und $T^*y = 0$, also mit $y \in \mathrm{Kern}(T^*)$. □

[18] Sind X ein unitärer Raum und $M \subset X$, so schreiben wir $M^\perp := \{x \in X : x \perp M\}$.

Bemerkung 6.3 Es seien X, Y Hilberträume. Ist $T \in L(X,Y)$, so gilt $D(T^*) = Y$. Außerdem ist dann $T^* \in L(Y,X)$ und die Abbildung $L(X,Y) \ni T \mapsto T^* \in L(Y,X)$ antilinear und isometrisch.

> Denn: Mit S. 3.4.3 und S. 3.6 gilt
>
> $$\sup_{x\in B_X} \|Tx\| = \sup_{x\in B_X} \sup_{y\in B_Y} \big|\langle Tx, y\rangle\big| = \sup_{y\in B_Y} \sup_{x\in B_X} \big|\langle T^*y, x\rangle\big| = \sup_{y\in B_Y} \|T^*\|.$$
>
> Damit ist $T^* \in L(Y,X)$ mit $\|T\| = \|T^*\|$. Aus der Definition ergibt sich $(T+S)^* = T^* + S^*$ und $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ für $T, S \in L(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und damit die Antilinearität von $T \mapsto T^*$, also auch die Isometrie.

Ist Z ein weiterer Hilbertraum und sind $T \in L(X,Y)$ sowie $S \in L(Y,Z)$, so gilt ([Ü])

$$(ST)^* = T^* S^*.$$

Definition 6.4 Es seien X, Y lineare Räume und T, S Operatoren von X nach Y. Wir schreiben $T \subset S$, falls $D(T) \subset D(S)$ und $S|_{D(T)} = T$ (also $G(T) \subset G(S)$) gilt. Sind $X = Y$ unitär und ist T dicht definiert, so heißt T

1. **symmetrisch**, falls $T \subset T^*$.
2. **selbstadjungiert**, falls $T = T^*$.

Bemerkung 6.5 Jeder selbstadjungierte Operator ist symmetrisch, die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht ([Ü]). Ist $D(T) = X$, so ist natürlich T genau dann symmetrisch, wenn T selbstadjungiert ist, und in diesem Fall ist $T = T^*$ abgeschlossen nach S. 6.2. Ist X ein Hilbertraum, so ist also jeder symmetrische Operator $T : X \to X$ nach dem Graphensatz stetig!

Satz 6.6 *Es seien X ein unitärer Raum und T ein dicht definierter Operator in X. Dann sind äquivalent:*

a) T ist symmetrisch,

b) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ für alle $x, y \in D(T)$,

und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

c) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in D(T)$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Aus $D(T) \subset D(T^*)$ folgt für alle $x \in D(T)$ und $y \in D(T) \subset D(T^*)$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

b) $\Rightarrow$ a): Ist $y \in D(T)$, so gilt $\langle \cdot, y\rangle \circ T = \langle \cdot, Ty\rangle|_{D(T)}$ nach Voraussetzung. Also ist $y \in D(T^*)$ mit $T^*y = Ty$. Da $y \in D(T)$ beliebig war, folgt $D(T) \subset D(T^*)$ und $T^*|_{D(T)} = T$.

Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
b) $\Rightarrow$ c): Für alle $x \in D(T)$ ist $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$, also $\langle Tx, x\rangle$ reell.
c) $\Rightarrow$ b): Es seien $x, y \in D(T)$. Dann gilt

$$\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle Tx, x\rangle - \langle Ty, y\rangle \in \mathbb{R}$$

also $\mathrm{Im}\langle Tx, y\rangle = -\mathrm{Im}\langle Ty, x\rangle = \mathrm{Im}\langle x, Ty\rangle$. Mit ix statt x ergibt sich

$$\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle = \mathrm{Im}(i\langle Tx, y\rangle) = \mathrm{Im}\langle T(ix), y\rangle = \mathrm{Im}\langle ix, Ty\rangle = \mathrm{Im}(i\langle x, Ty\rangle) = \mathrm{Re}\langle x, Ty\rangle.$$

Damit ist $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$. $\square$

Satz 6.7 *Es seien X ein unitärer Raum und T ein symmetrischer Operator in X. Dann gilt*

1. $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ *und* $(\lambda I - T)^{-1} : \mathrm{Bild}(\lambda I - T) \to X$ *ist stetig für alle* $\lambda \notin \mathbb{R}$.
2. *Sind* $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ *und* $\lambda \neq \mu$, *so gilt* $\mathrm{Kern}(\lambda I - T) \perp \mathrm{Kern}(\mu I - T)$.

Beweis. 1. Ohne Einschränkung sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Normaldarstellung $\alpha + i\beta$. Nach S .6.6 gilt $\mathrm{Re}(i\beta\langle x, Tx\rangle) = 0$ für $x \in D(T)$, also

$$\big\|(\lambda I - T)x\big\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle \alpha x, Tx\rangle + \|Tx\|^2 = \big\|(\alpha I - T)x\big\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2.$$

Ist $\beta \neq 0$, so ist damit $\lambda I - T$ injektiv und $(\lambda I - T)^{-1}$ stetig.
2. Es gilt für $x \in \mathrm{Kern}(\lambda I - T)$ und $y \in \mathrm{Kern}(\mu I - T)$ mit 1.

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$$

also $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$. Aus $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Für selbstadjungierte Operatoren lässt sich S. 6.7 wesentlich verschärfen.

Satz 6.8 *Es seien X ein (komplexer) Hilbertraum und T ein selbstadjungierter Operator in X. Dann gilt*

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R}.$$

Beweis. Es sei $\lambda \notin \mathbb{R}$. Nach S. 6.7 ist $\lambda I - T$ injektiv und $(\lambda I - T)^{-1}$ stetig. Nach S. 6.2 ist $T (= T^*)$ abgeschlossen, also mit S. 5.7 auch $(\lambda I - T)^{-1}$. Hieraus folgt, dass $\mathrm{Bild}(\lambda I - T) = D\big((\lambda I - T)^{-1}\big)$ abgeschlossen ist ([Ü]). Weiter gilt

$$(\lambda I - T)^* = (\lambda I)^* - T^* = \overline{\lambda} I - T,$$

also mit S. 6.2

$$\mathrm{Bild}(\lambda I - T)^{\perp} = \mathrm{Kern}\big((\lambda I - T)^*\big) = \mathrm{Kern}(\overline{\lambda} I - T) = \{0\}.$$

Mit B. 3.4.2 und S. 3.6 folgt, dass $\mathrm{Bild}(\lambda I - T)$ dicht in X ist. Also ist $\mathrm{Bild}(\lambda I - T) = X$ und damit $\lambda \in \rho(T)$ nach S. 5.7. $\square$

Beispiel 6.9 (Multiplikationsoperatoren) Es seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Wir setzen $D(T_\varphi) := \big\{f \in L_2(\mu) : f\varphi \in L_2(\mu)\big\}$ und betrachten den Operator $T_\varphi : L_2(\mu) \supset D(T_\varphi) \to L_2(\mu)$ mit

$$T_\varphi f := \varphi f \qquad \big(f \in D(T_\varphi)\big).$$

Man kann zeigen[19], dass $D(T_\varphi)$ dicht in $L_2(\mu)$, also T_φ dicht definiert ist. Für *reellwertige* φ ist T symmetrisch, da für alle $f, g \in D(T_\varphi)$

$$\langle T_\varphi f, g\rangle = \int \varphi f \cdot \overline{g}\, d\mu = \int f \cdot \overline{\varphi g}\, d\mu = \langle f, T_\varphi g\rangle$$

gilt. Man kann zeigen, dass T tatsächlich sogar selbstadjungiert ist.[20] Nach S. 6.8 ist also $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Genauer gilt hier (auch für komplexwertige φ):[21] $\sigma(T_\varphi)$ ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass $\varphi^{-1}\big(U_\varepsilon(\lambda)\big)$ für alle $\varepsilon > 0$ positives Maß hat, und für $\lambda \in \rho(T)$ gilt $R(\lambda) = (\lambda I - T_\varphi)^{-1} = T_\psi$ mit $\psi = 1/(\lambda - \varphi)$.

Wir untersuchen jetzt speziell stetige bzw. kompakte Operatoren.

