**Jürgen Müller**

# Fourier- und Laplace-Transformationen

Skriptum zur Vorlesung
Sommersemester 2019
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

# Contents

# 1 Fourier-Transformation auf dem Einheitskreis

Ist $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine absolut summierbare Folge[1] in $\mathbb{C}$, so konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ nach dem Weierstraß-Kriterium gleichmäßig auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $B := \{z : |z| \le 1\}$ in $\mathbb{C}$. Die Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \quad (z \in B)$$

ist damit stetig auf $B$. Außerdem ist $f$ beliebig oft differenzierbar auf der offenen Kreisscheibe $\mathbb{D} := B^\circ = \{z : |z| < 1\}$ und

$$c_k = f^{(k)}(0)/k!$$

der $k$-te Taylor-Koeffizient von $f$. Aufgrund der $2\pi i$-Periodizität der Exponentialfunktion ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt = \delta_{n,0}$$

für $n \in \mathbb{Z}$ und damit gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu-k)t}\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \delta_{\nu,k} = c_k \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Also lassen sich die Taylor-Koeffizienten auch per Integration aus $f$ berechnen. Wir schreiben $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ für den Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Ist $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine absolut summierbare (zweiseitige) Folge in $\mathbb{C}$, so ist mit gleicher Argumentation wie oben

$$f(z) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu z^\nu \left( := \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu z^\nu \right) \qquad (z \in \mathbb{S})$$

stetig auf $\mathbb{S}$ und nun für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\,dt.$$

Mit $m$ bezeichnen wir das normierte **Bogenmaß** auf $\mathbb{S}$, d. h. $2\pi m$ ist das Bildmaß von $\lambda_{[-\pi,\pi]}$ unter der Abbildung $t \mapsto e^{it}$ (siehe Anhang). Für $m$-integrierbare Funktionen $f$ gilt dann

$$\int f\,dm = \frac{1}{2\pi}\int f(e^{it})\,d\lambda_{[-\pi,\pi]}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,dt\,.$$

Weiter setzen wir $L_p(m) := L_p(\mathbb{S}, \mathscr{B}, m)$ für $p \in [1,\infty)$ (siehe wieder Anhang). Dann sind $(L_p(m), \|\cdot\|_p)$ Banachräume und für $p = 2$ ist die Norm induziert durch das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int f\overline{g}\,dm \qquad (f, g \in L_2(m)),$$

[1] Ist $I$ eine Menge und $(c_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie in $\mathbb{C}$, so sagen wir $(c_\alpha)_{\alpha\in I}$ sei absolut summierbar, falls $\sum\limits_{\alpha\in I} |c_\alpha| < \infty$ ist, wobei $\sum\limits_{\alpha\in I} x_\alpha := \sup\{\sum\limits_{\alpha\in F} x_\alpha : F \subset I \text{ endlich}\}$ für Familien $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ in $[0,\infty)$.

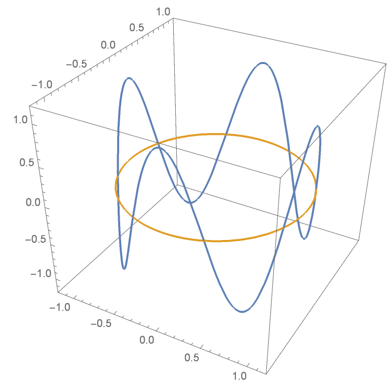


Figure 1: $\mathrm{Re}(z^4) = \cos(4t)$ mit $z = e^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

also $\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle = \int |f|^2 \, dm$ für $f \in L_2(m)$. Durch $M = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_k(z) := z^k$ für $z \in \mathbb{S}$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist ein Orthonormalsystem in $L_2(m)$ gegeben.[2]

Denn: Wegen $\overline{z} = z^{-1}$ für $z \in \mathbb{S}$ gilt für $j, k \in \mathbb{Z}$

$$\langle e_j, e_k\rangle = \int z^{j-k} \, dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt = \delta_{j,k} \,.$$

**Bemerkung und Definition 1.1** Es sei $f \in L(m) := L_1(m)$. Dann heißt für $k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{f}(k) := \int f \overline{e_k} \, dm = \int f e_{-k} \, dm = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-ikt} \, dt$$

$k$-ter **Fourier-Koeffizient** von $f$. Wegen

$$|\widehat{f}(k)| \le \int |f| \, dm = \|f\|_1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ist die Folge $\widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ beschränkt, also $\widehat{f} \in B(\mathbb{Z})$, dem (linearen) Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{Z}$. Man nennt $\widehat{f}$ die **Fourier-Transformierte** von $f$ und die Abbildung $T : L_1(m) \to B(\mathbb{Z})$, definiert durch

$$Tf := \widehat{f} \,,$$

**Fourier-Transformation** (auf $L_1(m)$). Versieht man $B(\mathbb{Z})$ mit der sup-Norm $\|\cdot\|_\infty$, so ist die Fourier-Transformation $T$ eine stetige lineare Abbildung.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt weiter $S_n f := S_n \widehat{f} := \sum\limits_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) e_\nu$, also

$$(S_n f)(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) z^\nu = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) e^{i\nu t} \quad (z = e^{it} \in \mathbb{S}),$$

[2] In Polarkoordinaten $z = e^{it}$ ist $z^k = e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$. Daher spricht man auch vom trigonometrischen System $M$.

die $n$-te **Fourier-Teilsumme** von $f$ und $(S_n f)_{n\in\mathbb{N}_0}$ **Fourier-Reihe** von $f$.
2. Ist $f \in L_2(m)$, so ist $\widehat{f}(k) = \langle f, e_k\rangle$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Außerdem folgt dann aus der Bessel-Ungleichung https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Ungleichung

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 = \int |f|^2\, dm,$$

also insbesondere die absolute Summierbarkeit von $|\widehat{f}|^2$.

**Bemerkung 1.2** 1. Ist $\widehat{f}$ absolut summierbar, so konvergiert die Fourier-Reihe $(S_n f)$ nach dem Weierstraß-Kriterium gleichmäßig auf $\mathbb{S}$.
2. Ist $f$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{S}$, so setzen wir

$$(Df)(z) := izf'(z) \qquad (z \in \mathbb{S}).$$

Ist $h(t) := f(e^{it})$ für $t \in \mathbb{R}$, so ist $h \in C^1(\mathbb{R})$ und $2\pi$-periodisch mit $h'(t) = (Df)(e^{it})$ für $t \in \mathbb{R}$. Sind $f, g$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{S}$, so gilt die partielle-Integration-Formel

$$\int (Df)g\, dm = -\int f(Dg)\, dm.$$

Mit $De_k = ik \cdot e_k$ ergibt sich

$$(Df)\widehat{\ }(k) = ik \cdot \widehat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Außerdem folgt aus der Bessel- und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung dann auch, dass $\widehat{f}$ absolut summinerbar ist ([Ü]).

**Beispiel 1.3** Wir betrachten $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(e^{it}) := t^2 \qquad \big(t \in (-\pi, \pi]\big)\ .$$

Dann ergibt sich

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \pi^2/3$$

und mit zweimaliger partieller Integration

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} e^{-ikt}\frac{2t}{k^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\frac{(-1)^k}{k^2}$$

für $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Also ist für $z = e^{it}$ die $n$-te Fourier-Teilsumme gegeben durch

$$(S_n f)(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) z^\nu = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \frac{2}{\nu^2}(z^\nu + z^{-\nu}) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu^2}\cos(\nu t).$$

Da $\widehat{f}$ absolut summierbar ist, konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig auf $\mathbb{S}$.

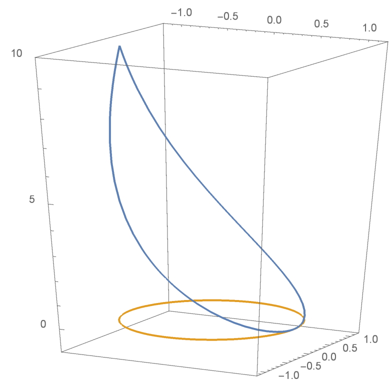


Figure 2: $f(e^{it}) = t^2$ für $t \in (-\pi, \pi]$.

Wir wenden uns in nächsten Abschnitt der Frage zu, ob $f$ durch $\widehat{f}$ bereits eindeutig festgelegt ist und wie man gegebenenfalls $f$ aus $\widehat{f}$ rekonstruieren kann. Mit anderen Worten: Wir stellen die Frage nach der Invertierbarkeit der Fourier-Transformation. Wichtig ist dabei das Konzept der Faltung von Funktionen in $L_1(m)$:

**Bemerkung und Definition 1.4** Aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ ergibt sich die Rotationsinvarianz des Bogenmaßes $m$, d. h. sind $h \in L_1(m)$ und $\zeta \in \mathbb{S}$, so gilt

$$\int h(z\overline{\zeta})\, dm(z) = \int h(z)\, dm(z).$$

Sind nun $f, g \in L_1(m)$, so folgt

$$\int\int |f(z\overline{\zeta})g(\zeta)|\, dm(z)\, dm(\zeta) = \int\int |f(z)|\, dm(z)\, |g(\zeta)|\, dm(\zeta) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Mithilfe des Satzes von Fubini[3] kann man zeigen, dass das **Faltungsintegral**

$$(f * g)(z) = \int f(z\overline{\zeta})g(\zeta)\, dm(\zeta)$$

für $m$-fast alle $z \in \mathbb{S}$ existiert. Außerdem gilt $f * g \in L_1(m)$ mit $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. Man nennt $f * g$ die **Faltung** von $f$ und $g$. Durch die Substitution $z\overline{\zeta} =: w$, also $\zeta = z\overline{w}$, ergibt sich

$$f * g = g * f \qquad (f, g \in L_1(m))$$

also die Kommutativität der Faltung.[4] Ist $f$ (oder $g$) stetig auf $\mathbb{S}$, so ist auch $f * g$ stetig auf $\mathbb{S}$ ([Ü]). Schließlich gilt

$$(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \qquad (f, g \in L_1(m)).$$

[3] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Fubinihttps://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Fubini.

[4] Man kann zeigen, dass die Faltung auch assoziativ ist. Damit wird $(L_1(m), *)$ zu einer Banachalgebra.

Denn: Für $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned}
(f * g)\widehat{\ }(k) &= \int\int f(z\overline{\zeta})g(\zeta)\, dm(\zeta)\, z^{-k}\, dm(z) \\
&= \int\int f(z\overline{\zeta})(z\overline{\zeta})^{-k}\, dm(z)\, g(\zeta)\zeta^{-k}\, dm(\zeta) \\
&= \int f(z)z^{-k}\, dm(z) \cdot \int g(\zeta)\zeta^{-k}\, dm(\zeta) = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

Wir wollen zum Abschluss die Fourier-Transformation auf (komplexe) Maße erweitern.

**Bemerkung und Definition 1.5** Es sei $(X, \Sigma)$ ein Messraum. Eine Abbildung $\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$ heißt **komplexes Maß**, falls $\mu$ $\sigma$-additiv ist, d. h. falls für jede Menge $A \in \Sigma$ und jede disjunkte (abzählbare) Zerlegung $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von $A$ in $\Sigma$ die Folge $(\mu(A_j))$ absolut summierbar ist mit

$$\mu(A) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \mu(A_j).$$

Man kann zeigen:[5] Es existieren genau ein Maß $|\mu| \geq 0$ und eine $|\mu|$-fast überall eindeutig definierte messbare Funktion $h : X \to \mathbb{S}$ (also $|h| = 1$) mit

$$\mu(A) = \int_A h\, d|\mu| \qquad (A \in \mathscr{B}(X)).$$

Dabei ist $|\mu|$ endlich, also $|\mu|(X) < \infty$. Man schreibt dann auch $\mu = h|\mu|$ und spricht in dem Fall von der Polarzerlegung von $\mu$. Für $|\mu|$-integrierbare $g : X \to \mathbb{C}$ setzt man

$$\int g\, d\mu := \int gh\, d|\mu|.$$

Dann gilt

$$|\int g\, d\mu| \leq \int |g|\, d|\mu|.$$

Ist $(X, d)$ ein kompakter metrischer Raum und $\mu$ ein komplexes Maß auf $\mathscr{B}(X)$, so ist durch

$$C(X) \ni g \mapsto \int g\, d\mu \in \mathbb{C}$$

ein stetiges lineares Funktional auf $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ gegeben. Man kann zeigen: Jedes stetige lineare Funktional auf $C(X)$ ist von dieser Form für genau ein komplexes Maß $\mu$ auf $\mathscr{B}(X)$. Dies ist die wesentliche Aussage des Rieszschen Darstellungssatzes für $C(X)$.[6] Wir identifizieren $\mu$ und das entsprechende Funktional und schreiben $C(X)'$ für die Menge der komplexen Maße auf $C(X)$.