Satz 6.10 *Es seien X ein Hilbertraum und $T : X \to X$ symmetrisch. Dann gilt*

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \big|\langle Tx, x\rangle\big| \quad \big(= \sup_{\|x\|=1} \big|\langle Tx, x\rangle\big|\big).$$

Beweis. Man beachte zunächst, dass T nach B. 6.5 stetig ist.
$\geq$: Ist $x \in B_X$, so gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichnug

$$\big|\langle Tx, x\rangle\big| \leq \|Tx\|\,\|x\| \leq \|T\|\,\|x\|^2 \leq \|T\|.$$

$\leq$: Mit $d := \sup_{x \in B_X} \big|\langle Tx, x\rangle\big|$ ist $|\langle Tu, u\rangle| \leq d\|u\|^2$ für beliebige $u \in X$. Sind $x, y \in B_X$, so folgt

$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 2\langle Tx, y\rangle + 2\langle Ty, x\rangle = 4\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle,$$

also mit Dreiecksungleichung und Parallelogrammidentität

$$4\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle \leq d\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) = 2d\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \leq 4d\,.$$

Ist γ mit $|\gamma| = 1$ so, dass $\big|\langle Tx, y\rangle\big| = \gamma\,\langle Tx, y\rangle$, so ergibt sich mit $\gamma x \in B_X$

$$\big|\langle Tx, y\rangle\big| = \langle T(\gamma x), y\rangle \;=\; \mathrm{Re}\langle T(\gamma x), y\rangle \leq d.$$

Nach B. 3.4.3 und S. 3.6 ist $\|Tx\| = \sup_{y \in B_X} \big|\langle Tx, y\rangle\big| \leq d$ für $x \in B_X$. □

In B. 5.10 haben wir bemerkt, dass für stetige Operatoren stets $\sigma(T) \subset r(T)B_{\mathbb{K}}$ gilt. Wir zeigen für *kompakte* symmetrische Operatoren:

[19] Im Wesentlichen mithilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz
[20] Siehe etwa D. Werner, Funktionalanalysis 7. Aufl., Springer, 2011, S. 348.
[21] ebda, S. 355

Satz 6.11 *Es seien $X \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und $T \in K(X)$ symmetrisch. Dann existiert ein Eigenwert $\lambda \in \big\{\pm \|T\|\big\}$, also ist*

$$\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma_p(T)} |\lambda| \ \big(= r(T)\big).$$

Beweis. Nach S. 6.10 existiert eine Folge (x_n) mit $\|x_n\| = 1$ und $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \to \|T\|$ für $n \to \infty$. Da $\langle Tx_n, x_n\rangle$ reell ist, existieren ein $\lambda \in \big\{\pm \|T\|\big\}$ und eine Teilfolge $(x_n)_{n\in J}$ mit

$$\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda \qquad (J \ni n \to \infty),$$

also

$$\|(\lambda I - T)x_n\|^2 = \lambda^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \|Tx_n\|^2 \le 2\|T\|^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$$

für $J \ni n \to \infty$. Da T kompakt ist, existieren eine Teilfolge $(x_n)_{n\in I}$ von $(x_n)_{n\in J}$ und ein $y \in X$ mit $Tx_n \to y$ für $I \ni n \to \infty$, also

$$\lambda x_n = (\lambda I - T)x_n + Tx_n \to y \quad (n \to \infty, n \in I).$$

Ohne Einschränkung sei $T \neq 0$ und damit $\lambda \neq 0$. Dann gilt $x_n \to \lambda^{-1}y$, also auch $Tx_n \to \lambda^{-1}Ty$ für $I \ni n \to \infty$. Folglich ist $y = \lambda^{-1}Ty$. Aus $\|x_n\| = 1$ ergibt sich $\|\lambda^{-1}y\| = 1$, also $y \neq 0$. Dies zeigt $\lambda \in \sigma_p(T)$. □

Beispiel 6.12 (Fredholm-Operatoren) Für $k \in C([a,b]^2)$ ist durch

$$(T_k f)(s) := \int_a^b f(t)k(s,t)dt \qquad \big(s \in [a,b],\ f \in L_2[a,b]\big)$$

ein kompakter Operator $T_k : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ definiert.

> Denn: Aufgrund der Hölder-Ungleichung ist die Einbettungsabbildung $j_1 : \big(L_2[a,b], \|\cdot\|_2\big) \to \big(L_1[a,b], \|\cdot\|_1\big)$ mit $j_1(f) := f$ stetig. Außerdem ist die Einbettungsabbildung $j_2 : \big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(L_2[a,b], \|\cdot\|_2\big)$ mit $j_2(f) := f$ stetig. Ist T wie in B. 4.9, so ist $T_k = j_2 \circ T \circ j_1$ kompakt nach S. 4.11.

Weiter gilt für $f, g \in L_2[a,b]$ mit $k^*(t,s) := \overline{k(s,t)}$ nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\langle T_k f, g\rangle &= \int_a^b \Big(\int_a^b f(t)k(s,t)\,dt\Big)\,\overline{g}(s)\,ds \\
&= \int_a^b f(t)\Big(\int_a^b \overline{k^*(t,s)}\,\overline{g}(s)\,ds\Big)\,dt \\
&= \int_a^b f(t)\cdot\overline{(T_{k^*}g)}\,(t)\,dt = \langle f, T_{k^*}g\rangle.
\end{aligned}$$

Folglich ist $T_k^* = T_{k^*}$ und insbesondere T_k im Fall $k = k^*$ symmetrisch. Nach S. 6.11 ist dann

$$\sigma_p(T) \cap \{\pm \|T_k\|\} \neq \varnothing.$$

Bemerkung und Definition 6.13 Es seien X, Y normierte Räume und $T \in L(X,Y)$. Ist $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ summierbar in X, so ist aufgrund der Stetigkeit von T die Familie $(Tx_\alpha)_{\alpha\in I}$ summierbar in Y mit $T\big(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha\big) = \sum_{\alpha\in I} Tx_\alpha$ ([Ü]).
Sind V ein weiterer normierter Raum und $(S_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie linearer Abbildungen $S_\alpha : V \to X$, so sagen wir (S_α) sei **punktweise summierbar**, falls $(S_\alpha v)$ für alle $v \in V$ summierbar ist. Dann ist $S : V \to X$ mit $Sv := \sum_{\alpha\in I} S_\alpha v$ linear und $TS = \sum_{\alpha\in I} TS_\alpha$.

Bemerkung 6.14 Es seien X ein unitärer Raum und $M \subset X$ ein Orthonormalsystem.
1. Ist (μ_e) eine Familie in $\mathbb{K}$ mit $\sum_{e\in M} \mu_e e = 0$, so gilt für alle $e \in M$

$$0 = \langle \sum_{f\in M} \mu_f f, e\rangle = \sum_{e\in M} \mu_f \langle f, e\rangle = \mu_e.$$

2. Ist der Abschluss L des Spanns von M ein Hilbertraum, so gilt $P_L x = \sum_{e\in M} \widehat{x}_e \cdot e$ für $x \in X$.

Denn: Da M Orthonormalbasis von L ist, gilt $P_L x = \sum_{e\in M} \widehat{P_L x}_e \cdot e$ für $x \in X$ nach S. 1.21. Außerdem ist wegen $P_L x - x \in L^\perp$

$$\widehat{P_L x}_e = \langle P_L x, e\rangle = \langle P_L x - x, e\rangle + \langle x, e\rangle = \langle x, e\rangle = \widehat{x}_e.$$

Mit $P_e := P_{\mathrm{span\{e\}}}$, also $P_e x = \widehat{x}_e e$ für $x \in X$, gilt $P_L = \sum_{e\in M} P_e$ punktweise und

$$\langle P_e x, y\rangle = \widehat{x}_e \langle e, y\rangle = \widehat{x}_e, \overline{\widehat{y}_e} = \langle x, e\rangle \overline{\widehat{y}_e} = \langle x, P_e y\rangle \quad (x, y \in X),$$

also $P_e^* = P_e$. Damit ist auch $P_L^* = P_L$. Sind X ein Hilbertraum und M eine Orthonormalbasis, so gilt zudem $I = P_X = \sum_{e\in M} P_e$ nach S. 1.21.

Satz 6.15 *Es seien X ein Hilbertraum, $M \subset X$ ein Orthonormalsystem und $(\lambda_e)_{e\in M}$ eine beschränkte Familie in $\mathbb{K}$.*

1. *$(\lambda_e P_e)$ ist punktweise summierbar und $T := \sum_{e\in M} \lambda_e P_e \in L(X)$ mit $\|T\| = \sup_{e\in M} |\lambda_e|$. Ist $\lambda_e \in \mathbb{R}$ für alle $e \in M$, so ist T zusätzlich symmetrisch.*

2. *Ist M eine Orthonormalbasis, so gilt $\sigma_p(T) = \{\lambda_e : e \in M\}$ und*

$$R(\lambda) = \sum_{e\in M} (\lambda - \lambda_e)^{-1} P_e$$

für $\lambda \notin \overline{\sigma_p(T)}$, also insbesondere $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)}$.

Beweis. 1. Wir setzen $s := \sup_{e\in M} |\lambda_e|$. Nach dem Satz von Pythagoras und der Bessel-Ungleichung gilt für alle endlichen Mengen $F \subset M$ mit $T_F := \sum\limits_{e\in F} \lambda_e P_e$ und für alle $x \in X$

$$\|T_F x\|^2 = \Big\|\sum_{e\in F} \lambda_e \widehat{x}_e e\Big\|^2 = \sum_{e\in F} |\lambda_e \widehat{x}_e|^2 \le \max_{e\in F} |\lambda_e|^2 \cdot \sum_{e\in F} |\widehat{x}_e|^2 \le \begin{cases} \max\limits_{e\in F} |\lambda_e|^2 \cdot \|x\|^2 \\ s^2 \sum\limits_{e\in F} |\widehat{x}_e|^2 \end{cases}.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $\|T_F\| \le \max_{e\in F} |\lambda_e| \le s$ und aus der zweiten mit dem Cauchy-Kriterium die Summierbarkeit von $(\lambda_e P_e x)_e$ für alle $x \in X$.
Sind $x \in B_X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $F = F_{\varepsilon,x} \subset M$ endlich mit $\|Tx - T_F x\| < \varepsilon$, also $\|Tx\| \le \|Tx - T_F x\| + \|T_F x\| < s + \varepsilon$. Folglich ist $T \in L(X)$ mit $\|T\| \le s$. Aus $Te = \lambda_e e$ folgt $\|T\| \ge s$.
Ist λ_e reell für $e \in M$, so gilt

$$T_F^* = \sum_{e\in F} \lambda_e P_e^* = \sum_{e\in F} \lambda_e P_e = T_F$$

für alle endlichen $F \subset M$ und damit auch $T = T^*$.
2. Für $e \in M$ ist $Te = \lambda_e e$, also $\lambda_e \in \sigma_p(T)$. Umgekehrt sei $\lambda \notin \{\lambda_e : e \in M\}$ und $x \in X$ mit

$$0 = (\lambda I - T)x = \sum_{e\in M} (\lambda - \lambda_e)\, \widehat{x}_e e\,.$$