[5] Siehe etwa W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987

[6] Ein Beweis findet sich wieder etwa in W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

**Bemerkung und Definition 1.6** Ist $\mu \in C(\mathbb{S})'$, so ist die **Fourier-Stieltjes Transformierte** $\widehat{\mu}$ von $\mu$ definiert durch

$$\widehat{\mu}(k) := \mu(\overline{e_k}) = \int \overline{e_k}\, d\mu = \int e_{-k}\, d\mu = \int z^{-k} h(z)\, d|\mu|(z) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nach Definition gilt

$$|\widehat{\mu}(k)| \leq \int d|\mu| = |\mu|(\mathbb{S}) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

und damit ist wieder $\widehat{\mu} = (\widehat{\mu}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in B(\mathbb{Z})$. Ist speziell $\mu = fm$, also

$$\int g\, d\mu = \int gf\, dm \quad (g \in C(\mathbb{S})),$$

so ist $\widehat{\mu} = \widehat{f}$. In diesem Sinne kann man die Fourier-Stieltjes Transformation als Erweiterung der Fourier-Transformation auffassen. Wir sprechen daher auch wieder kurz von der **Fourier-Transformation**.

**Bemerkung 1.7** Für $g \in C(\mathbb{S})$ definiert man

$$(g * \mu)(z) := \int g(z\overline{\zeta})\, d\mu(\zeta) \qquad (z \in \mathbb{S}).$$

Dann ist auch $g * \mu$ stetig ([Ü]). Außerdem sieht man wie in Bemerkung 1.4

$$(g * \mu)\widehat{\ } = \widehat{g} \cdot \widehat{\mu}.$$

**Beispiel 1.8** Für das Dirac-Maß $\delta_\zeta$ an der Stelle $\zeta \in \mathbb{S}$ gilt

$$\widehat{\delta_\zeta}(k) = \overline{\zeta}^k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Insbesondere ist $\widehat{\delta_1}(k) = 1$ für alle $k$. Außerdem gilt $g * \delta_1 = g$ für alle $g \in C(\mathbb{S})$.

# 2 Der Satz von Fejér und Anwendungen

Wir wollen in diesem Anschnitt die Frage nach der Darstellbarkeit integrierbarer bzw. stetiger Funktionen über die Fourier-Reihe untersuchen und dabei auch die Frage nach der Rekonstruierbarkeit von $f$ aus $\widehat{f}$ beantworten.

**Bemerkung 2.1** E seien $(X, d)$ ein kompakter metrischer Raum und $\mu$ ein endliches Maß auf $\mathscr{B}(X)$. Dann gilt für $f \in C(X)$ und $p \in [1, \infty)$

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p}\|f\|_\infty.$$

Man kann zeigen[7]: Für alle $p \in [1, \infty)$ ist die Menge der stetigen Funktionen $C(X)$ dicht in $L_p(\mu)$. Diese Aussage wird (in Varianten) im Weiteren immer wieder eingesetzt.

**Bemerkung und Definition 2.2** Wir setzen

$$\mathscr{T}_n := \operatorname{span}\{e_k : k = -n, \ldots, n\}.$$

Ist $P = \sum\limits_{\nu=-n}^{n} \lambda_\nu e_\nu \in \mathscr{T}_n$, so nennt man $P$ ein **trigonometrisches Polynom** vom Grad $\leq n$. Für $f \in L_1(m)$ und $z \in \mathbb{S}$ gilt dann

$$(f * P)(z) = (P * f)(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \lambda_\nu z^\nu \int \overline{\zeta}^\nu f(\zeta)\, dm(\zeta) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu)\lambda_\nu z^\nu$$

und damit auch $f*P \in \mathscr{T}_n$. Wir schreiben $\mathscr{T} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_n$ für die Menge der trigonometrischen Polynome (von beliebigem Grad).

**Bemerkung 2.3** Da $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem von $L_2(m)$ ist, ergibt sich aus dem Projektionssatz (siehe lineare Algebra)

$$\|f - S_n f\|_2 = \min_{P\in\mathscr{T}_n} ||f - P||_2 = \operatorname{dist}(f, \mathscr{T}_n)\ . \tag{2.1}$$

für alle $f \in L_2(m)$. Also: $S_n f \in \mathscr{T}_n$ ist die beste Approximation aus $\mathscr{T}_n$ an $f$ bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm. Insbesondere ist $f = S_n f$ genau dann, wenn $f \in \mathscr{T}_n$. Wir wollen zeigen, dass

$$||f - S_n f||_2 \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{2.2}$$

für alle Funktionen $f \in L_2(m)$ gilt, das heißt, $(S_n f)$ konvergiert *im quadratischen Mittel* gegen $f$.

Für den Nachweis von (2.2) reicht es nach (2.1) zu zeigen, dass (irgend-)eine Folge $(P_n)$ mit $P_n \in \mathscr{T}$ und

$$||f - P_n||_2 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

[7]Siehe Maßtheorie oder einmal mehr W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

existiert, mit anderen Worten, die Menge der trigonometrischen Polynome $\mathscr{T}$ ist dicht im Raum $L_2(m)$. Da die stetigen Funktionen eine dichte Teilmenge von $L_2(m)$ bilden und da $||f||_2 \leq ||f||_\infty$ für $f \in C(\mathbb{S})$ gilt, reicht es zu zeigen, dass zu jeder *stetigen* Funktion $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ eine Folge $(P_n)$ mit $P_n \in \mathscr{T}$ und

$$||f - P_n||_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

existiert, mit anderen Worten, die Menge $\mathscr{T}$ ist dicht im Raum $(C(\mathbb{S}), ||\cdot||_\infty)$.

**Satz 2.4 (Approximative Eins)** *Für $n \in \mathbb{N}$ seien $Q_n \in \mathscr{T}_n$ mit $\int Q_n \, dm = 1$. Gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|Q_n\|_1 < \infty$ und für alle $\delta > 0$*

$$\int\limits_{\mathbb{S}\setminus B_\delta} |Q_n| \, dm \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{2.3}$$

*mit $B_\delta := \{z \in \mathbb{S} : |z - 1| \leq \delta\}$, so konvergiert die Folge $(f * Q_n)$ für alle $f \in C(\mathbb{S})$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$ gegen $f$.*[8]

**Beweis.** Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $f$ stetig auf der kompakten Menge $\mathbb{S}$ ist, ist $f$ gleichmäßig stetig. Da $|z\overline{\zeta} - z| = |\zeta - 1|$ für alle $z, \zeta \in \mathbb{S}$ gilt, existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f(z\overline{\zeta}) - f(z)| < \varepsilon$$

für alle $z \in \mathbb{S}$ und $\zeta \in B_\delta$. Es sei $M > 0$ so, dass $\|Q_n\|_1 = \int |Q_n| \, dm \leq M$ für alle $n$. Aus $\int Q_n \, dm = 1$ ergibt sich für $z \in \mathbb{S}$ und $n \in \mathbb{N}$ zunächst

$$\begin{aligned} |(f * Q_n)(z) - f(z)| &= \left| \int (f(z\overline{\zeta}) - f(z)) \, Q_n(\zeta) \, dm(\zeta) \right| \\ &\leq \int |f(z\overline{\zeta}) - f(z)| \, |Q_n(\zeta)| \, dm(\zeta) \\ &\leq \int_{B_\delta} \varepsilon |Q_n(\zeta)| \, dm(\zeta) + \int_{\mathbb{S}\setminus B_\delta} 2||f||_\infty |Q_n(\zeta)| \, dm(\zeta) \, , \end{aligned}$$

und damit auch

$$\|f * Q_n - f\|_\infty \leq M\varepsilon + 2\|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{S}\setminus B_\delta} |Q_n| \, dm \, .$$

Mit (2.3) folgt $||f - f * Q_n||_\infty \leq (M + 1)\varepsilon$ für $n$ genügend groß. □

**Bemerkung 2.5** Wir nennen eine Folge $(Q_n)$ wie in Satz 2.4 eine **Folge guter Kerne**. Es stellt sich natürlich die Frage nach der Existenz. Eine naheliegende Idee besteht darin, die Teilsummen $S_n f$ als Faltung mit geeigneten Kernen aufzufassen und dann den obigen Satz

[8] Wegen $f = f * \delta_1$ kann man die Konvergenzaussage als eine Art Konvergenz von $Q_n$ gegen die Eins der Faltung $\delta_1$ interpretieren. Daher der Name approximative Eins.

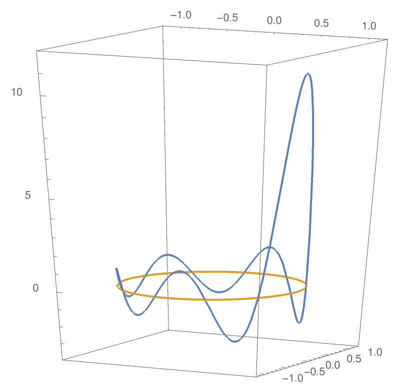


Figure 3: Dirichlet-Kern $D_5$ (blau)

anzuwenden. Tatsächlich lassen sich für $f \in C(\mathbb{S})$ nach Bemerkung 2.2 die Teilsummen $S_n f$ schreiben als $S_n f = f * D_n$, wobei

$$D_n := \sum_{\nu=-n}^{n} e_\nu$$

den $n$-ten **Dirichlet-Kern** bezeichnet (Abb. 3). Man kann zeigen ([Ü]), dass die Folge der Dirichlet-Kerne *keine* Folge guter Kerne darstellt.
Wir betrachten stattdessen die arithmetischen Mittel der $D_n$. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} D_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=-k}^{k} e_\nu = \sum_{\nu=-n}^{n} e_\nu \sum_{k=|\nu|}^{n} 1 = \sum_{\nu=-n}^{n} (n+1-|\nu|) e_\nu .$$

Also ist

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (f * D_k) = f * F_n \,,$$

wobei

$$F_n := \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) e_\nu \qquad (n \in \mathbb{N})$$

den $n$-ten **Fejér-Kern** bezeichnet. Die Folge $(F_n)$ erweist sich tatsächlich als eine Folge guter Kerne: Zunächst ist $F_n \in \mathscr{T}_n$ und

$$\int F_n \, dm = \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) \int e_\nu \, dm = 1 \,.$$

Weiter ist für $z \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \Big| \sum_{j=0}^{n} z^j \Big|^2 &= \frac{1}{n+1} \Big( \sum_{j=0}^{n} z^j \Big) \Big( \sum_{j=0}^{n} \overline{z}^j \Big) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j,k=0}^{n} z^{j-k} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=-n}^{n} (n+1-|\nu|) z^\nu = F_n(z), \end{aligned}$$

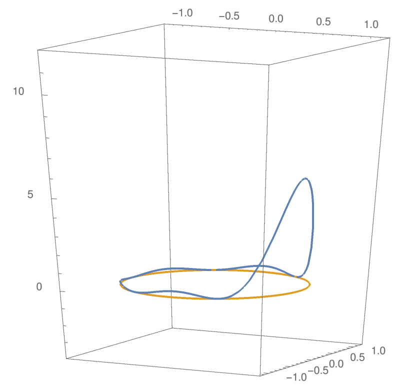


Figure 4: Fejér-Kern $F_5$ (blau)

also $F_n \geq 0$ und damit auch $\|F_n\|_1 = 1$ für alle $n$. Schießlich gilt für $z \in \mathbb{S} \setminus B_\delta$

$$F_n(z) = \frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^{n} z^j\Big|^2 = \frac{1}{n+1}\Big|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\Big|^2 \leq \frac{1}{n+1}\cdot\frac{4}{\delta^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit gilt $F_n \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{S} \setminus B_\delta$. Also ist insbesondere auch (2.3) erfüllt.

Als wichtige Folgerung erhalten wir die Konvergenz der arithmetischen Mittel der $S_n f$ in $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)$ gegen $f$:

**Satz 2.6 (Fejér)** *Für alle $f \in C(\mathbb{S})$ gilt*

$$\sigma_n f := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k f \to f \quad (n \to \infty) \quad \textit{gleichmäßig auf } \mathbb{S}.$$

*Insbesondere folgt aus $\widehat{f} = 0$ schon $f = 0$ und die Menge der trigonometrischen Polynome ist dicht in $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)$.*

**Beweis.** Die erste Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Satz 2.4 und Bemerkung 2.5. Ist $\widehat{f} = 0$, so ist auch $S_k f = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also auch $f = 0$. Wegen $\sigma_n f \in \mathscr{T}_n$ liegen die trigonometrischen Polynome dicht in $C(\mathbb{S})$. $\square$

**Bemerkung 2.7** Ist $f \in C(\mathbb{S})$ und konvergiert $(S_n f)$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$, so gilt $S_n f \to f$.

Denn: Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ist $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ mit

$$g := \lim_{n\to\infty} S_n f = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) e_\nu$$

stetig auf $\mathbb{S}$. Außerdem gilt dann $\widehat{g} = \widehat{f}$ (siehe Einleitung Abschnitt 1), also $(f-g)^\wedge = 0$ und damit $f - g = 0$ nach Satz 2.6.

**Beispiel 2.8** Aus Beispiel 1.3 und Bemerkung 2.7 erhält man

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^2} \cos(\nu t)$$

für alle $t \in [-\pi, \pi]$. Insbesondere ergibt sich damit für $t = \pi$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und für $t = 0$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass Fourier-Reihen stetig differenzierbarer Funktionen stets gleichmäßig konvergieren. Man könnte auf den Gedanken kommen, dass dies auch für stetige Funktionen gilt. Man kann jedoch zeigen. das stetige Funktionen existieren, deren Fourier-Reihe nicht überall punktweise konvergiert.[9]
Wir wollen ein relativ einfach zu beweisendes und doch recht schlagkräftiges hinreichendes Kriterium für die punktweise Konvergenz von $(S_n f)$ herleiten. Dazu beweisen wir zunächst als Folgerung aus den Satz von Fejér das **Riemann-Lebesgue-Lemma**:

**Satz 2.9** *Für alle $f \in L_1(m)$ ist $\widehat{f}$ abklingend, also $\widehat{f}(k) \to 0$ für $k \to \pm\infty$.*

**Beweis.** Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert nach Bemerkung 2.1 und dem Satz von Fejér ein trigonometrisches Polynom $P$ mit $\|f - P\|_1 < \varepsilon$. Ist $P \in \mathscr{T}_N$, so gilt $\widehat{P}(k) = 0$ für $|k| > N$ und damit $|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(k) - \widehat{P}(k)| \le \|f - P\|_1 < \varepsilon$ für $|k| > N$. □

**Bemerkung 2.10** Wir schreiben $\gamma(z) := 1/(1-z)$ für $z \in \mathbb{S} \setminus \{1\}$. Ist für $f \in L_1(m)$ auch $\gamma \cdot f \in L_1(m)$, so gilt $(S_n f)(1) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Denn: Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt mit $g := \gamma \cdot f$

$$\widehat{f}(k) = \int (1-z) g(z) \overline{z}^k \, dm(z) = \widehat{g}(k) - \widehat{g}(k-1),$$

also mit Satz 2.9

$$(S_n f)(1) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) = \sum_{\nu=-n}^{n} (\widehat{g}(\nu) - \widehat{g}(\nu-1)) = \widehat{g}(n) - \widehat{g}(-n-1) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

[9]Ein vergleichsweise einfacher Beweis ergibt sich aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/Funktionalanalysis/Funktionalanalysis_WS1819.pdf, Satz 2.6). Wesentlich ist dabei die Tatsache, dass $\int |D_n| \, dm \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt.

**Satz 2.11** *Es sei $f \in \mathscr{L}_1(m)$ Hölder-stetig an der Stelle $\zeta \in \mathbb{S}$, d. h. es existieren $M, \alpha > 0$ so, dass $|f(z) - f(\zeta)| \leq M|z - \zeta|^\alpha$ für alle $z$ aus einer Umgebung von $\zeta$. Dann konvergiert $(S_n f)(\zeta)$ gegen $f(\zeta)$.*

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei $\zeta = 1$. Dann gilt

$$\frac{|f(z) - f(1)|}{|z - 1|} \leq M|z - 1|^{\alpha - 1}$$

für $z \neq 1$ aus einer Umgebung von 1. Wegen $1 - \alpha < 1$ und $|1 - e^{it}|^2 = 2 - 2\cos t$ ist

$$\int \frac{1}{|z - 1|^{1-\alpha}}\, dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{|1 - e^{it}|^{1-\alpha}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{2 - 2\cos t}^{1-\alpha}} < \infty$$

(man beachte, dass $\sqrt{2 - 2\cos t} \sim t$ für $t \to 0$). Nach Bemerkung 2.10 gilt

$$(S_n f)(1) - f(1) = S_n(f - f(1))(1) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

$\square$

Für normierte Räume $X, Y$ und stetige lineare Abbildungen $T : X \to Y$ bezeichnet im Weiteren

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

die **Operatornorm** von $T$. Es gilt damit $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ für alle $x \in X$.

**Bemerkung 2.12** Satz 2.11 zeigt, dass Hölder-Stetigkeit in allen Punkten jedenfalls punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe gegen $f$ impliziert. Auch wenn $(S_n f)$ nicht für alle stetigen $f$ konvergiert, so kann man doch zeigen, dass der Fehler der Approximation durch $S_n f$ nicht viel größer ist als der minimale Fehler der Approximation aus $\mathscr{T}_n$ heraus:
Wir betrachten $S_n$ als Operator von $C(\mathbb{S})$ nach $C(\mathbb{S})$. Dann gilt ([Ü])

$$\|S_n\| = \|D_n\|_1 = \int |D_n|\, dm \leq 3 + \ln n.$$

Wegen $S_n P = P$ für alle $P \in \mathscr{T}_n$ folgt (wieder [Ü])

$$\|f - S_n f\|_\infty \leq (1 + \|S\|) \inf_{P \in \mathscr{T}_n} \|f - P\|_\infty \leq (4 + \ln n) \inf_{P \in \mathscr{T}_n} \|f - P\|_\infty.$$

Man beachte, dass $\inf_{P \in \mathscr{T}_n} \|f - P\|_\infty$ wegen der Dichtheit von $\mathscr{T}$ in $C(\mathbb{S})$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Als weitere Anwendung des Satzes von Fejér bzw. der Dichtheit von $\mathscr{T}$ in $C(\mathbb{S})$ leiten wir ein Resultat über Ergodizität irrationaler Drehungen auf dem Kreis $\mathbb{S}$ her (ohne uns explizit auf den Begriff der Ergodizität zu beziehen). Vorbereitend beweisen wir ein einfaches Ergebnis über Folgen linearer Operatoren.

**Satz 2.13** *Es seien $X$ ein normierter Raum, $Y$ ein Banachraum und $(T_n)$ eine Folge linearer Abbildungen $T_n : X \to Y$ mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

*Konvergiert die Folge $(T_n x)_n$ für alle $x$ aus einer in $X$ dichten Menge $D$, so konvergiert $(T_n x)_n$ für alle $x \in X$ und durch $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ ist ein lineare Abbildung $T : X \to Y$ definiert mit*

$$\|T\| \leq \liminf \|T_n\|.$$

**Beweis.** Es seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $y \in D$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$. Weiter existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T_k y - T_m y\| < \varepsilon$ für $k, m \geq N$. Also gilt für $k, m \geq N$ auch

$$\|T_k x - T_m x\| \leq \|T_k(x-y)\| + \|T_k y - T_m y\| + \|T_m(y-x)\| \leq (2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| + 1)\varepsilon.$$

Damit ist $(T_n x)$ eine Cauchy-Folge in $Y$, also konvergent. Da die Abbildungen $T_n$ linear sind, ist die punkteise Grenzfunktion $T$ ebenfalls linear. Es sei $(n_j)$ so, dass

$$\|T_{n_j}\| \to \liminf \|T_n\| \qquad (j \to \infty).$$

Für $\|x\| \leq 1$ gilt dann $\|Tx\| = \lim\limits_{j\to\infty} \|T_{n_j} x\| \leq \lim\limits_{j\to\infty} \|T_{n_j}\| = \liminf \|T_n\|$. □

Ist $X$ eine Menge und $\varphi : X \to X$, so schreiben wir $\varphi^j$ für die $j$-te Iterierte von $\varphi$, also $\varphi^0 = \mathrm{id}_X$ und $\varphi^j = \varphi \circ \varphi^{j-1}$ für $j \in \mathbb{N}$.

**Satz 2.14** *Ist $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\varphi$ die Drehung um den Winkel $2\pi\theta$ auf $\mathbb{S}$, also $\varphi(z) = e^{2\pi i\theta} z$ für $z \in \mathbb{S}$, so gilt für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$*

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f \circ \varphi^j = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(e^{2\pi i j\theta} \cdot) \to \int f\, dm \quad (n \to \infty)$$

*gleichmäßig auf $\mathbb{S}$.*[10]

**Beweis.** Wir betrachten die Folge der linearer Operatoren $T_n : C(\mathbb{S}) \to C(\mathbb{S})$, definiert durch

$$T_n f := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f \circ \varphi^j.$$

Wegen $\|f \circ \varphi^j\|_\infty = \|f\|_\infty$ gilt $\|T_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ für $f \in C(\mathbb{S})$ und damit $\|T_n\| \leq 1$. Wegen der Dichtheit von $\mathscr{T}$ in $C(\mathbb{S})$ reicht es nach Satz 2.13, die Behauptung für alle trigonometrischen Polynome zu zeigen. Aus Linearitätsgründen reicht es dazu wiederum,

[10] Genauer: Gegen die konstante Funktion $\mathbb{S} \ni z \mapsto \int f\, dm$.

die Behauptung für die Monome $e_k$ zu beweisen.

Wir setzen $\zeta := e^{2\pi i\theta}$. Da $\theta$ irrational ist, ist $\zeta$ keine Einheitswurzel. Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt damit $\zeta^k \neq 1$, also

$$\sum_{j=0}^{n} (e_k \circ \varphi^j)(z) = \sum_{j=0}^{n} (\zeta^j z)^k = z^k \cdot \frac{1-\zeta^{k(n+1)}}{1-\zeta^k} \quad (z \in \mathbb{S})$$

und folglich

$$||T_n e_k||_\infty \leq \frac{2}{(n+1)|1-\zeta^k|} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Außerdem ist $T_n e_0 = T_n 1 = 1$. Wegen $\int e_k \, dm = 0$ für $k \neq 0$ und $\int e_0 \, dm = 1$ folgt die Behauptung. □

Wir ziehen weitere Folgerungen aus den Satz von Fejér, jetzt für die Fourier-Transformation auf den Räumen $L_2(m)$ und $L_1(m)$. Für beliebige Mengen $X$ und $p \in [1, \infty)$ setzen wir $\ell_p(X) := (L_p(X), \mathrm{Pot}(X), \sigma)$, wobei $\sigma$ das Zählmaß auf $X$ bezeichnet. Dann gilt für $g = (g_x)_{x \in X}$

$$\int |g|^p \, d\sigma = \sum_{x \in X} |g_x|^p.$$

Insbesondere ist $g \in \ell_1(X)$ genau dann, wenn $g$ absolut summierbar ist.