Nach B. 6.14.1. ist $(\lambda - \lambda_e)\widehat{x}_e = 0$, also $\widehat{x}_e = 0$, für alle $e \in M$. Dies impliziert $x = 0$, also $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Ist $\lambda \notin \overline{\sigma_p(T)}$, so gilt

$$\operatorname{dist}(\lambda, \{\lambda_e : e \in M\}) > 0$$

und damit ist $((\lambda - \lambda_e)^{-1})_{e\in M}$ beschränkt in $\mathbb{K}$. Nach 1. existiert $S := \sum\limits_{e\in M} (\lambda - \lambda_e)^{-1} P_e$ und es gilt

$$(\lambda I - T)Sy = \sum_{e\in M} (\lambda - \lambda_e)^{-1} (\lambda I - T) P_e y = \sum_{e\in M} P_e y = y \quad (y \in X).$$

Damit ist $\lambda I - T$ auch surjektiv, also $\lambda \in \rho(T)$ nach S. 5.7 und $R(\lambda) = S$. □

Bemerkung 6.16 Es seien X ein Hilbertraum und M eine Orthonormalbasis in X. Ist (λ_e) eine abklingende Familie[22] in $\mathbb{K}$, so ist $(\lambda_e P_e)$ summierbar in $K(X)$ ([Ü]), also insbesondere

$$T = \sum_{e\in M} \lambda_e P_e \in K(X).$$

Nach S. 6.15 ist $\sigma_p(T) = \{\lambda_e : e \in M\}$ und $\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}$. Ist $\dim(X) = \infty$, so gilt für $T \in K(X)$ stets $0 \in \sigma(T)$ ([Ü]). Also ist dann

$$\sigma(T) = \{\lambda_e : e \in M\} \cup \{0\}.$$

[22] Wir sagen, $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ sei abklingend, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $F_\varepsilon \subset I$ existiert mit $\|x_\alpha\| < \varepsilon$ für $\alpha \in I \setminus F_\varepsilon$.

7 Spektralzerlegung kompakter Operatoren auf Hilberträumen

Aus der linearen Algebra ist bekannt: Ist X ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und ist $T : X \to X$ ein selbstadjungierter Operator, so existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren (Hauptachsentransformation). Wir wollen ein entsprechendes Ergebnis für Hilberträume X und symmetrische Operatoren $T \in K(X)$ beweisen. Wir wissen bereits, dass das Spektrum kompakt (S. 5.9) und reell (S. 6.8) ist. Außerdem ist im unendlich-dimensionalen Fall stets $0 \in \sigma(T)$. Genauer gilt:

Satz 7.1 (Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren) *Es seien $X \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und $T \in K(X)$ symmetrisch. Dann existieren eine Orthonormalbasis M von X und eine abklingende Familie $(\lambda_e)_{e\in M}$ in $\mathbb{R}$ so, dass in $K(X)$*

$$T = \sum_{e\in M} \lambda_e P_e.$$

Beweis. Es reicht zu zu zeigen, dass $Te = \lambda_e e$ für alle $e \in M$ gilt: Nach B. 6.16 ist $(\lambda_e P_e)_e$ summierbar in $K(X)$. Da M eine Orthonormalbasis und damit $\operatorname{span}(M)$ dicht in X ist, stimmen die linearen und stetigen Funktionen T und $\sum\limits_{e\in M} \lambda_e P_e$ dann überein.
Nach S. 6.11 existiert ein Eigenwert $\mu_1 \in \mathbb{R}$ mit $|\mu_1| = \|T\|$. Es sei e_1 so, dass $\|e_1\| = 1$ und

$$Te_1 = \mu_1 e_1.$$

Ist $X_1 := \{e_1\}^\perp$, so ist X_1 abgeschlossener Teilraum von X. Ist $X_1 = \{0\}$, so sind wir fertig. Ist $X_1 \neq \{0\}$ und ist $x \in X_1$, so gilt

$$\langle Tx, e_1\rangle = \langle x, Te_1\rangle = \mu_1\langle x, e_1\rangle = 0,$$

also auch $Tx \in X_1$. Damit ist $T(X_1) \subset X_1$ und $T_1 := T|_{X_1} \in K(X_1)$ symmetrisch.
Nun verfahren wir wie oben mit T_1 statt T. Ist μ_2 Eigenwert von T_1 mit $|\mu_2| = \|T_1\|$ und ist $e_2 \in X_1$ so, dass $\|e_2\| = 1$ und $Te_2 = \mu_2 e_2$, so ist mit $X_2 := \{e_1, e_2\}^\perp$ entweder $X_2 = \{0\}$ und wir sind fertig, oder der Operator $T_2 := T_1|_{X_2} \in K(X_2)$ symmetrisch. So fortfahrend erhält man: Entweder existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $X_n = \{0\}$ (dies ist der Fall $\dim(X) < \infty$), oder es ist $X_n \neq \{0\}$ für alle n. Im ersten Fall ist nichts mehr zu zeigen. Wir betrachten also den zweiten (und damit $\dim(X) = \infty$). Hier erhalten wir eine Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ so, dass $(|\mu_j|)$ fallend ist, und ein Orthonormalsystem $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ mit $Te_j = \mu_j e_j$ für $j \in \mathbb{N}$. Wir zeigen: $\mu_j \to 0$ $(j \to \infty)$. Denn, angenommen, nicht. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|\mu_j| \geq \delta$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Da T kompakt ist, besitzt $(Te_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Dies widerspricht aber

$$\|Te_j - Te_k\|^2 = \|\mu_j e_j - \mu_k e_k\|^2 = \mu_j^2 + \mu_k^2 \geq 2\delta^2 \quad (j, k \in \mathbb{N}, j \neq k).$$

Nach S. 1.25 lässt sich $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ zu einer Orthonormalbasis M von X erweitern (falls nötig). Mit $\lambda_{e_j} := \mu_j$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\lambda_e := 0$ für $e \in M \setminus \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ gilt dann $Te = \lambda_e e$

für alle $e \in M$, denn für $e \in M \setminus \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ ist $e \in \{e_1, \ldots, e_n\}^\perp = D(T_n)$, also

$$\|Te\| = \|T_n e\| \leq \|T_n\| = |\mu_n| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

und folglich $Te = 0$. Damit haben wir in allen Fällen eine Orthonormalbasis M von X und eine abklingende Familie $(\lambda_e)_{e \in M}$ gefunden mit $Te = \lambda_e e$ für $e \in M$. □

Bemerkung 7.2 1. Nach B. 6.16 ist in der Situation von S. 7.1

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_e : e \in M\}$$

und im Falle $\dim(X) = \infty$

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}.$$

Außerdem gilt dabei $\dim(\mathrm{Kern}(\lambda_e I - T)) < \infty$ für $\lambda_e \neq 0$. Da (λ_e) abklingend ist, ist $\{e \in M : \lambda_e \neq 0\}$ abzählbar ([Ü]). Also ist in der Situation von S. 7.1 stets

$$M_0 := \{e \in M : \lambda_e \neq 0\}$$

abzählbar. Setzt man $L = \mathrm{span}(M_0)$, so gilt $T|_{L^\perp} = 0$, und L ist separabel, d. h. T „lebt" stets auf einem separablen Teilraum von X. Ist T injektiv, so ist $M_0 = M$, also notwendig X separabel.

2. Die Orthonormalbasis M in S. 7.1 ist durch T im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. So ist etwa schon im Falle $T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ jede Orthonormalbasis $\{e_1, e_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ geeignet, wenn man $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = 1$ wählt. Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ gilt aber mit $M_\lambda := \{e \in M : \lambda_e = \lambda\}$

$$\sum_{e \in M_\lambda} P_e = P_{\mathrm{Kern}(\lambda I - T)}.$$

Definiert man (mit $\sum\limits_{\varnothing} := 0$) die operatorwertige Funktion $E = E_T : \mathbb{R} \to L(X)$ durch

$$E(\lambda) := E_T(\lambda) := \sum_{e \in M_\lambda} P_e = P_{\mathrm{Kern}(\lambda I - T)},$$

so gilt $\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} E(\lambda) = I$, $E(\lambda)E(\mu) = E(\lambda)\delta_{\lambda,\mu}$ sowie

$$T = \sum_{e \in M} \lambda_e P_e = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda \sum_{e \in M_\lambda} P_e = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda E(\lambda) = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda E(\lambda).$$

Diese Darstellung, die **Spektralzerlegung** von T, ist eindeutig in folgendem Sinne: Ist $T = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda P_{L(\lambda)}$, wobei $L(\lambda)$ abgeschlossene Teilräume von X sind mit $P_{L(\lambda)} P_{L(\mu)} = P_{L(\lambda)} \delta_{\lambda,\mu}$ und $\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} P_{L(\lambda)} = I$, so folgt $L(\lambda) = \mathrm{Kern}(\lambda I - T)$, also $P_{L(\lambda)} = E(\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Denn: $\subset$: Ist $x \in L(\lambda)$, so ist $x = P_{L(\lambda)} x$, also

$$Tx = \sum_{\mu \in \mathbb{R}} \mu P_{L(\mu)} P_{L(\lambda)} x = \lambda P_{L(\lambda)} x = \lambda x.$$

$\supset$: Ist $x \in \operatorname{Kern}(\lambda I - T)$, also $0 = (\lambda I - T)x = \sum\limits_{\nu \in \mathbb{R}} (\lambda - \nu) P_{L(\nu)} x$, so folgt für alle $\mu \in \mathbb{R}$:

$$0 = P_{L(\mu)}(\lambda I - T)x = \sum_{\nu \in \mathbb{R}} (\lambda - \nu) P_{L(\mu)} P_{L(\nu)} x = (\lambda - \mu) P_{L(\mu)} x,$$

also $P_{L(\mu)} x = 0$ für $\mu \neq \lambda$. Damit folgt wiederum $x = \sum\limits_{\mu \in \mathbb{R}} P_{L(\mu)} x = P_{L(\lambda)} x$, also $x \in L(\lambda)$.