**Satz 2.15** *1. Für $f \in L_2(m)$ gilt $||f - S_n f||_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ und die* ***Parsevalsche Gleichung***[11]

$$||f||_2^2 = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(\nu)|^2 \; (= \|\widehat{f}\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2).$$

*2. Die Fourier-Transformation $L_2(m) \ni f \mapsto \widehat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ ist ein isometrischer Isomorphismus (Satz von* ***Fischer-Riesz****).*[12]

**Beweis.** 1. Da die Menge der trigonometrischen Polynome dicht in $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)$, folgt die erste Behauptung aus Bemerkung 2.3.
Weiter gilt $S_n f \in \mathscr{T}_n$ und nach dem Projektionssatz $f - S_n f \perp p$ für alle $p \in \mathscr{T}_n$. Also ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras ([Ü])

$$||f||_2^2 \; = \; ||f - S_n f||_2^2 + ||S_n f||_2^2 \, .$$

Wegen $||f - S_n f||_2^2 \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt $||S_n f||_2^2 \to ||f||_2^2$ $(n \to \infty)$. Außerdem ist, wieder mit dem Satz von Pythagoras,

$$||S_n f||_2^2 \; = \; || \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) e_\nu ||_2^2 \; = \; \sum_{\nu=-n}^{n} |\widehat{f}(\nu)|^2 \|e_\nu\|_2^2 = \sum_{\nu=-n}^{n} |\widehat{f}(\nu)|^2 \, .$$

[11] Dies ist auch äquivalent dazu, dass $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von $L_2(m)$ ist.

[12] Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen $X$ und $Y$ ist genau dann isometrisch, wenn $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in X$ gilt.

Hieraus ergibt sich die Parsevalsche Gleichung.
2. Nach 1. ist die Fourier-Transformation isometrisch (und damit insbesondere injektiv). Die Surjektivität ergibt sich aus der Vollständigkeit von $L_2(m)$ ([Ü]). □

Wir zeigen nun, dass eine $L_1$-Version des Satzes von Fejér gilt. Damit wird dann auch die Frage nach der Rekonstruierbarkeit von $f$ aus $\widehat{f}$ beantwortet.

**Satz 2.16** *1. Für alle $f \in L_1(m)$ gilt*

$$\Big\| f - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f \Big\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

*2. Die Fourier-Transformation $L_1(m) \ni f \mapsto \widehat{f} \in B(\mathbb{Z})$ ist injektiv.*

**Beweis.** 1. Wir zeigen: Ist $(Q_n)$ eine Folge guter Kerne, so gilt $f * Q_n \to f$ in $L_1(m)$. Dann folgt 1. mit $Q_n = F_n$, wobei $F_n$ der $n$-te Fejér-Kern ist (vgl. Bemerkung 2.5).
Wir betrachten die lineare Abbildungen $T_n : L_1(m) \to L_1(m)$ mit

$$T_n f := f * Q_n \quad (f \in L_1(m)).$$

Es sei $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Q_n\|_1$. Dann gilt nach Bemerkung 1.4

$$\|T_n f\|_1 = \|f * Q_n\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|Q_n\|_1 \leq M\|f\|_1 \quad (f \in L_1(m))$$

und damit $\|T_n\| \leq M$. Offensichtlich sind die $T_n$ linear. Für $f \in C(\mathbb{S})$ (und damit auf einer dichten Teilmenge von $L_1(m)$) gilt außerdem $T_n f \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$, also auch $T_n f \to f$ in $L_1(m)$. Aus Satz 2.13 folgt, dass $(T_n f)_n$ für alle $f \in L_1(m)$ konvergiert und dass durch

$$Tf := \lim_{n\to\infty} T_n f = \lim_{n\to\infty} f * Q_n \quad (f \in L_1(m))$$

eine (wegen $\|T\| \leq M$ stetige) lineare Abbildung $T : L_1(m) \to L_1(m)$ definiert ist. Aus $Tf = f$ für $f \in C(\mathbb{S})$ folgt aufgrund der Stetigkeit $Tf = f$ für alle $f \in L_1(m)$.
2. Klar nach 1. □

**Bemerkung 2.17** Insbesondere sieht man mit Satz 2.16.2 wie in Bemerkung 2.7: Ist $f \in \mathscr{L}_1(m)$ so, dass $(S_n f)$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$ konvergiert, so stimmt $f$ $m$-fast überall mit einer stetigen Funktion $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ überein und es gilt

$$f = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) e_\nu$$

$m$-fast überall auf $\mathbb{S}$ und im Integralmittel, also in $L_1(m)$. Insbesondere ist dies dar Fall, wenn $\widehat{f}$ absolut summierbar ist, also $\widehat{f} \in \ell_1(\mathbb{Z})$ gilt.

**Bemerkung 2.18** Aus der Injektivität der Fourier-Transformation auf $C(\mathbb{S})$ und dem Rieszschen Darstellungssatz ergibt sich auch die Injektivität der Fourier-Transformation auf dem Raum der komplexen Maße, also auf $C(\mathbb{S})'$: Es seien $\mu \in C(\mathbb{S})'$ mit $\widehat{\mu} = 0$ und $g \in C(\mathbb{S})$. Nach Bemerkung 1.7 ist $g * \mu \in C(\mathbb{S})$ mit

$$0 = \widehat{g} \cdot \widehat{\mu} = (g * \mu)\widehat{\ }$$

und damit $g * \mu = 0$ nach Satz 2.6, also insbesondere

$$\int g(\overline{\zeta})\, d\mu(\zeta) = (g * \mu)(1) = 0.$$

Damit ist auch $\int g\, d\mu = 0$ für alle stetigen $g$, also $\mu = 0$.

Zum Abschluss gehen wir kurz darauf ein, wie man Ergebnisse über trigonometrische Approximation in entsprechende Resultate über Approximation durch algebraische Polynome auf kompakten Intervallen überführen kann. Ohne Einschränkung betrachten wir das Intervall $[-1, 1]$ .

**Bemerkung 2.19** Durch $t \mapsto \cos t = \mathrm{Re}(e^{it})$ ist eine bijektive Abbildung von $[0, \pi]$ auf $[-1, 1]$ gegeben mit Umkehrfunktion $x \mapsto \arccos x$. Wir definieren $T : C(\mathbb{S}) \to C[-1, 1]$ durch

$$(Tf)(x) := \frac{1}{2}\big(f(e^{i \arccos x}) + f(e^{-i \arccos x})\big) \quad (x \in [-1, 1],\ f \in C(\mathbb{S})).$$

Dann ist $T$ linear mit $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ (also $\|T\| \leq 1$). Insbesondere ergibt sich für $k \in \mathbb{Z}$

$$(Te_k)(x) = \frac{1}{2}\big(e^{ik \arccos x} + e^{-ik \arccos x}\big) = \cos(k \arccos x) \quad (x \in [-1, 1]).$$

Ist $T_k := \cos(k \arccos(\cdot))$, so gilt $T_0 = 1$, $T_1 = \mathrm{id}_{[-1,1]}$ und ([Ü]) für $k \in \mathbb{N}$

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad (x \in [-1, 1]).$$

Damit ist $T_k$ ein (algebraisches) Polynom vom Grad $k$, genannt $k$-tes **Tschebyscheff-Polynom**, und es gilt

$$Te_k = Te_{-k} = T_k.$$

Außerdem ist $T$ surjektiv: Ist $g \in C[-1, 1]$, so ist $f$ mit

$$f(e^{it}) := g(\cos t) \quad (t \in (-\pi, \pi])$$

in $C(\mathbb{S})$ und es gilt

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2}\big(g(\cos(\arccos x)) + g(\cos(-\arccos x))\big) = g(x) \quad (x \in [-1, 1]).$$

Ist $h \in C(\mathbb{S})$ reellwertig, so ist $\widehat{h}(k) = \widehat{h}(-k)$ für $k \in \mathbb{N}$. Es sei nun $(Q_n)$ eine beliebige Folge reellwertiger trigonometrischer Polynome (wie etwa $Q_n = D_n$ oder $Q_n = F_n$) und

$g \in C[-1,1]$ reellwertig. Ist $f(e^{it}) = g(\cos t)$ wie oben, so ergibt sich wegen $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$ und $\widehat{Q_n}(k) = \widehat{Q_n}(-k)$ für

$$P_n := \widehat{f}(0)\widehat{Q_n}(0) + 2\sum_{\nu=1}^{n} \widehat{f}(\nu)\widehat{Q_n}(\nu) \cdot T_\nu$$

damit

$$\|g - P_n\|_\infty = \|T(f - f * Q_n)\|_\infty \leq \|f - f * Q_n\|_\infty.$$

Ist also $(Q_n)$ eine Folge guter Kerne (etwa $Q_n = F_n$), so konvergiert die Folge algebraischer Polynome $(P_n)$ gleichmäßig auf $[-1,1]$ gegen $g$. Für $Q_n = D_n$ ergibt sich die Konvergenz von

$$P_n = \widehat{f}(0) + 2\sum_{\nu=1}^{n} \widehat{f}(\nu) \cdot T_\nu$$

gegen $g$ in $C[-1,1]$ für alle $g$ mit der Eigenschaft, dass $(S_n f)$ in $C(\mathbb{S})$ gegen $f$ konvergiert. Die Fourier-Koeffizienten $\widehat{f}(k)$ lassen sich direkt aus $g$ und $T_k$ berechnen. Genauer ergibt sich mit Substitution $x = \cos t$ bzw. $t = \arccos x$

$$2\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k) + \widehat{f}(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(\cos t) 2\cos(kt)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} g(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

# 3 Fourier-Transformation in $\mathbb{R}^N$

Wir betrachten nun für $N \in \mathbb{N}$ den euklidschen Raum $\mathbb{R}^N$. Im Weiteren sei

$$B := B_N := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 1\},$$

wobei $|x|$ die euklidsche Länge von $x$ bezeichnet. Ist $\lambda := \lambda_N$ das $N$-dimensionale Lebesgue-Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$, so setzen wir $L_p := L_p(\mathbb{R}^N) := L_p(\mathbb{R}^N, \mathscr{B}_N, \lambda_N)$ und schreiben kurz

$$\int f := \int f(x)\,dx := \int f\,d\lambda_N.$$

Sind $f_j \in L_1(\mathbb{R})$ für $j = 1, \ldots, N$ und ist das Tensorprodukt $\bigotimes_{j=1}^N f_j$ definert durch

$$\bigotimes_{j=1}^{N} f_j(x) := \prod_{j=1}^{N} f_j(x_j) \quad (x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N),$$

so gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int \bigotimes_{j=1}^{N} f_j = \prod_{j=1}^{N} \int f_j.$$

**Bemerkung und Definition 3.1** Für das kanonische Skalarprodukt von $x, \omega \in \mathbb{R}^N$ schreiben wir kurz

$$\omega \cdot x := \sum_{j=1}^{N} \omega_j x_j \quad (x = (x_1, \ldots, x_N),\, \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)).$$

Damit definieren wir $e_\omega : \mathbb{R}^N \to \mathbb{S}$ für $\omega \in \mathbb{R}^N$ durch

$$e_\omega(x) := e_{N,w}(x) := e^{i\,\omega \cdot x} \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Für $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ heißt damit die Funktion $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\widehat{f}(\omega) := \int f\overline{e_\omega} = \int f e_{-\omega} = \int f(x) e^{-i\omega\cdot x}\,dx,$$

die **Fourier-Transformierte** von $f$. Wegen

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \int |f| = \|f\|_1 \quad (\omega \in \mathbb{R}^N)$$

ist $\widehat{f} \in B(\mathbb{R}^N)$ mit[13]

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1\,.$$

Die stetige lineare Abbildung $T : L_1(\mathbb{R}^N) \to B(\mathbb{R}^N)$, definiert durch $Tf := \widehat{f}$ für $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, nennt man **Fourier-Transformation** (auf $L_1(\mathbb{R}^N)$).

[13] Für beliebige Mengen $X$ ist $B(X)$ der (lineare) Raum der beschränkten Funktionen auf $X$, stets versehen mit der sup-Norm $\|\cdot\|_\infty$.

**Beispiel 3.2** Für $a > 0$ und $f = 1_{[-a,a]}$ gilt

$$\widehat{f}(\omega) = \int_a^a e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{-i\omega}(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}) = 2\frac{\sin(a\omega)}{\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Für $f(t) = e^{-|t|}$ rechnet man nach ([Ü]), dass

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

gilt. Man sieht, dass in beiden Fällen $\widehat{f}$ stetig auf $\mathbb{R}$ und für $\omega \to \pm\infty$ abklingend ist. Im ersten Fall ist $\widehat{f} \in L_p$ für $p > 1$ aber $\widehat{f} \notin L_1$, im zweiten gilt $\widehat{f} \in L_p$ für alle $p \geq 1$.