Beispiel 7.3 Es seien $k \in C([a,b]^2)$ mit $k = k^*$ und $T = T_k$ der Fredholm-Operator aus B. 6.12. Dann existiert nach S. 7.1 (abzählbare) Orthonormalbasis M von $L_2[a,b]$ und eine abklingende Familie $(\lambda_e)_{e \in M} \in \mathbb{R}^M$ mit

$$T = \sum_{e \in M} \lambda_e P_e \,\Big(= \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda \, E(\lambda) \Big).$$

Dabei ist

$$\sigma(T) = \{\lambda_e : e \in M\} \cup \{0\},$$

Also ist $\lambda I - T : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ für alle $\lambda \notin \{\lambda_e : e \in M\} \cup \{0\}$ bijektiv und damit für alle solchen λ die **Fredholm-Gleichung zweiter Art**

$$(\lambda I - T) f = g$$

für alle $g \in L_2[a,b]$ eindeutig lösbar. Außerdem gilt nach S. 6.15

$$f = (\lambda I - T)^{-1} g = R(\lambda) g = \sum_{e \in M} (\lambda - \lambda_e)^{-1} \widehat{g}_e \cdot e.$$

Für $\lambda = 0$ (**Fredholm-Gleichung erster Art**) ist die Gleichung nicht für alle $g \in L_2[a,b]$ lösbar, da T kompakt und damit nach dem Satz von der offenen Abbildung nicht surjektiv ist.

Wir wollen nun eine Zerlegung für allgemeine kompakte Operatoren erarbeiten.

Definition 7.4 Sind X ein unitärer Raum und T ein symmetrischer Operator in X, so heißt T **positiv**, falls $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ für $x \in D(T)$ gilt. In diesem Fall ist $\sigma_p(T) \subset [0, \infty)$.

Satz 7.5 *Es seien X ein Hilbertraum und $T \in K(X)$ positiv. Dann existiert genau ein positiver Operator $S \in K(X)$ mit $S^2 = T$. Man schreibt $S := T^{1/2}$.*

Beweis. Nach S. 7.1 existieren eine Orthonormalbasis M von X und eine abklingende Familie $(\lambda_e)_{e \in M}$ mit $\lambda_e \geq 0$ und $T = \sum\limits_{e \in M} \lambda_e P_e$ in $K(X)$. Damit existiert nach B. 6.16 auch

$$S := \sum_{e \in M} \sqrt{\lambda_e}\, P_e = \sum_{\lambda > 0} \sqrt{\lambda} E_T(\lambda)$$

in $K(X)$. Wegen $\langle Sx, x\rangle = \sum\limits_{e\in M} \sqrt{\lambda_e}|\widehat{x}_e|^2 \geq 0$ ist S positiv und es gilt

$$S^2 = \Big(\sum_{\lambda>0} \sqrt{\lambda}E_T(\lambda)\Big)\Big(\sum_{\nu>0} \sqrt{\nu}E_T(\nu)\Big) = \sum_{\lambda>0}\sum_{\nu>0} \sqrt{\lambda}\sqrt{\nu}\, E_T(\lambda)\, E_T(\nu) = \sum_{\lambda>0} \lambda E_T(\lambda) = T.$$

Ist $U \in K(X)$ positiv mit $T = U^2$, so gilt nach B. 7.2.2

$$U = \sum_{\mu>0} \mu\, E_U(\mu) = \sum_{\lambda>0} \sqrt{\lambda}\, E_U(\sqrt{\lambda}),$$

also

$$\sum_{\lambda>0} \lambda\, E_T(\lambda) = T = U^2 = \sum_{\lambda>0}\sum_{\nu>0} \sqrt{\lambda}\sqrt{\nu}\, E_U(\sqrt{\lambda})\, E_U(\sqrt{\nu}) = \sum_{\lambda>0} \lambda\, E_U(\sqrt{\lambda})$$

Nach B. 7.2.2 ist damit $E_U(\sqrt{\lambda}) = E_T(\lambda)$ für $\lambda > 0$, also $U = S$. □

Bemerkung und Definition 7.6 Es seien X, Y Hilberträume und $T \in L(X,Y)$. Aus $(T^*)^* = T$ folgt, dass $T^*T \in L(X)$ selbstadjungiert ist. Außerdem ist T^*T positiv wegen $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geq 0$. Ist T kompakt, so ist auch T^*T kompakt. Wir setzen in diesem Fall

$$|T| := (T^*T)^{1/2}.$$

Nach S. 7.1 existieren eine Orthonormalbasis M von X und eine abklingende Familie $(\mu_e)_{e\in M}$ nichtnegativer Zahlen, so dass mit $M_+ := \{e \in M : \mu_e > 0\}$

$$|T| = \sum_{e\in M} \mu_e P_e = \sum_{e\in M_+} \mu_e P_e.$$

Die Zahlen μ_e, wobei $e \in M_+$, heißen **Singulärwerte** von T. Es gilt dabei für $x \in X$ wegen $|T| = |T|^*$

$$\big\||T| \cdot x\big\|^2 = \langle |T|x, |T|x\rangle = \langle x, |T|^2x\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Kern}\big(|T|\big) = \mathrm{Kern}(T)$ und damit T injektiv genau dann, wenn $|T|$ injektiv ist.

Satz 7.7 (Polarzerlegung) *Es seien X, Y Hilberträume und $T \in K(X,Y)$. Dann existiert genau ein Operator $U \in L(X,Y)$ mit*

$$T = U|T|$$

und so, dass $U|_{\mathrm{Kern}(T)^\perp}$ isometrisch ist und $U|_{\mathrm{Kern}(T)} = 0$ gilt.

Beweis. Wir setzen für $u \in L := \mathrm{Bild}\big(|T|\big)$ und $x \in |T|^{-1}(\{u\})$

$$Su := S(|T|x) := Tx.$$

Man beachte: Ist $|T|x_1 = u = |T|x_2$, so ist $|T|(x_1 - x_2) = 0$, also auch $T(x_1 - x_2) = 0$ und damit $Tx_1 = Tx_2$. Damit ist $S : L \to Y$ (wohl-)definiert und linear mit $S|T| = T$. Außerdem ist

$$\|Su\| = \|Tx\| = \big\||T|x\big\| = \|u\| \qquad \big(u \in L\big),$$

also S isometrisch und damit (gleichmäßig) stetig. Folglich lässt sich S eindeutig auf den Abschluss von L zu einem dann ebenfalls isometrischen Operator $S : \overline{L} \to Y$ fortsetzen. Wir setzen

$$U := SP_{\overline{L}} \in L(X, Y).$$

Dann ist $U|T| = S|T| = T$. Nach B. 7.6 und S. 6.2 ist außerdem

$$\operatorname{Kern}(T) = \operatorname{Kern}\big(|T|\big) = \operatorname{Kern}\big(|T|^*\big) = L^\perp$$

und damit $U|_{\operatorname{Kern}(T)} = U|_{L^\perp} = 0$ sowie $U|_{(\operatorname{Kern}(T))^\perp} = U|_{L^{\perp\perp}} = U|_{\overline{L}} = S$. Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, dass notwendig $U|_L = S$ gelten muss. $\square$

Damit erhalten wir schließlich für allgemeine kompakte Operatoren:

Bemerkung 7.8 (Singulärwertzerlegung) Es seien X und Y Hilberträume. Ist $T \in K(X, Y)$ und sind μ_e für $e \in M_+$ die Singulärwerte von T wie in B. 7.6 sowie U wie in S. 7.7, so gilt

$$T = U|T| = U\Big(\sum_{e \in M_+} \mu_e P_e\Big) = \sum_{e \in M_+} \mu_e U P_e$$

in $K(X, Y)$. Damit ergibt sich für alle $x \in X$

$$Tx = \sum_{e \in M_+} \mu_e U \widehat{x}_e e = \sum_{e \in M_+} \mu_e \widehat{x}_e U e,$$

wobei $\{Ue : e \in M_+\}$ ein Orthonormalsystem in Y ist ([Ü]).

Da $\sum\limits_{e \in F} \mu_e U P_e$ für jede endliche Teilmenge F von M_+ endlichdimensionales Bild hat, ergibt sich insbesondere, dass $K(X, Y)$ der Abschluss des Unterraums der Operatoren mit endlichdimensionalem Bild in $L(X, Y)$ ist.

8 Sobolev-Räume

Wir führen in diesem Abschnitt eine Familie von Hilberträumen ein, die insbesondere im Zusammenhang mit der Lösung partieller Differenzialgleichungen eine wichtige Rolle spielt.

Bemerkung und Definition 8.1 Für $\varphi \in C(\mathbb{R}^d)$ heißt der Abschluss von $\{x : \varphi(x) \neq 0\}$ in $\mathbb{R}^d$ der **Träger**[23] von φ, geschrieben $\operatorname{supp}(\varphi)$. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, so schreiben wir weiter $M \Subset \Omega$ falls, M relativ kompakt in Ω ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $M \subset \Omega$ beschränkt ist mit $\operatorname{dist}(M, \partial\Omega) > 0$. Damit setzen wir für $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

$$C_0^m(\Omega) := \{\varphi \in C^m(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp}(\varphi) \Subset \Omega\}$$

sowie

$$\mathscr{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega).$$

Funktionen aus $\mathscr{D}(\Omega)$ nennt man auch **Testfunktionen** (auf Ω). Ist $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\rho(x) := \begin{cases} c \cdot \exp(1/(|x|^2 - 1)), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

mit $c > 0$ so, dass $\int \rho = 1$, so kann man zeigen (siehe Analysis): $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ und $\operatorname{supp}(\rho) = B := B_{\mathbb{R}^d}$. Für $h > 0$ und $a \in \mathbb{R}^d$ ist damit allgemeiner

$$\rho_{a,h} := h^{-d}\rho\big(h^{-1}(\cdot - a)\big) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$$

mit $\int \rho_{a,h} = 1$ und $\operatorname{supp}(\rho_{a,h}) = a + hB$. Insbesondere ist $\mathscr{D}(\Omega) \setminus \{0\}$ nichtleer für alle offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Wir führen nun das Konzept schwacher Ableitungen ein.

Bemerkung und Definition 8.2 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.
1. Sind $\varphi_n, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, so schreiben wir $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\Omega)$, falls ein $K \Subset \Omega$ existiert mit $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^d$ (bzw. K) für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Ein lineares Funktional $\mu \in \mathscr{D}^*(\Omega) := \mathscr{D}(\Omega)^*$ heißt eine **Distribution** auf Ω, falls für alle Folgen (φ_n) in $\mathscr{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ auch $\langle \varphi_n, \mu\rangle \to \langle \varphi, \mu\rangle$ gilt. Wir schreiben $\mathscr{D}'(\Omega)$ für den Raum aller Distributionen auf Ω.
2. Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt **lokal integrierbar** auf Ω, falls für jedes $a \in \Omega$ eine Umgebung U von a existiert mit $f \in \mathscr{L}(U)$. Lokal integrierbare Funktionen sind auf jeder kompakten Teilmenge von Ω integrierbar. Wir schreiben $\mathscr{L}_{\text{loc}}(\Omega)$ für die Menge aller auf Ω lokal integrierbaren f. Indem wir Funktionen aus $C(\Omega)$ durch 0 auf $\mathbb{R}^d$ fortsetzen, können wir $C(\Omega)$ (und damit auch $C^m(\Omega)$) als Teilmenge von $\mathscr{L}_{\text{loc}}(\Omega)$ auffassen.

[23] Englisch Support

Satz 8.3 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Für alle $f \in \mathscr{L}_{loc}(\Omega)$ ist durch*

$$\langle \varphi, f\rangle := \int \varphi \overline{f} := \int\limits_{\operatorname{supp}(\varphi)} \varphi \overline{f} \qquad \big(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)\big)$$

eine Distribution $\langle \cdot, f\rangle$ auf Ω gegeben und die Abbildung $\iota : \mathscr{L}_{loc}(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$, definiert durch $\iota(f) := \langle \cdot, f\rangle$, ist antilinear. Ist $f \in C^m(\Omega)$, so gilt für alle $|\alpha| \le m$

$$\langle \varphi, \partial^\alpha f\rangle = \int \varphi \cdot \overline{\partial^\alpha f} = (-1)^{|\alpha|} \int \partial^\alpha \varphi \cdot \overline{f} = (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha \varphi, f\rangle \tag{8.1}$$

Beweis. 1. Für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ist

$$\int |\varphi \overline{f}| = \int\limits_{\operatorname{supp}(\varphi)} |\varphi \overline{f}| \le \|\varphi\|_\infty \cdot \int\limits_{\operatorname{supp}(\varphi)} |f| < \infty.$$

Also existiert $\int \varphi \overline{f}$ und es gilt $\langle \cdot, f\rangle \in \mathscr{D}^*(\Omega)$. Ist (φ_n) in $\mathscr{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\Omega)$, so gilt für $K \Subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$

$$|\langle \varphi_n, f\rangle - \langle \varphi, f\rangle| \le \int\limits_K |\varphi_n - \varphi| \cdot |f| \le \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \cdot \int\limits_K |f| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

2. Wegen $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial_d^{\alpha_d}$ reicht es, zu zeigen: Ist $f \in C^1(\Omega)$, so gilt

$$\int \varphi \cdot \overline{\partial_j f} = -\int \partial_j \varphi \cdot \overline{f} \qquad (j = 1, \ldots, d).$$

Ohne Einschränkung sei $j = 1$. Dann gilt wegen $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \varphi) \subset \operatorname{supp}(\varphi) \Subset \Omega$ nach dem Satz von Fubini[24] und mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int \varphi \cdot \overline{\partial_1 f} &= \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi \cdot \overline{\partial_1 f})(t,u)\, dt\, du \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big((\varphi \cdot \overline{f})(t,u)\Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}} (\partial_1 \varphi \cdot \overline{f})(t,u) dt \Big)\, du = -\int \partial_1 \varphi \cdot \overline{f}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung und Definition 8.4 Ist $\mu \in \mathscr{D}'(\Omega)$, so ist für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ durch

$$\langle \varphi, D^\alpha \mu\rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha \varphi, \mu\rangle \qquad \big(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)\big) \tag{8.2}$$

eine Distribution $D^\alpha \mu = D^\alpha_\Omega \mu$ auf Ω definiert.

[24]Siehe Maßtheorie oder https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Fubini.

> Denn: Klar ist, dass $D^\alpha\mu \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ gilt. Ist (φ_n) in $\mathscr{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\Omega)$, so gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ auch $\partial^\alpha\varphi_n \to \partial^\alpha\varphi$ in $\mathscr{D}(\Omega)$. Also erhält man
>
> $$\langle\varphi_n, D^\alpha\mu\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle\partial^\alpha\varphi_n, \mu\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle\partial^\alpha\varphi, \mu\rangle = \langle\varphi, D^\alpha\mu\rangle.$$

Für $k = 1, \dots, d$ setzen wir $D_k\mu := D^{e^{(k)}}\mu$. Ist $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, so schreibt man kurz $D^\alpha f := D^\alpha\iota(f) \in \mathscr{D}'(\Omega)$[25] und nennt $D^\alpha f$ eine **schwache Ableitung** von f. Im Falle $f \in C^m(\Omega)$ ist $D^\alpha f = D^\alpha\iota(f) = \iota(\partial^\alpha f) = \langle\cdot, \partial^\alpha f\rangle$ für $|\alpha| \le m$ nach S. 8.3.

Beispiel 8.5 Es seien $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $f = |\cdot|$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathscr{D}(I)$

$$\begin{aligned}
\langle\varphi, \mathrm{sign}\rangle &= \int \varphi\cdot\mathrm{sign} = \int_0^b \varphi\cdot 1 - \int_a^0 \varphi\cdot 1 \\
&= t\varphi(t)\Big|_0^b - \int_0^b t\varphi'(t)\,dt - \Big(t\varphi(t)\Big|_a^0 - \int_a^0 t\varphi'(t)\,dx\Big) \\
&= -\int_a^b |t|\varphi'(t)\,dt = -\langle\varphi', f\rangle.
\end{aligned}$$

Also ist $D^1 f = D^1\iota(f) = \langle\cdot, \mathrm{sign}\rangle$. Weiter gilt $D^2 f = 2\cdot\delta_0$, wobei $\delta_0\varphi := \varphi(0)$ für $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ([Ü]).

Bemerkung und Definition 8.6 Für $p \in (1, \infty)$ ist $\mathscr{L}_p(\Omega) \subset \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ nach der Hölder-Ungleichung. Natürlich ist $f \in \mathscr{L}_p(\Omega)$ durch $\iota(f) = \langle\cdot, f\rangle$ nicht eindeutig bestimmt. Anders sieht es aus, wenn man $L_p(\Omega)$ betrachtet.[26] Man kann zeigen[27], dass $\mathscr{D}(\Omega)$ für $q \in (1, \infty)$ dicht in $L_q(\Omega)$ ist. Damit ist die Abbildung $\iota : L_p(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ mit $\iota(f) = \langle\cdot, f\rangle$ (antilinear und) injektiv.

> Denn: Ist $\iota(f) = \langle\cdot, f\rangle = 0$, so gilt $\int \varphi\overline{f} = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Da $\mathscr{D}(\Omega)$ dicht in $L_q(\Omega)$ ist, folgt $\int g\overline{f} = 0$ für alle $g \in L_q(\Omega)$ und damit $f = 0$ nach B. 3.8.

Daher macht es Sinn, f und $\iota(f)$ für $f \in L_p(\Omega)$ zu identifizieren und in dieser Weise $L_p(\Omega)$ als Teilraum von $\mathscr{D}'(\Omega)$ aufzufassen. Ist $f \in C^m(\Omega)$ und α mit $|\alpha| \le m$ so, dass $\partial^\alpha f \in L_p(\Omega)$, so ist $D^\alpha f = \partial^\alpha f$ in diesem Sinne, d. h. die klassische und die schwache Ableitung stimmen überein. Man verwendet daher Schreibweisen wie $\partial_k f = D_k f$ und damit $\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_d f)$ und $\Delta f = \sum\limits_{j=1}^d \partial_j^2 f$ auch in dieser allgemeineren Situation.

[25] Man beachte: $D^\alpha f$ ist ein Funktional auf $\mathscr{D}(\Omega)$, aber nicht punktweise definiert auf Ω.