**Bemerkung und Definition 3.3** 1. Wegen der Stetigkeit des Integrationskerns $e_{-\omega}$ als Funktion von $\omega$ und $\int |fe_{-w}| = \int |f|$ ergibt sich mit dem Satz von der dominierten Konvergenz die Stetigkeit von $\widehat{f}$ für alle $f \in L_1$ (Stichwort: Stetigkeit von Parameterintegralen[14]). Damit bildet die Fourier-Transformation $L_1$ in den Teilraum $CB(\mathbb{R}^N)$ der stetigen beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}^N$ ab.
2. Aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^N$ ergibt sich für $h \in L_1$ und $y \in \mathbb{R}^N$

$$\int h(x-y)\,dx = \int h(x)\,dx.$$

Sind nun $p \in [1, \infty)$ und $f \in L_p$ und $g \in L_1$, so folgt

$$\int\int |f(x-y)|^p\,|g(y)|\,dx\,dy = \int\int |f(x)|^p\,dx\,|g(y)|\,dy = \|f\|_p \cdot \|g\|_1.$$

Mithilfe des Satzes von Fubini kann man zeigen, dass das **Faltungsintegral**

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy$$

für $\lambda$-fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ existiert und dass $f * g \in L_p$ mit $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$ gilt. Man nennt wieder $f * g$ die **Faltung** von $f$ und $g$. Ist $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt, so existiert wegen

$$\int |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx\,dy \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

das Faltungsintegral $(f * g)(x)$ sogar für alle $x$.
Ist $p = 1$, so ergibt sich durch die Substitution $x - y =: u$, also $y = x - u$,

$$f * g = g * f \qquad (f, g \in L_1)$$

also die Kommutativität der Faltung.[15] Zudem gilt auch hier

$$(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \qquad (f, g \in L_1).$$

[14] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Parameterintegral.
[15] Wieder ist$(L_1, *)$ eine Banachalgebra.

Denn: Für $\omega \in \mathbb{R}^N$ ist

$$\begin{aligned}(f * g)\hat{}(\omega) &= \int\int f(x-y)g(y)\,dy\,e_{-\omega}(x)\,dx \\ &= \int\int f(x-y)\,e_{-\omega}(x-y)\,dx\,g(y)e_{-\omega}(y)\,dy \\ &= \int f(x)e_{-\omega}(x)\,dx \cdot \int g(y)e_{-\omega}(y)\,dy = \widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega).\end{aligned}$$

3. Ein neuer Aspekt im mehrdimensionalen Fall ergibt sich aufgrund der Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes: Ist $U : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine orthogonale Transformation, also $U(x) = Ax$ mit $A^\top = A^{-1}$, so gilt wegen $|\det A| = 1$ nach der mehrdimensionalen Substitutionsregel[16]

$$(f \circ U)\hat{} = \widehat{f} \circ U \quad (f \in L_1).$$

4. Wegen $e_{N,\omega} = \bigotimes_{j=1}^N e_{1,\omega_j}$ gilt für $f_1, \ldots, f_N \in L_1(\mathbb{R})$

$$\Big(\bigotimes_{j=1}^N f_j\Big)\hat{} = \bigotimes_{j=1}^N \widehat{f_j}.$$

**Beispiel 3.4** Es sei $f = 1_{[-1,1]}$. Dann ist

$$(f * f)(t) = \int 1_{[t-1,t+1]\cap[-1,1]}(s)\,ds = \begin{cases} 2 - |t|, & \text{falls } |t| \le 2 \\ 0, & \text{falls } |t| > 2 \end{cases}.$$

Nach Bemerkung und Definition 3.3 und Beispiel 3.2 gilt

$$(f * f)\hat{}(\omega) = 4\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Grundsätzlich (und grob) kann man sagen, dass $\widehat{f}$ um so glatter ist, je stärker $f$ für $|x| \to \infty$ abklingt, und dass $\widehat{f}$ um so stärker für $|\omega| \to \infty$ abklingt, je glatter $f$ (mit integrierbaren Ableitungen) ist. Um weitere Eigenschaften der Fourier-Transformation herzuleiten, betrachten wir zunächst Funktionen, die beide Bedingungen erfüllen, also glatt sind und alle Ableitungen für $|x| \to \infty$ sehr schnell abklingen.

**Definition 3.5** Für $N \in \mathbb{N}$ ist der **Schwartz-Raum** $\mathscr{S} = \mathscr{S}_N$ der lineare Raum aller Funktionen $u \in C^\infty := C^\infty(\mathbb{R}^N)$ so, dass für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty$$

erfüllt ist, also $x \mapsto x^\alpha \partial^\beta u(x) \in B(\mathbb{R}^N)$ gilt. Wegen $\mathscr{S} \subset L_p$ für alle $p$ ist die Fourier-Transformation insbesondere auf $\mathscr{S}$ definiert.

[16] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Transformationssatz.

**Beispiel 3.6** Eine einfache und wichtige Funktion $u_N \in \mathscr{S}$ ist gegeben durch die (multivariate) **Gauß-Funktion**

$$u_N(x) := e^{-|x|^2/2} \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Wegen $u_N = \bigotimes_{j=1}^N u_1$ und $\int u_1 = \int e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$ gilt

$$\int u_N \, d\lambda_N = \prod_{j=1}^N \int u_1 = \sqrt{2\pi}^N.$$

**Satz 3.7** *Für $N \in \mathbb{N}$ ist $\widehat{u_N} = \sqrt{2\pi}^N u_N$.*

**Beweis.** Nach Bemerkung und Definition 3.3 und Beispiel 3.6 reicht es, die Aussage im Fall $N = 1$ zu beweisen.
Man sieht sofort, dass $u(t) := u_1(t) = e^{-t^2/2}$ die lineare Differenzialgleichung

$$x'(t) = -tx(t)$$

erfüllt. Mit Differenziation von Parameterintegralen[17] und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \widehat{u}'(\omega) &= \int u(t)e^{-i\omega t}(-it)\,dt = i\int u'(t)e^{-i\omega t}\,dt \\ &= -i\int u(t)e^{-i\omega t}(-i\omega)\,dt = -\omega\,\widehat{u}(\omega) \end{aligned}$$

für $\omega \in \mathbb{R}$. Man beachte dabei, dass der ausintegrierte Term wegen $u \in \mathscr{S}$ verschwindet. Damit erfüllt $\widehat{u}$ dieselbe lineare Differenzialgleichung erster Ordnung wie $u$. Also ist $\widehat{u} = cu$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wegen $u(0) = 1$ und $\widehat{u}(0) = \int u = \sqrt{2\pi}$ ist $c = \sqrt{2\pi}$. □

**Bemerkung 3.8** Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, so definieren wir den Multiplikationsoperator $M_\alpha : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ durch

$$(M_\alpha u)(x) = x^\alpha u(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Wie im obigen Beweis zu Satz 3.7 ergeben sich mit Differenziation von Parameterintegralen und partieller Integration folgende allgemeinen Ableitungsregeln für die Fourier-Transformierte von Funktionen $u \in \mathscr{S}$ und beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$:

1. $(M_\alpha u)\widehat{\ } = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \widehat{u}$,
2. $(\partial^\beta u)\widehat{\ } = i^{|\beta|} M_\beta\,\widehat{u}$.[18]

[17] Wieder etwa: https://de.wikipedia.org/wiki/Parameterintegral.

[18] Die Formel besagt $(\partial^\beta u)\widehat{\ }(\omega) = i^{|\beta|}\omega^\beta\,\widehat{u}(\omega)$ und entspricht damit der Regel aus Bemerkung 1.2 für die Fourier-Koeffizienten der Ableitung im Fall des Einheitskreises $\mathbb{S}$.

Als Folgerung ergibt sich, dass für alle $u \in \mathscr{S}$ auch $\widehat{u} \in \mathscr{S}$ gilt, mit anderen Worten: Die Fourier-Transformation bildet $\mathscr{S}$ nach $\mathscr{S}$ ab.

Denn: Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$ gilt

$$(\partial^\beta M_\alpha u)\widehat{\ }(\omega) = i^{|\beta|}\omega^\beta (M_\alpha u)\widehat{\ }(\omega) = i^{|\alpha|+|\beta|}\omega^\beta \partial^\alpha \widehat{u}(\omega) \quad (\omega \in \mathbb{R}^N).$$

Da die linke Seite als Fourier-Transformierte beschränkt auf $\mathbb{R}^N$ ist, ergibt sich die Behauptung.

Nach Satz 3.7 ist $u_N$ ein Eigenvektor der Fourier-Transformation auf $\mathscr{S}$ zum Eigenwert $\sqrt{2\pi}^N$.

Wir wenden uns jetzt der Frage nach der Inversion der Fourier-Transformation zu. Vorbereitend befassen wir uns mit einer weiteren Variante einer Approximativen Eins. Für $g \in C(\mathbb{R}^N)$ heißt der Abschluss von $\{x : g(x) \neq 0\}$ in $\mathbb{R}^d$ der **Träger**[19] von $g$, geschrieben $\operatorname{supp}(g)$. Wir setzen $C_c := C_c(\mathbb{R}^N) := \{g \in C(\mathbb{R}^N) : \operatorname{supp}(g) \text{ kompakt}\}$.

**Bemerkung 3.9** Für $h \in \mathbb{R}^N$ und $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ definieren wir $\tau_h f := f(\cdot - h)$, also $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ für $x \in \mathbb{R}^N$. Dann gilt für $f \in L_p$

$$\|f - \tau_h f\|_p \to 0 \quad (h \to 0).$$

Denn: Ist $g \in C_c$, so ist $g$ gleichmäßig stetig. Also gilt $\tau_h g \to g$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^N$ für $h \to 0$. Ist $|h| \leq 1$, so ist $\operatorname{supp}(\tau_h g) \subset \operatorname{supp}(g) + B$. Damit gilt auch

$$\|g - \tau_h g\|_p \leq \|g - \tau_h g\|_\infty \lambda_N(\operatorname{supp}(g) + B)^{1/p} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so ergibt sich aus Bemerkung 2.1 die Existenz einer Funktion $g \in C_c$ mit $\|g - f\|_p < \varepsilon$ (man beachte: es gilt $\int_{\mathbb{R}^N \setminus \rho B_N} |f|^p \to 0$ für $\rho \to \infty$). Wegen $\|\tau_h(g-f)\|_p = \|g - f\|_p$ folgt

$$\|f - \tau_h f\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - \tau_h g\|_p + \|\tau_h(g - f)|_p \leq \|g - \tau_h g\|_p + 2\varepsilon,$$

also $\|f - \tau_h f\|_p < 3\varepsilon$ für $|h|$ genügend klein.

**Satz 3.10 (Approximative Eins, II)** *Es sei $g \in L_1$ mit $\int g = 1$ und $g_r := r^{-N} g(r^{-1}\,\cdot)$ für $r > 0$.*

1. *Ist $f \in L_p$, so gilt $\|f * g_r - f\|_p \to 0$ für $r \to 0$.*
2. *Ist $f \in B(\mathbb{R}^N)$ gleichmäßig stetig, so gilt $f * g_r \to f$ für $r \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^N$.*

[19] Englisch Support

**Beweis.** Aus der mehrdimensionalen Substitutionsregel ergibt sich $\int g_r = 1$ und damit $f(x) = \int f(x)g_r$ für alle $r > 0$. Wieder mit mehrdimensionaler Substitutionsregel erhält man für fast alle $x \in \mathbb{R}^N$

$$(f * g_r - f)(x) = \int (\tau_u f - f)(x) g_r(u)\, du = \int (\tau_{ry} f - f)(x) g(y)\, dy.$$

1. Aus der Jensen-Ungleichung[20], angewandt auf das Maß $c|g|\lambda_N$ mit $c := 1/\|g\|_1$ folgt für fast alle $x$

$$c^p |f * g_r - f|^p(x) \le \int |\tau_{ry} f - f|^p(x)\, c|g(y)|\, dy.$$

Integrieren bezüglich $x$ und Anwendung des Satzes von Fubini ergibt

$$c^{p-1} \|f * g_r - f\|_p^p \le \int \|\tau_{ry} f - f\|_p^p\, |g(y)|\, dy.$$

Für $y \in \mathbb{R}^N$ gilt weiter $\|\tau_{ry} f - f\|_p \le 2\|f\|_p$ und $\|\tau_{ry} f - f\|_p \to 0$ $(r \to 0)$. Der Satz von der dominierten Konvergenz zeigt, dass die rechte Seite in der letzten Ungleichung gegen 0 konvergiert für $r \to 0$. Damit folgt die erste Behauptung.
2. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\rho > 0$ mit $\int_{\mathbb{R}^N \setminus \rho B_N} |g| < \varepsilon$. Wegen $\int = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \rho B_N} + \int_{\rho B_N}$ folgt für $x \in \mathbb{R}^N$

$$|(f * g_r - f)(x)| \le \int |\tau_{ry} f - f|(x)\, |g(y)|\, dy \le 2\|f\|_\infty \varepsilon + \sup_{y \in \rho B_N} \|\tau_{ry} f - f\|_\infty\, \|g\|_1.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f$ gilt

$$\sup_{y \in \rho B_N} \|\tau_{ry} f - f\|_\infty \to 0 \quad (r \to 0)$$

und damit ist

$$\|f * g_r - f\|_\infty \le (2\|f\|_\infty + 1)\varepsilon$$

für $r$ genügend klein. □

**Bemerkung und Definition 3.11** Wir setzen $m := m_N := (2\pi)^{-N} \lambda_N$ und für $h \in L_1 = L_1(m)$

$$h^\vee(x) := \int h(\omega) e^{i\omega x}\, dm(\omega) \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Substitution $\omega \mapsto -\omega$ zeigt, dass $h^\vee$ bis auf Skalierung auch die Fourier-Transformierte von $\omega \mapsto h(-\omega)$ ist, genauer gilt

$$h(-\,\cdot)\widehat{\ } = \widehat{h}(-\,\cdot) = (2\pi)^N h^\vee.$$

Außerdem bemerken wir noch, dass nach dem Satz von Fubini für $f, g \in L_1$

$$\int f\widehat{g}\, dm = \int \int f(x) g(y) e^{-ix\cdot y}\, dy\, dm(x) = \int \int f(x) e^{-ix\cdot y}\, dx\, g(y)\, dm(y) = \int \widehat{f} g\, dm \tag{3.1}$$

gilt.

[20] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Jensensche_Ungleichung.

**Satz 3.12 (Fourier-Inversion)**

1. *Für $u \in \mathscr{S}$ ist $(\widehat{u})^\vee = u$ und $\|u\|_2 = \|\widehat{u}\|_{L_2(m)}$ $(= (2\pi)^{-N/2}\|\widehat{u}\|_2)$.*

2. *Die Fourier-Transformation ist ein isometrischer Isomorphismus von $(\mathscr{S}, \|\cdot\|_2)$ auf $(\mathscr{S}, \|\cdot\|_{L_2(m)})$.*

3. *Ist $f \in L_1$ so, dass auch $\widehat{f} \in L_1$ gilt, so ist $(\widehat{f})^\vee = f$.*[21] *Insbesondere ist die Fourier-Transformation $L_1 \ni f \mapsto \widehat{f} \in CB(\mathbb{R}^N)$ injektiv.*

**Beweis.** Es sei $x \in \mathbb{R}^N$. Für $y \in \mathbb{R}^N$ und $r > 0$ ist mit $\varphi(x, r, \omega) := e^{ix\cdot\omega - r^2|\omega|^2/2}$

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{N/2} u_{N,r}(x-y) &= (2\pi)^{N/2} r^{-N} u_N(r^{-1}(x-y)) = r^{-N}\, \widehat{u_N}(r^{-1}(x-y)) \\
&= r^{-N} \int e^{-ir^{-1}(x-y)\cdot\xi} e^{-|\xi|^2/2}\, d\xi \\
&= \int e^{-i(y-x)\cdot\omega} e^{-r^2|\omega|^2/2}\, d\omega = \varphi(x, r, \cdot)\widehat{\ }(y),
\end{aligned}$$

wobei $-r^{-1}\xi = \omega$ substituiert wurde. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt für $h \in L_1$

$$\int h(\omega)\varphi(x, r, \omega)\, dm(\omega) \to \int h(\omega) e^{ix\cdot\omega}\, dm(\omega) = h^\vee(x) \quad (r \to 0). \tag{3.2}$$

1. Da Funktionen in $\mathscr{S}$ beschränkt und gleichmäßig stetig sind, ergibt sich mit (3.1) und Satz 3.10 für $g_r := (2\pi)^{-N/2} u_{N,r}$

$$\int \widehat{u}\varphi(x, r, \cdot)\, dm = \int u\varphi(x, r, \cdot)\widehat{\ } dm = \int u(y) g_r(x-y)\, dy = (u * g_r)(x) \to u(x)$$

für $r \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^N$. Nach (3.2), angewandt auf $h = \widehat{u}$, ist also $(\widehat{u})^\vee = u$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\int |u|^2 &= \int u(x)\overline{u(x)}\, dx = \int\int u(x)\, \overline{e^{i\omega x}\widehat{u}(\omega)}\, dm(\omega)\, dx \\
&= \int\int u(x) e^{-i\omega x}\, \overline{\widehat{u}(\omega)}\, dx\, dm(\omega) = \int \widehat{u}(\omega)\overline{\widehat{u}(\omega)}\, dm(\omega) = \int |\widehat{u}|^2\, dm.
\end{aligned}$$

2. Wegen 1. ist auch $(u^\vee)\widehat{\ } = \widehat{u}(-\cdot)\widehat{\ } = (\widehat{u})^\vee = u$ und damit die Fourier-Transformation eine Bijektion von $\mathscr{S}$ auf $\mathscr{S}$.
3. Wie in 1. ergibt sich im Fall $\widehat{f} \in L_1$ mit (3.1) für $x \in \mathbb{R}^N$

$$\int \widehat{f}\varphi(x, r, \cdot)\, dm = \int f\varphi(x, r, \cdot)\widehat{\ } dm = \int f(y) g_r(x-y)\, dy = (f * g_r)(x).$$

Nach Satz 3.10 konvergiert $f * g_r$ in $L_1$ gegen $f$. Also ist nach (3.2), angewandt auf $h = \widehat{f}$, wieder $(\widehat{f})^\vee = f$, jetzt in $L_1$. $\square$

[21] Dies entspricht der Aussage aus Bemerkung 2.17 im Fall von Fourier-Reihen .

**Beispiel 3.13** Es sei $f(t) = e^{-|t|}$ für $t \in \mathbb{R}$. Nach Beispiel 3.2 gilt $\widehat{f}(s) = 2/(1+s^2)$ für $s \in \mathbb{R}$. Da $\widehat{f} \in L_1$ und gerade ist, folgt mit Satz 3.12

$$f = (\widehat{f})^\vee = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f})\widehat{\ }.$$

Also ist $t \mapsto e^{-|t|}$ die Fourier-Transformierte von $s \mapsto \pi^{-1}/(1+s^2)$.[22]

**Bemerkung 3.14** Sind $u, v \in \mathscr{S}$, so ist auch $u * v \in \mathscr{S}$.

Denn: Aus der Definition von $\mathscr{S}$ und der Produktregel ergibt sich per Induktion, dass auch $u \cdot v \in \mathscr{S}$ gilt ([Ü]). Da mit $u, v$ auch $\widehat{u}, \widehat{v} \in \mathscr{S}$ sind, ist

$$(u * v)\widehat{\ } = \widehat{u} \cdot \widehat{v} \in \mathscr{S}.$$

Da die Fourier-Transformation eine Bijektion auf $\mathscr{S}$ ist, gilt auch $u * v \in \mathscr{S}$.

Wir wollen nun zeigen, dass $\mathscr{S}$ für alle $p \in [1, \infty)$ dicht in $L_p(\mathbb{R}^N)$ ist. Genauer zeigen wir dies sogar für einen Teilraum von $\mathscr{S}$. Vorbereitend beweisen wir ein Ergebnis über die Glattheit von Faltungen. Wir schreiben $\mathscr{L}_\infty$ für die Menge der messbaren beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$.

**Satz 3.15** *Sind $f \in \mathscr{L}_p$ und $u \in \mathscr{S}$, so ist $f * u \in C^\infty$ mit $\partial^\alpha(f * u) = f * \partial^\alpha u$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.*

**Beweis.** Für $p \in [1, \infty]$ sei $q \in [1, \infty]$ mit $p + q = pq$. Sind $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ und $U = U_\rho(0)$, so gilt

$$|\partial^\alpha u(x - y)| \leq 1/(|y| - \rho)^{N+2} \quad (x \in U)$$

für $|y|$ genügend groß. Wegen $(|y| - \rho)^{N+2}/(1 + |y|)^{N+1} \to \infty$ für $|y| \to \infty$ existiert eine Konstante $C = C_{\alpha,U} \geq 0$ mit

$$|\partial^\alpha u(x - y)| \leq C/(1 + |y|)^{N+1} \quad (x \in U,\ y \in \mathbb{R}^N).$$

Da $y \mapsto 1/(1 + |y|)^{N+1} \in \mathscr{L}_q$[23] gilt, ist nach der Hölder-Ungleichung (auch für $p = \infty$ oder $q = \infty$)

$$\int |f(y)|(1 + |y|)^{-(N+1)}\, dy < \infty$$

und damit die Funktion $y \mapsto f(y)(1+|y|)^{-(N+1)}$ eine integrierbare Majorante für die Familie $(y \mapsto f(y)\partial^\alpha u(x-y))_{x \in U}$. Aus dem Satz über die Differenziation von Parameterintegralen (induktiv angewandt) ergibt sich damit die Behauptung. □

---

[22] Interpretation für die Stochastik: $s \mapsto \pi^{-1}/(1 + s^2)$ ist die Lebesgue-Dichte der Cauchy-Verteilung, also $t \mapsto e^{-|t|}$ die charakteristische Funktion von der Cauchy-Verteilung.

[23] Unter Verwendung des Oberflächemaßes auf der Einheitssphäre $\partial B_N$ kann man zeigen, dass $y \mapsto (1 + |y|)^{-\lambda}$ genau dann integrierbar ist, wenn $\lambda > N$ gilt.

**Bemerkung und Definition 3.16** 1. Für $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ setzen wir

$$C_c^m := C_c^m(\mathbb{R}^N) := \{u \in C^m(\mathbb{R}^N) : \operatorname{supp}(\varphi) \text{ kompakt}\}$$

und $\mathscr{D} := C_c^\infty$. Funktionen aus $\mathscr{D}$ nennt man auch **Testfunktionen**. Es gilt $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$.
2. Ist $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, so sagen wir, dass $h$ **abklingend** (an $\infty$) ist, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^N$ existiert mit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N \setminus K} |h(x)| < \varepsilon.$$

Wir setzen

$$C_0 := C_0(\mathbb{R}^N) := \{h \in C(\mathbb{R}^N) : h \text{ abklingend}\}.$$

Offensichtlich gilt $\mathscr{S} \cup C_c \subset C_0$. Man kann zeigen ([Ü]), dass $C_0$ ein abgeschlossener Teilraum von $(B(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ und damit selbst ein Banachraum ist. Außerdem sieht man leicht, dass Funktionen in $C_0$ gleichmäßig stetig sind. Ist $\rho > 0$ und ist $\varphi_\rho$ definiert durch

$$\varphi_\rho(x) := \max\{0, 1 - \operatorname{dist}(x, \rho B)\} \quad (x \in \mathbb{R}^N),$$

so gilt $f\varphi_\rho \in C_c$ und $f\varphi_\rho \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^N$ für beliebige $f \in C_0$. Insbesondere ist $C_c$ dicht in $C_0$, also $C_0$ der Abschluss von $C_c$ in $B(\mathbb{R}^N)$.