[26] Zur Erinnerung: Auch die Elemente f von $L_p(\Omega)$ sind keine punktweise definierten Funktionen, sondern Äquivalenzklassen in $\mathscr{L}_p(\Omega)$.

[27] Im Wesentlichen mithilfe geeigneter Faltungen; siehe etwa R. A. Adams, J. J. F. Fournier, Sobolev Spaces, Thm 2.29. Stichworte in dem Zusammenhang: Mollifier, approximative Eins.

Bemerkung und Definition 8.7 Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$H^k(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) : D^\alpha f \in L_2(\Omega) \text{ für } |\alpha| \le k\}$$

Sobolev-Raum der Ordnung k. Durch

$$\langle f, g\rangle := \langle f, g\rangle_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le k} \langle D^\alpha f, D^\alpha g\rangle_{L_2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha f \cdot \overline{D^\alpha g}$$

für $f, g \in H^k(\Omega)$ ist ein Skalarprodukt auf $H^k(\Omega)$ definiert. Im Fall $k = 1$ gilt mit $a{\cdot}b := a^\top b$ für $a, b \in \mathbb{C}^d$

$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g} \; + \sum_{j=1}^d \int_\Omega \partial_j f\, \overline{\partial_j g} = \int_\Omega f\overline{g} \; + \int_\Omega \nabla f \cdot \overline{\nabla g}.$$

Satz 8.8 *$(H^k(\Omega), \langle\cdot, \cdot\cdot\rangle)$ ist ein Hilbertraum.*

Beweis. Es sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $H^k(\Omega)$. Wegen

$$\|f\|^2_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|^2_{L_2(\Omega)} \qquad \big(f \in H^k(\Omega)\big)$$

ist $(D^\alpha f_n)$ für alle $|\alpha| \le k$ eine Cauchy-Folge in $L_2(\Omega)$. Also existieren $g_\alpha \in L_2(\Omega)$ mit

$$\|D^\alpha f_n - g_\alpha\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \qquad (n \to \infty,\ |\alpha| \le k).$$

Wir setzen $f := g_0$. Für alle $|\alpha| \le k$ und $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ gilt dann mit $\langle\cdot, \cdot\cdot\rangle = \langle\cdot, \cdot\cdot\rangle_{L_2(\Omega)}$

$$\langle\varphi, g_\alpha\rangle \leftarrow \langle\varphi, D^\alpha f_n\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle\partial^\alpha\varphi, f_n\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle\partial^\alpha\varphi, f\rangle = \langle\varphi, D^\alpha f\rangle \quad (n \to \infty).$$

Folglich ist $g_\alpha = D^\alpha f$, also $f \in H^k(\Omega)$, und es gilt $\|f_n - f\|_{H^k(\Omega)} \to 0$ für $n \to \infty$. Damit ist $(H^k(\Omega), \|\cdot\|_{H^k(\Omega)})$ vollständig. □

Bemerkung und Definition 8.9 Für $k \in \mathbb{N}_0$ schreibt man $H^k_0(\Omega)$ für den Abschluss von $\mathscr{D}(\Omega)$ in $H^k(\Omega)$. Als abgeschlossener Teilraum ist $(H^k_0(\Omega), \langle\cdot, \cdot\cdot\rangle)$ auch ein Hilbertraum.

Satz 8.10 (Poincaré-Ungleichung) *Es sei $\Omega \subset (-c, c) \times \mathbb{R}^{d-1}$ offen. Dann gilt für alle $f \in H^1_0(\Omega)$*

$$\int_\Omega |f|^2 \le 4c^2 \int_\Omega |\partial_1 f|^2 \;\Big(\le 4c^2 \int_\Omega |\nabla f|^2\Big).$$

Beweis. Ist $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, so gilt mit partieller Integration für $u \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$0 \le \int_\mathbb{R} 1(\varphi\overline{\varphi})(t, u)\, dt = \int_\mathbb{R} (-t) 2\,\mathrm{Re}(\varphi\partial_1\overline{\varphi})(t, u)\, dt \le 2c \int_\mathbb{R} |\varphi\partial_1\varphi|(t, u)\, dt\,.$$

Aus der Hölder-Ungleichung folgt

$$\int |\varphi|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi \cdot \overline{\varphi})(t,u)\,dt\,du \le 2c \int |\varphi \partial_1 \varphi| \le 2c\Big(\int |\varphi|^2\Big)^{1/2}\Big(\int |\partial_1\varphi|^2\Big)^{1/2}$$

und damit

$$\Big(\int |\varphi|^2\Big)^{1/2} \le 2c\Big(\int |\partial_1\varphi|^2\Big)^{1/2}.$$

Ist $f \in H_0^1(\Omega)$ beliebig, so existiert eine Folge (φ_n) in $\mathscr{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \to f$ in $H^1(\Omega)$. Dann gilt auch

$$\int |\varphi_n|^2 \to \int\limits_\Omega |f|^2 \qquad \text{und} \qquad \int |\partial_1\varphi_n| \to \int\limits_\Omega |\partial_1 f|.$$

Also folgt

$$\Big(\int\limits_\Omega |f|^2\Big)^{1/2} \le 2c\Big(\int\limits_\Omega |\partial_1 f|^2\Big)^{1/2} \le 2c\Big(\int\limits_\Omega |\nabla f|^2\Big)^{1/2}.$$

□

Definition 8.11 Sind $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und gilt $X \subset Y$, so sagt man X sei stetig (bzw. kompakt) **eingebettet** in Y, falls $j : X \to Y$ mit $j(x) = x$ stetig (bzw. kompakt) ist. Wir schreiben im Falle stetiger Einbettung auch kurz $X \hookrightarrow Y$.

Bemerkung und Definition 8.12 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Nach S. 8.10 folgt aus $0 = \int |\nabla f|^2$ auch $\int |f|^2 = 0$ und damit $f = 0$. Also ist durch

$$\langle f, g\rangle_{H_0^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \nabla f \cdot \overline{\nabla g}$$

ebenfalls ein Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$ definiert. Wir schreiben $\|f\|_{H_0^1(\Omega)}$ für die induzierte Norm, also $\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = (\int |\nabla f|^2)^{1/2}$. Nach S. 8.10 gilt (etwa mit $c := \sup_{x\in\Omega} |x|$) für $f \in H_0^1(\Omega)$

$$\|f\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int\limits_\Omega |f|^2 + \int\limits_\Omega |\nabla f|^2 \le (4c^2+1)\int\limits_\Omega |\nabla f|^2$$

und damit

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|f\|_{H^1(\Omega)} \le (4c^2+1)^{1/2}\|f\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Also sind $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}|_{H_0^1(\Omega)}$ äquivalent. Nach B./D. 8.9 ist damit auch $\big(H_0^1(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0^1(\Omega)}\big)$ ein Hilbertraum und außerdem $\mathscr{D}(\Omega)$ dicht in $\big(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}\big)$. Da $\big(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\big)$ stetig eingebettet ist in $L_2(\Omega)$, ist auch $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)})$ stetig eingebettet in $L_2(\Omega)$.

Der folgende Satz ist von zentraler Bedeutung:

Satz 8.13 (Rellich) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann ist $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)})$ kompakt eingebettet in $L_2(\Omega)$.*

Beweis. 1. Wir zeigen: Ist $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$, so ist durch

$$(Tf)(x) := (T_g f)(x) := (g * f)(x) := \int_\Omega g(x-y)f(y)\,dy \qquad \big(x \in \overline{\Omega}, f \in L_1(\Omega)\big)$$

ein kompakter Operator $T = T_g : (L_1(\Omega), \|\cdot\|_1) \to (C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ definiert.

Denn: Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von g ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit

$$\big|g(x-y) - g(x'-y)\big| < \varepsilon \qquad \big(|x-x'| < \delta_\varepsilon, y \in \mathbb{R}^d\big).$$

Damit folgt für $f \in L_1(\Omega)$ und $x, x' \in \overline{\Omega}$ mit $|x-x'| < \delta_\varepsilon$

$$\big|Tf(x) - Tf(x')\big| \leq \int_\Omega \big|g(x-y) - g(x'-y)\big|\big|f(y)\big|\,dy \leq \varepsilon\|f\|_1.$$

Also ist $Tf \in C(\overline{\Omega})$ und $T(B_{L_1(\Omega)}) \subset C(\overline{\Omega})$ gleichgradig stetig. Weiter gilt für $f \in L_1(\Omega)$ und $x \in \overline{\Omega}$

$$\big|Tf(x)\big| \leq \|g\|_\infty \int_\Omega \big|f(y)\big|\,dy = \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$$

Damit ist $T(B_{L_1(\Omega)})$ auch beschränkt in $C(\overline{\Omega})$. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist T_g kompakt.

Weiter ist $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)})$ nach B./D. 8.12 stetig eingebettet in $L_2(\Omega)$ und $L_2(\Omega)$ nach der Hölder-Ungleichung in $L_1(\Omega)$. Zudem ist $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ stetig eingebettet in $L_2(\Omega)$. Nach S. 4.11 ist T_g als Operator von $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1})$ nach $L_2(\Omega)$ kompakt.