**Beispiel 3.17** Es sei $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x) := \begin{cases} c \cdot \exp(1/(|x|^2 - 1)), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

mit $c > 0$ so, dass $\int u = 1$. Man kann zeigen, dass $u$ eine Testfunktion (mit $\operatorname{supp}(u) = B_N$) ist. Für $r > 0$ ist damit auch $u_r := r^{-N} u\big(r^{-1}\ \cdot\big) \in \mathscr{D}$ mit $\int u_r = 1$ und $\operatorname{supp}(u_r) = rB_N$. Also ist $u_r$ wie in Satz 3.10.

**Satz 3.18** *$\mathscr{D}$ ist dicht in $(L_p, \|\cdot\|_p)$ für alle $p \in [1, \infty)$ und in $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$.*

**Beweis.** Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt $f 1_{\rho B} \to f$ für alle $f \in L_p$. Entsprechend gilt $f\varphi_\rho \to f$ für alle $f \in C_0$. Daher reicht es jeweils, die Behauptung für den Fall zu zeigen, dass $f$ außerhalb einer kompakten Menge $K$ verschwindet.
Es seien $u_r$ wie in wie in Beispiel 3.17. Wegen Satz 3.15 ist $f * u_r \in \mathscr{S}$ und nach Definition der Faltung gilt

$$\operatorname{supp}(f * u_r) \subset K + \operatorname{supp}(u_r) = K + rB_N,$$

also $f * u_r \in \mathscr{D}$. Nach Satz 3.10 gilt $f * u_r \to f$ in $L_p$ beziehungsweise in $C_0$ für $r \to 0$. □

Als unmittelbare Konsequenz ergibt sich wieder

**Satz 3.19 (Riemann-Lebesgue)** *Für alle $f \in L_1$ ist $\widehat{f} \in C_0$.*

**Beweis.** Da $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$ nach Satz 3.18 dicht in $L_1$ ist, existiert eine Folge $(u_n)$ in $\mathscr{S}$ mit $u_n \to f$ in $L_1$. Wegen $\|\widehat{f} - \widehat{u_n}\|_\infty \leq \|f - u_n\|_1$ gilt $\mathscr{S} \ni \widehat{u_n} \to \widehat{f}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^N$. Da $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum mit $\mathscr{S} \subset C_0$ ist, gilt $\widehat{f} \in C_0$. □

Als weitere Folgerung erhält man zentrale Aussagen über die Fourier-Transformation auf dem Hilbertraum $L_2$ (vgl. Satz 2.15).

**Satz 3.20 (Plancherel)**

1. *Die Fourier-Transformation auf $\mathscr{S}$ hat genau eine Fortsetzung zu einer stetigen (linearen) Abbildung $T : L_2 \to L_2(m)$ und $T$ ist ein isometrischer Isomorphismus von $L_2$ auf $L_2(m_N)$.*
2. *Für $f \in L_2$ gilt*

$$\|Tf - (f 1_{\rho B})\widehat{\ }\|_{L_2(m)} \to 0 \text{ und } \|f - ((Tf)1_{\rho B})^\vee\|_2 \to 0 \quad (\rho \to \infty),$$

*also, jeweils in $L_2$,*

$$\int_{\rho B_N} f(x) e^{-ix\cdot} dx \to Tf \text{ und } \int_{\rho B_N} (Tf)(\omega) e^{i\omega\cdot} dm(\omega) \to f \quad (\rho \to \infty).$$

**Beweis.** 1. Da $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$ nach Satz 3.18 dicht im Banachraum $L_2$ ist, und da stetige lineare Abbildungen gleichmäßig stetig sind, existiert genau eine stetige Fortsetzung $T : L_2 \to L_2(m)$ und diese ist auch linear. Außerdem folgt aus der Stetigkeit der Norm und $\|u\|_2 = \|\widehat{u}\|_{L_2(m)}$ für $u \in \mathscr{S}$ dann auch $\|f\|_2 = \|Tf\|_{L_2(m)}$ für alle $f \in L_2$. Damit ist $T$ eine Isometrie. Ist schließlich $f \in L_2$ und $\mathscr{S} \ni u_n \to f$ in $L_2$ so gilt auch $\widehat{u_n} = Tu_n \to Tf$ in $L_2$ und damit

$$f \leftarrow u_n = (\widehat{u_n})^\vee = (\widehat{u_n}(-\cdot))\widehat{\ } \to T(Tf(-\cdot)).$$

Also ist $f = T(Tf(-\cdot))$ und damit $T$ insbesondere surjektiv.
2. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt $\|f - f1_{\rho B}\|_2 \to 0$ für $\rho \to \infty$. Außerdem ist $f1_{\rho B} \in L_1 \cap L_2$, also existiert $(f1_{\rho B})\widehat{\ }$ und es gilt

$$\|Tf - (f1_{\rho B})\widehat{\ }\|_{L_2(m)} = \|f - f1_{\rho B}\|_2 \to 0 \quad (\rho \to \infty).$$

Die zweite Aussage ergibt sich aus Symmetriegründen. □

Zum Abschluss wollen wir wieder kurz auf die Erweiterung der Fourier-Transformation von $L_1$ auf den Raum der komplexen Borel-Maße eingehen.

**Bemerkung und Definition 3.21** 1. Ist $\mu$ ein komplexes Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$ und $CB := CB(\mathbb{R}^N)$ der Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^N$, so ist durch

$$CB \ni g \mapsto \int g \, d\mu \in \mathbb{C}$$

ein stetiges lineares Funktional auf $(CB, \|\cdot\|_\infty)$ gegeben. Der bereits in Bemerkung und Definition 1.5 zitierte Rieszsche Darstellungssatz besagt in der hier relevanten Situation auch, dass jedes stetige lineare Funktional auf dem Teilraum $C_0$ von $CB$ von dieser Form für *genau* ein komplexes Maß $\mu$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$ ist. Man identifiziert wieder $\mu$ und das entsprechende Funktional und schreibt $C_0' = (C_0)'$ für die Menge der komplexen Maße auf $C_0$.
2. Für $\mu \in C_0'$ mit Polarzerlegung $h|\mu|$ ist die **Fourier-(Stieltjes-)Transformierte** $\widehat{\mu}$ von $\mu$ definiert durch

$$\widehat{\mu}(\omega) := \int \overline{e_\omega}\, d\mu = \int e_{-\omega}\, d\mu = \int e^{-i\omega\cdot x} h(x)\, d|\mu|(x) \quad (\omega \in \mathbb{R}^N).$$

Nach Definition gilt

$$|\widehat{\mu}(\omega)| \leq \int d|\mu| = |\mu|(\mathbb{R}^N) \qquad (\omega \in \mathbb{R}^N)$$

und damit ist wieder $\widehat{\mu} \in B(\mathbb{R}^N)$. Außerdem ist mit gleicher Argumentation wie in Bemerkung und Definition 3.3 $\widehat{\mu}$ stetig, also $\widehat{\mu} \in CB$.[24] Ist speziell $\mu = f\lambda$ mit $f \in L_1$, also

$$\int g\, d\mu = \int gf \qquad (g \in CB),$$

so ergibt sich $\widehat{\mu} = \widehat{f}$ mit $g = e_{-\omega}$. In diesem Sinne kann man die Fourier-Transformation auf den komplexen Maßen wieder als Erweiterung der Fourier-Transformation auf $L_1$ auffassen.

**Beispiel 3.22** Für das Dirac-Maß $\delta_a$ am Punkt $a \in \mathbb{R}^N$ gilt $\widehat{\delta_a}(\omega) = e^{-ia\cdot\omega}$. Man sieht, dass $\widehat{\delta_a}$ gleichmäßig stetig und beschränkt, allerdings nicht abklingend ist.

**Satz 3.23 (Eindeutigkeitzssatz)**
*Die Fourier-Transformation $C_0' \ni \mu \mapsto \widehat{\mu} \in CB$ ist injektiv.*

**Beweis.** Es sei $\mu$ so, dass $\widehat{\mu} = 0$. Dann gilt für $h \in L_1$ nach dem Satz von Fubini

$$\int \widehat{h}\, d\mu = \int \int h(y) e^{-ix\cdot y}\, dy\, d\mu(x) = \int h\widehat{\mu} = 0.$$

Ist $u \in \mathscr{S}$, so ist $u = \widehat{h}$ für ein $h \in \mathscr{S} \subset L_1$ wegen der Surjektivität der Fourier-Transformation auf $\mathscr{S}$. Also gilt

$$\int u\, d\mu = 0.$$

Da $\mu$ ein stetiges Funktional und $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$ nach Satz 3.18 dicht in $C_0$ ist, ist $\mu(g) = \int g\, d\mu = 0$ für alle $g \in C_0$. $\square$

[24] Man kann zeigen, dass $\widehat{\mu}$ sogar gleichmäßig stetig ist.

**Bemerkung 3.24** Die Fourier-Transformation lässt sich weiter ausdehnen auf den Raum der temperierten Distributionen $\mathscr{S}'$: Ist $u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ linear, so nennt man $u$ eine **temperierte Distribution**, falls für alle Folgen $(\varphi_n)$ in $\mathscr{S}$ mit $\varphi_n \to \varphi$, also mit der Eigenschaft, dass für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$

$$\|M_\alpha \partial^\beta (\varphi_n - \varphi)\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$$

gilt, die Folge $(u(\varphi_n))$ gegen $u(\varphi)$ konvergiert. Man kann zeigen, dass mit $\varphi_n \to \varphi$ auch $\widehat{\varphi_n} \to \widehat{\varphi}$ (im obigen Sinne) gilt. Für $u \in \mathscr{S}'$ ist daher das lineare Funktional $\widehat{u} : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\widehat{u}(\varphi) := u(\widehat{\varphi}) \qquad (\varphi \in \mathscr{S}),$$

ebenfalls eine temperierte Distribution. Also ist die dadurch auf $\mathscr{S}'$ definierte Fourier-Transformation eine Selbstabbildung. Man sich überlegen, dass (im Wesentlichen wegen (3.1)) die Fourier-Transformation auf $\mathscr{S}'$ sowohl als eine Erweiterung der Fourier-Transformation auf $C_0'$ als auch der auf $L_2$ angesehen werden kann.[25]

[25] Sehr viel Genaueres dazu findet man etwa in W. Rudin, Functional Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.

# 4 Anwendungen und Folgerungen

Wir gehen in diesem Abschnitt auf verschiedene Anwendungen der Fourier-Transformation (in $\mathbb{R}^N$) ein. Los geht es mit partiellen Differenzialgleichungen.