2. Es seien $T_h := T_{\rho_{0,h}}$ mit $\rho_{0,h}$ wie in B./D. 8.1 und $B := B_{\mathbb{R}^d}$. Dann gilt für $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ und $x \in \Omega$ mit $y = h^{-1}(x-u)$ nach der mehrdimensionalen Substitutionsregel[28]

$$(T_h\varphi)(x) = \frac{1}{h^d}\int \rho\Big(\frac{x-u}{h}\Big)\,\varphi(u)du = \int_B \rho(y)\varphi(x-hy)\,dy.$$

Ist $j : H_0^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$ mit $j(f) := f$ die Einbettungsabbildung, so folgt mit $\int \rho = 1$

$$\|(j - T_h)\varphi\|_2^2 = \|\varphi - T_h\varphi\|_2^2 = \int_\Omega \Big|\int_B \rho(y)\big(\varphi(x) - \varphi(x-hy)\big)dy\Big|^2\,dx$$

[28] Siehe Maßtheorie oder https://de.wikipedia.org/wiki/Transformationssatz.

und mit Hölder- (bzw. Cauchy-Schwarzscher) Ungleichung und $V := \lambda_d(B) = \int_B 1$ für $x \in \mathbb{R}^d$

$$\Big| \int\limits_B 1 \cdot \rho(y)\big(\varphi(x) - \varphi(x-hy)\big)dy\Big|^2 \leq V \int\limits_B \rho^2(y)\big|\varphi(x) - \varphi(x-hy)\big|^2 dy.$$

Weiter gilt nach Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung für $x \in \mathbb{R}$, $y \in B$

$$|\varphi(x) - \varphi(x-hy)| = h\Big| \int\limits_0^1 \nabla\varphi(x-thy)\cdot y\,dt\Big| \leq h \int\limits_0^1 |\nabla\varphi(x-thy|\,dt$$

Also ergibt sich, wieder mit der Hölder-Ungleichung und mit dem Satz von Fubini,

$$\begin{aligned} \|\varphi - T_h\varphi\|_2^2 &\leq Vh^2 \int \int\limits_B \rho^2(y)\Big(\int\limits_0^1 1\cdot|\nabla\varphi(x-thy)|\,dt\Big)^2 dy\,dx \\ &\leq Vh^2 \int \int\limits_B \rho^2(y)\Big(\int\limits_0^1 \big|\nabla\varphi(x-thy)\big|^2 dt\Big)\,dy\,dx \\ &\leq Vh^2 \int\limits_B \rho^2(y) \int\limits_0^1 \Big(\int \big|\nabla\varphi(x-thy)\big|^2 dx\Big)\,dt\,dy \\ &= Vh^2 \int\limits_B \rho^2(y) \int \big|\nabla\varphi(u)\big|^2 du\,dy = Vh^2\,\|\rho\|_2^2\,\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

und damit $\big\|(j-T_h)|_{\mathscr{D}(\Omega)}\big\| \leq \sqrt{V}\|\rho\|_2 \cdot h$. Da $\mathscr{D}(\Omega)$ dicht in $\big(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}\big)$ ist, folgt

$$\|j - T_h\| = \big\|(j-T_h)|_{\mathscr{D}(\Omega)}\big\| \leq \sqrt{V}\|\rho\|_2 \cdot h \to 0 \quad (h \to 0^+).$$

Da T_h für alle $h > 0$ nach 1. kompakt ist, ist nach S. 4.10.2 auch j kompakt. □

Bemerkung 8.14 Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in H_0^1(\Omega)$, so gilt $f \cdot 1_\Omega \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ([Ü]). Man sagt, Ω habe die **Segment-Eigenschaft**, falls für jedes $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung U von x und ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ so existieren, dass für alle $y \in U \cap \overline{\Omega}$ die Stecke $y + (0,1)\mathbf{v}$ in Ω liegt. Hat Ω die Segment-Eigenschaft, so ist $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $H^1(\Omega)$ und es gilt[29]

$$H_0^1(\Omega) = \big\{f \in H^1(\Omega) : f \cdot 1_\Omega \in H^1(\mathbb{R}^d)\big\}.$$

[29] Siehe etwa R. A. Adams, J. J. F. Fournier, Sobolev Spaces, Thm 3.22 und Thm 5.29.

9 Eigenfunktionen des Laplace-Operators

In S. 5.3 hatten wir gesehen, wie Lösbarkeit der Wärmeleitungs-, der Schrödinger- und der Wellengleichung über Trennung der Variablen mit der Existenz von Eigenfunktionen des Laplace-Operators zusammenhängt. Wir betrachten für offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ den Laplace-Operator

$$\Delta := \sum_{k=1}^{d} D_k^2 : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega).$$

Bemerkung 9.1 Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, so ist die Einbettungsabbildung $j : (H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}) \to L_2(\Omega)$ nach dem Satz von Rellich (S. 8.13) kompakt. Wir wollen $j^* : L_2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ besser verstehen. Dazu seien $f \in L_2(\Omega)$ und $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, f \rangle &= \int \varphi \overline{f} = \langle j\varphi, f \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \varphi, j^* f \rangle_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \int\limits_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \overline{\nabla(j^* f)} = \sum_{k=1}^{d} \int\limits_{\Omega} \partial_k \varphi \, \overline{\partial_k (j^* f)} = -\sum_{k=1}^{d} \langle \varphi, D_k^2 (j^* f) \rangle.
\end{aligned}$$

Also ist $f = -\sum\limits_{k=1}^{d} D_k^2 (j^* f) = -\Delta(j^* f)$ und damit $-\Delta$ linksinvers zu j^*.

Satz 9.2 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann existieren eine abzählbare Orthonormalbasis M von $H_0^1(\Omega)$ und ein abklingende Familie $(\mu_e)_{e \in M}$ positiver Zahlen mit*

$$\Delta e = -\mu_e^{-2} e \quad (e \in M).$$

Beweis. Da $j : H_0^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$ kompakt und injektiv ist, ist nach B./D. 7.6 auch $|j| = (j^* j)^{1/2} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ kompakt und injektiv. Außerdem ist $|j|$ positiv und damit existieren (vgl. wieder B./D. 7.6) nach dem Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren und B. 7.2 eine abzählbare Orthonormalbasis M von $H_0^1(\Omega)$ und eine abklingende Familie $(\mu_e)_{e \in M}$ positiver Zahlen mit

$$|j| = \sum_{e \in M} \mu_e P_e$$

in $K\big(H_0^1(\Omega)\big)$. Dabei sind die μ_e sind die Singulärwerte von j. Nach B. 9.1 ergibt sich für alle $e \in M$ (mit $f = je$)

$$e = je = -\Delta(j^* je) = -\Delta(|j|^2 e) = -\Delta(\mu_e^2 e) = -\mu_e^2 \Delta e,$$

also $\Delta e = -\mu_e^{-2} e$. $\square$

Insbesondere haben wir für beschränkte Ω die Existenz einer Orthonormalbasis M von

$H_0^1(\Omega)$ aus (schwachen) Eigenfunktionen des Laplace-Operators nachgewiesen. Für die Eigenwerte gilt

$$0 > -1/\mu_e^2 \to -\infty$$

in dem Sinne, dass für alle $R > 0$ eine endliche Menge $F_R \subset M$ existiert mit $\mu_e < -R$ für alle $e \notin F_R$. Da M abzählbar ist, kann $M =: \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ so angeordnet werden, dass die Folge $(\mu_n)_n$ mit $\mu_n := \mu_{e_n}$ und damit auch $(-1/\mu_n^2)_n$ monoton fallend ist. Nach S. 5.3 kann jede Eigenfunktion $w = e_n$ durch Multiplikation mit den jeweils passenden $v(t)$ zu einer (schwachen) Lösung der Wärmeleitungs-, der Schrödinger- bzw. der Wellengleichung ergänzt werden.

Beispiel 9.3 1. Es seien $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$f_n := \sin(n\,\cdot) \in C^\infty(\Omega).$$

Nach B./D. 8.6 ist $f_n \in H^m(\Omega)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $D^2 f_n = f_n'' = -n^2 f_n$. Wegen $\sin(k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $f_n \cdot 1_\Omega \in H^1(\mathbb{R})$ ([Ü]) und damit $f_n \in H_0^1(\Omega)$ nach B./D. 8.14. Weiter ist durch $\{f_n/\|f_n\|_2 : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $L_2(\Omega)$ gegeben.

Denn: Wegen $\sin(k\pi) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$ folgt mit partieller Integration

$$n^2 \int_0^\pi f_n f_j = -\int_0^\pi f_n'' f_j = -\int_0^\pi f_n f_j'' = j^2 \int_0^\pi f_n f_j$$

und damit $f_n \perp f_j$ für $n \neq j$. Also ist $\{f_n/\|f_n\|_2 : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Für $g \in L_2(-\pi, \pi)$ ist nach B. 1.22 mit

$$a_k := \widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt}\, dt$$

weiterhin $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(ik\,\cdot)$ in $L_2(-\pi, \pi)$. Ist $f \in L_2(\Omega)$, so setzen wir

$$g(t) := \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ -f(-t), & t < 0 \end{cases}.$$

Dann ist $g \in L_2(-\pi, \pi)$ ungerade und damit $a_{-k} = -a_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$, also (mit $a_0 = 0$)

$$g = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \big(\exp(ik\,\cdot) - \exp(-ik\,\cdot) \big) = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2ia_k \, \sin(k\,\cdot)$$

in $L_2(-\pi, \pi)$ und damit auch $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2ia_k \, \sin(k\,\cdot)$ in $L_2(\Omega)$. Insbesondere ist $\operatorname{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $L_2(\Omega)$.

Damit ist $\{e_n := f_n/\|f_n\|_{H_0^1(\Omega)} : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $H_0^1(\Omega)$ ([Ü]). Außerdem gilt mit $\mu_n := 1/n$
$$\Delta e_n = e_n'' = -n^2 e_n = -\mu_n^{-2} e_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Also haben wir eine Orthonormalbasis von $H_0^1(\Omega)$ aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators Δ wie in S. 9.2 gefunden.
2. Es seien $d = 2$, $\Omega = (0,\pi)^2$ und für jedes $(k,m) \in \mathbb{N}^2$
$$f_{k,m}(x,y) := \sin(kx)\,\sin(my) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$
Auch hier gilt $f_{k,m} \cdot 1_\Omega \in H^1(\mathbb{R}^2)$ und damit $f_{k,m} \in H_0^1(\Omega)$. Mit $\mu_{k,m} := 1/\sqrt{k^2+m^2}$ ist
$$\Delta f_{k,m} = -(k^2+m^2) f_{k,m} = -\mu_{k,m}^{-2}\, f_{k,m} \qquad (k, m \in \mathbb{N}).$$
Aus 1. und dem Satz von Fubini ergibt sich, dass $\{f_{k,m}/\|f_{k,m}\|_2 : k, m \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $L_2(\Omega)$ ist. Wieder nach ([Ü]) ist durch $\{e_{k,m} := f_{k,m}/\|f_{k,m}\|_{H_0^1(\Omega)} : k, m \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $H_0^1(\Omega)$ gegeben. Also haben wir auch hier eine Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators wie in S. 9.2 gefunden.

A Maße und Integrale

Definition A.1 Es sei $\Omega \neq \varnothing$ eine Menge.
1. Ist $\Sigma \subset \mathrm{Pot}(\Omega)$, so heißt Σ eine **σ-Algebra** (in Ω), falls gilt

(σ1) $\varnothing \in \Sigma$.

(σ2) Mit $A \in \Sigma$ ist auch $\Omega \setminus A \in \Sigma$.

(σ3) Ist N abzählbar und $(A_n)_{n\in N}$ eine Familie in Σ, so ist $\bigcup_{n\in N} A_n \in \Sigma$.

Das Paar (Ω, Σ) nennt man einen **Messraum**.
2. Ist Σ eine σ-Algebra, so heißt eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ **Maß** (auf Σ), falls

(M1) $\mu(\varnothing) = 0$.

(M2) Ist N abzählbar und $(A_n)_{n\in N}$ eine Familie paarweiser disjunkter Mengen in Σ, so ist mit $\infty + x = \infty$ für $x \in [0, \infty]$

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in N} A_n\Big) = \sum_{n\in N} \mu(A_n) \quad \Big(:= \sup_{F\subset N \text{ endlich}} \sum_{n\in F} \mu(A_n)\Big).$$

In diesem Fall nennt man (Ω, Σ, μ) einen **Maßraum**. Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so heißt μ **endlich** und im Falle $\mu(\Omega) = 1$ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**.
3. Ist μ ein Maß auf Σ, so heißt $A \in \Sigma$ eine (μ-)**Nullmenge**, falls $\mu(A) = 0$ ist. Gilt eine Eigenschaft für alle $x \in \Omega$ bis auf eine Nullmenge, so sagt man, die Eigenschaft gilt (μ-)**fast überall**.

Beispiel A.2 1. Ist $\Omega \neq \varnothing$, so definiert

$$\mu(A) := \#A \qquad \big(A \in \mathrm{Pot}(\Omega)\big)$$

ein Maß auf $\mathrm{Pot}(\Omega)$. Man nennt μ das **Zählmaß** auf Ω. Dabei ist μ endlich genau dann, wenn Ω endlich ist. Außerdem ist in diesem Falle $P := \mu(\Omega)^{-1}\mu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (genannt **Laplace-Verteilung** auf Ω).
2. Ist (S, d) ein metrischer Raum, so heißt die kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält, die **Borel-σ-Algebra** bezüglich (S, d). Wir schreiben dafür $\mathscr{B}(S, d)$ (oder $\mathscr{B}(d)$ oder $\mathscr{B}(S)$). Ist speziell $(S, d) = (\mathbb{R}^m, |\cdot|)$, so existiert genau ein Maß $\lambda = \lambda_m$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ mit

$$\lambda\big([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]\big) = (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m)$$

für alle Rechtecke $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$. Man nennt λ_m das m-dimensionale **Lebesgue-Maß**.

Definition A.3 Es sei (Ω, Σ) ein Messraum. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so heißt f **messbar**, falls $f^{-1}(U) \in \Sigma$ für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ gilt. Weiter heißt f **einfach** (bzw. **Elementarfunktion**), falls f messbar und $f(\Omega)$ endlich ist.

Satz A.4 *Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, so existiert eine Folge (φ_n) einfacher Funktionen mit $\varphi_n \to f$ punktweise auf Ω und $|\varphi_n| \leq |f|$.*

Bemerkung und Definition A.5 Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.
1. Ist φ einfach mit $\varphi \geq 0$ oder $\mu(\varphi \neq 0) < \infty$, so setzen wir mit $0 \cdot \infty := 0$

$$\int \varphi \, d\mu := \int \varphi(\omega) \, d\mu(\omega) := \sum_{\alpha \in \varphi(\Omega)} \alpha \cdot \mu(\varphi = \alpha) \begin{cases} \in [0, \infty], & \text{falls } \varphi \geq 0 \\ \in \mathbb{C}, & \text{falls } \mu(\varphi \neq 0) < \infty \end{cases} .$$

2. Ist g messbar und $g \geq 0$, so setzen wir

$$\int g \, d\mu := \sup \Big\{ \int \varphi \, d\mu : \varphi \text{ einfach}, 0 \leq \varphi \leq f \Big\} \in [0, \infty] \, .$$

3. Ist f messbar, so heißt f (μ-)**integrierbar**, falls $\int |f| \, d\mu < \infty$ gilt. Wir setzen

$$\mathscr{L}(\mu) := \mathscr{L}_1(\mu) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ integrierbar} \}.$$

Damit ist durch

$$T_\mu f := \int f \, d\mu := \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, d\mu \in \mathbb{C} \, ,$$

wobei (φ_n) eine beliebige Folge wie in Satz A.4 ist, eine lineare Abbildung $T_\mu : \mathscr{L}(\mu) \to \mathbb{C}$ (wohl-)definiert mit

$$\Big| \int f \, d\mu \Big| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Mann nennt $\int f \, d\mu$ das (μ)-**Integral** von f.
4. Ist $M \in \Sigma$, so ist mit f auch $1_M f \in \mathscr{L}(\mu)$. Man schreibt dann auch

$$\int_M f \, d\mu := \int f \, d(1_M \mu) = \int f 1_M \, d\mu \, .$$

Die Schreibweise verwendet man auch im Fall messbarer Funktionen $f \geq 0$.

Bemerkung A.6 Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.
1. Ist $M \in \Sigma$, so sind durch

$$\Sigma \cap M := \{ A \cap M : A \in \Sigma \} = \{ B \in \Sigma : B \subset M \}$$

eine σ-Algebra in M und durch $\mu_M := \mu|_{\Sigma \cap M}$ ein Maß μ_M auf $\Sigma \cap M$ definiert. Für $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und Regelfunktionen f auf $[a, b]$ gilt damit

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f_0 \, d\lambda = \int f_0 \, d(1_{[a,b]} \lambda) = \int f \, d\lambda_{[a,b]},$$

wobei f_0 die durch 0 auf $\mathbb{R}$ erweiterte Funktion bezeichnet.

2. Sind $S \in \mathscr{B}(\mathbb{C})$ und $\varphi : \Omega \to S$ messbar, so ist durch

$$(\varphi_*\mu)(B) := \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) \qquad \big(B \in \mathscr{B}(\mathbb{C}) \cap S\big)$$

ein Maß $\varphi_*\mu$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{C}) \cap S$ definiert (andere Schreibweisen: μ^φ oder $\varphi(\mu)$). Das Maß $\varphi_*\mu$ heißt **Bildmaß** von μ unter φ. Es gilt damit: Ist $f : S \to \mathbb{C}$ messbar, so ist f genau dann $\varphi_*\mu$-integrierbar, wenn $f \circ \varphi$ μ-integrierbar ist und in diesem Fall ist

$$\int f \, d(\varphi_*\mu) = \int (f \circ \varphi) \, d\mu.$$

Bemerkung A.7 Es seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Wir setzen

$$\mathscr{L}_p(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ messbar}, \int |f|^p \, d\mu < \infty\}.$$

Ist $p > 1$ und $q > 1$ mit $p + q = pq$, so gilt für $f \in \mathscr{L}_p(\mu)$ und $g \in \mathscr{L}_q(\mu)$ die **Hölder-Ungleichung**

$$\int |fg| \, d\mu \leq \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int |g|^q \, d\mu\Big)^{1/q}$$

und damit die (auch für $p = 1$ gültige) **Minkowski-Ungleichung**

$$\Big(\int |f+g|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int |g|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \qquad (f, g \in \mathscr{L}_p(\mu)).$$

Ist $\int 1 \, d\mu = \mu(\Omega) < \infty$, so ergibt sich aus der Hölder-Ungleichung mit $g = 1$ insbesondere

$$\Big(\int |f| \, d\mu\Big)^p \leq \mu(\Omega)^{p/q} \int |f|^p \, d\mu.$$

Bemerkung und Definition A.8 Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $\lambda = \lambda_d$. Für $M \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ setzen wir

$$\mathscr{L}(M) := \mathscr{L}(1_M\lambda) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ messbar}, \int\limits_M |f| \, d\lambda < \infty\}.$$

Weiter schreiben wir für $f \in \mathscr{L}(M)$ kurz

$$\int\limits_M f := \int\limits_M f(x) \, dx := \int f \, d(1_M\lambda) = \int\limits_M f \, d\lambda$$

für das d-dimensionale Lebesgue-Integral auf M und noch kürzer $\int f := \int f(x) \, dx := \int_{\mathbb{R}^d} f$ im Falle $M = \mathbb{R}^d$.

Index