**Bemerkung und Definition 4.1** Wir schreiben Punkte in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ in der Form $(t,x)$ mit $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^N$. Weiter seien $I$ ein offenes Intervall und $u: I\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ so, dass $u(t,\cdot)\in C^2(\mathbb{R}^N)$ für $t\in I$. Wir setzen $\Delta u := \Delta_x u := \Delta\big(u(t,\cdot)\big)$, wobei $\Delta : C^2(\mathbb{R}^N)\to C(\mathbb{R}^N)$ den **Laplace-Operator**

$$\Delta v := \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}$$

bezeichnet. Damit heißen die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad (t>0)$$

(homogene) **Wärmeleitungsgleichung** auf $D := (0,\infty)\times\mathbb{R}^N$ und die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

(homogene) **Wellengleichung** auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$.
Als extem nützlich erweist sich die Tatsache, dass (unter geeigneten Voraussetzungen) Fourier-Transformierte von Ableitungen sich lediglich durch die Multiplikation mit entsprechenden $\omega$-Potenzen von der Fourier-Transformierten der Funktion selbst unterscheiden (vgl. Bemerkung 3.8). Im Falle des Laplace-Operators gilt etwa

$$(\Delta v)\widehat{\ }(\omega) = -|\omega|^2\widehat{v}(\omega).$$

Wir untersuchen zunächst die Wärmeleitungsgleichung und dabei das Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung

$$u(0,x) = f(x),$$

wobei $f$ eine vorgegebene Wärmeverteilung zum Zeitpunkt $t=0$ beschreibt. Wir zeigen, dass eine Lösung per approximativer Eins basierend auf der Gauß-Funktion $u_N$ bestimmt werden kann. Dazu betrachten wir für $t>0$ die Kerne

$$H_t(x) := (4\pi t)^{-N/2} u_N(x/\sqrt{2t}) = (4\pi t)^{-N/2} e^{-|x|^2/(4t)} \quad (x\in\mathbb{R}^N).$$

**Satz 4.2** *Es sei $f\in L_1$.*

1. *Durch $u(t,x) := (f * H_t)(x)$ ist eine Funktion $u\in C^\infty(D)$ definiert, die die Wärmeleitungsgleichung auf $D$ löst.*

*2. Ist $f \in B(\mathbb{R}^N)$ gleichmäßig stetig, so ist durch $u(0,x) := f(x)$ eine stetige Fortsetzung von $u$ auf den Abschluss $[0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ von $D$ gegeben.*[26]

**Beweis.** 1. Nach Satz 3.7 und mit Substitution $y = x/\sqrt{2t}$ gilt $\widehat{H_t}(\omega) = e^{-t|\omega|^2}$ für $\omega \in \mathbb{R}^N$. Wegen $f \in L_1$ und $H_t \in \mathscr{S} \subset L_1$ ist $f * H_t \in L_1$. Außerdem gilt

$$(f * H_t)\widehat{\ }(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{H_t}(\omega) = \widehat{f}(\omega)e^{-t|\omega|^2} \quad (\omega \in \mathbb{R}^N).$$

Da $\omega \mapsto e^{-t|\omega|^2} \in \mathscr{S} \subset L_1$ gilt und $\widehat{f}$ beschränkt ist, ergibt sich $(f * H_t)\widehat{\ } \in L_1$, also mit Satz 3.12 (Fourier-Inversion)

$$u(t,x) = (f * H_t)(x) = ((f * H_t)\widehat{\ })^\vee(x) = \int \widehat{f}(\omega)e^{-t|\omega|^2}e^{i\omega\cdot x}\, dm(\omega).$$

Wegen der Abklingeigenschaften des Gauß-Kerns ist ergibt sich $u \in C^\infty(D)$ mit Differenziation des Parameterintegrals (vgl. Satz 3.15) und dabei insbesondere durch Ableiten nach $t$ sowie zweimaliges Ableiten nach den $x$-Koordinaten und Aufsummieren

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int \widehat{f}(\omega)e^{-t|\omega|^2}(-|\omega|^2)e^{i\omega\cdot x}\, dm(\omega) = \Delta u(t,x).$$

2. Es gilt $\int H_t = 1$ für alle $t > 0$. Ist $f \in B(\mathbb{R}^N)$ gleichmäßig stetig, so folgt aus Satz 3.10, angewandt auf $g_r = H_{r^2}$,

$$f * H_t \to f \qquad (t \to 0)$$

gleichmäßig auf $\mathbb{R}^N$. Damit ist die Fortsetzung stetig. □

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung hat die Darstellung

$$u(t,\cdot) = (\omega \mapsto \widehat{f}(\omega)e^{-|\omega|^2 t})^\vee.$$

In ähnlicher Weise kann man eine Lösung der Wellengleichung zu den Anfangsbedingungen

$$u(0,x) = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$$

für geeignete $f, g$ finden. Man nennt das entsprechende Anfangsproblem das **Cauchy-Problem** für die Wellengleichung. Hier können wir beliebige $t \in \mathbb{R}$ betrachten, da wir mit trigonometrischen Kernen $\cos(|\omega|t)$ beziehungsweise $\sin(|\omega|t)$ arbeiten, die als Funktionen von $(t,\omega)$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ beschränkt sind. Adererseits müssen wir stärkere Bedingungen an das Abklingen von $f, g$ stellen um genügende Differenzierbarkeit der Parameterintegrale zu garantieren.

**Satz 4.3** *Es seien $f, g \in \mathscr{S}$. Dann ist durch*

$$u(t,\cdot) := \Big(\omega \mapsto \widehat{f}(\omega)\cos(|\omega|t) + \widehat{g}(\omega)\sin(|\omega|t)/|\omega|\Big)^\vee$$

*eine Lösung des Cauchy-Problems für die Wellengleichung gegeben.*

[26] Also haben wir eine Lösung des Anfangswertproblems mit Wärmeverteilung $f$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

**Beweis.** Da $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathscr{S}$ schneller als jede Potenz abklingend sind, können wir das Parameterintegral

$$u(t,x) = \int \left(\widehat{f}(\omega)\cos(|\omega|t) + \widehat{g}(\omega)\sin(|\omega|t)/|\omega|\right) e^{i\omega\cdot x}\, dm(\omega)$$

sowohl nach $t$ als auch nach $x$ beliebig oft differenzieren. Zweimaliges Ableiten nach $t$ sowie zweimaliges Ableiten nach den $x$-Koordinaten (und Aufsummieren) ergibt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \int (\widehat{f}(\omega)\cos(|\omega|t) + \widehat{g}(\omega)\sin(|\omega|t)/|\omega|)(-|\omega|^2)e^{i\omega\cdot x}\, dm(\omega) = \Delta u(t,x).$$

Fourier-Inversion zeigt

$$u(0,\cdot) = (\widehat{f})^\vee = f$$

und einmaliges Differenzieren nach $t$ sowie Fourier-Inversion ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = (\widehat{g})^\vee = g.$$

$\square$

Wir gehen nun kurz auf eine vor allem für die Quantenphysik fundamentale Aussage ein. Ist $0 \neq u \in \mathscr{S}$, so ist die Dispersion $\Delta_a u$ an der Stelle $a \in \mathbb{R}^N$ definiert durch

$$\Delta_a u := \int |x-a|^2 |u(x)|^2\, dx \Big/ \int |u|^2 .$$

$\Delta_a u$ misst in gewisser Weise, wie sehr $u$ sich in der Nähe von $a$ konzentriert.[27] Die Heisenbergsche Ungleichung besagt grob, dass $u$ und $\widehat{u}$ nicht zu beide sehr stark konzentriert sein können: Ist die Dispersion von $u$ klein, so ist die von $\widehat{u}$ groß und umgekehrt.

**Satz 4.4 (Heisenbergsche Ungleichung)** *Für $u \in \mathscr{S}_N$ und $a, \alpha \in \mathbb{R}^N$ gilt*

$$(\Delta_a u)(\Delta_\alpha \widehat{u}) \geq N^2/4.$$

**Beweis.** Beim Beweis können wir uns auf den Fall $a = \alpha = 0$ beschränken. Den allgemeinen Fall kann man durch Betrachtung von $v(x) = e^{-i\alpha x}u(x+a)$ wegen $\Delta_a u = \Delta_0 v$ und $\Delta_\alpha \widehat{u} = \Delta_0 \widehat{v}$ darauf zurückführen. Also: Nach der Greenschen Formel[28], angewandt auf $|u|^2 = u\overline{u}$ und $g(x) := |x|^2/2 = x \cdot x/2$, folgt wegen $|u|^2 \in \mathscr{S}$ und $\Delta g(x) = N$

$$\begin{aligned} N\int |u|^2 &= \int |u|^2 \Delta g = -\int \nabla g \cdot \nabla |u|^2 = -\int x \cdot \nabla(u\overline{u})(x)\, dx \\ &= -\int x \cdot (\overline{u}\nabla u + u \nabla \overline{u})(x)\, dx \leq 2\int |x| \cdot |u\nabla u|(x)\, dx \end{aligned}$$

[27] Aus Sicht der Stochastik: Ist $\int |u|^2 = 1$ und $X$ eine $|u|^2\lambda$-verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $EX$, so ist $\Delta_{EX}(u) = \mathrm{Var}(X)$.

[28] Siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/Diffgleichungen/DGL-2018.pdf, Satz 7.7.

und mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung daher

$$N^2\Big(\int |u|^2\Big)^2 \le 4\Big(\int |x|^2|u(x)|^2\,dx\Big)\Big(\int |\nabla u|^2\Big)$$

Nach Satz 3.12 ist $\int |u|^2 = \int |\widehat{u}|^2\,dm$ und nach Bemerkung 3.8 zudem

$$\begin{aligned}\int |\nabla u|^2 &= \sum_{j=1}^N \int |\partial_j u|^2 = \sum_{j=1}^N \int |(\partial_j u)\widehat{\ }|^2\,dm \\ &= \sum_{j=1}^N \int |\omega_j|^2|\widehat{u}(\omega)|^2\,dm(\omega) = \int |\omega|^2|\widehat{u}(\omega)|^2\,dm(\omega).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$N^2\Big(\int |u|^2\Big)\Big(\int |\widehat{u}|^2\,dm\Big) \le 4\Big(\int |x|^2|u(x)|^2\,dx\Big)\Big(\int |\omega|^2|\widehat{u}(\omega)|^2 dm(\omega)\Big).$$

□

**Bemerkung 4.5** Ist $u(t) = u_1(t) = e^{-t^2/2}$ die Gauß-Funktion, so gilt

$$\int t^2|u(t)|^2\,dt = \int t\cdot te^{-t^2}\,dt = -\frac{t}{2}e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int |u|^2$$

und $\widehat{u} = \sqrt{2\pi}\,u$. Also ergibt sich $\Delta_0 u = \Delta_0\widehat{u} = 1/2$ und damit Gleichheit in der Heisenbergschen Ungleichung. Man kann zeigen, dass im Falle $N = 1$ und $\alpha = 0$ Geichheit *genau* für die Familie der Gauß-Funktionen $u(t) = Ae^{-Bt^2}$ mit $A \neq 0$ und $B > 0$ vorliegt.

Eine weitere Anwendung findet die Fourier-Transformation im Zusammenhang mit der Rekonstruktion $N$-dimensionaler Funktionen per Integration über affine Hyperebenen. Die resultierende Methode findet Anwendung unter anderem in der Computertomographie.[29]

**Bemerkung 4.6** Es seien $N \ge 2$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$ eine Richtung in $\mathbb{R}^N$. Dann ist für $t \in \mathbb{R}$ die (affine) Hyperebene $E(t,\mathbf{v})$ senkrecht zu $\mathbf{v}$ durch den Punkt $t\mathbf{v}$ gegeben durch

$$E(t,\mathbf{v}) = \{x \in \mathbb{R}^N : \mathbf{v}\cdot x = t\}.$$

Dabei ist $t = \operatorname{dist}(0, E(t,\mathbf{v}))$. Ergänzt man $\mathbf{v}$ zu einer Orthonormalbasis

$$(\mathbf{v},\mathbf{W}) = (\mathbf{v},\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_{N-1})$$

des $\mathbb{R}^N$ (etwa per Gram-Schmidt-Verfahren), so ist durch $\varphi_{t,\mathbf{v}} : \mathbb{R}^{N-1} \to E(t,\mathbf{v})$ mit

$$\varphi_{t,\mathbf{v}}(u) := t\mathbf{v} + u^\top\mathbf{W} = t\mathbf{v} + \sum_{j=1}^{N-1} u_j\mathbf{w}_j \quad (u = (u_1,\ldots,u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1})$$

[29] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Radon-Transformation.

eine Parametrisierung von $E(t,\mathbf{v})$ gegeben mit $J\varphi_{t,\mathbf{v}}(u) = \mathbf{W}$. Da $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{N-1})$ ein Orthonormalsystem ist, ergibt sich

$$\mathbf{W}^\top \mathbf{W} = I_{N-1}.$$

Für $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ mit $f \circ \varphi_t \in L_1(\mathbb{R}^{N-1})$ ist das Hyperflächenintegral von $f$ auf $E(t,\mathbf{v})$ damit gegeben durch

$$\int_{E(t,\mathbf{v})} f = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(\varphi_{t,\mathbf{v}}(u))(\det \mathbf{W}^\top \mathbf{W})^{1/2}\, du = \int f(t\mathbf{v} + u^\top \mathbf{W})\, du.$$

Es sei $U = U_\mathbf{v} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ die lineare Abbildung, die die kanonischen Einheitsvektoren in das Orthonormalsystem $(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{N-1})$ überführt, also $U(x) = Ax$ mit $A = (\mathbf{v}, \mathbf{W})$. Dann ist $|\det A| = 1$ und daher gilt nach der Substitutionsregel für $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ (und für beliebiges $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{N-1}$)

$$\int f = \int f \circ U_\mathbf{v} = \int \int f(U_\mathbf{v}(t,u))\, du\, dt = \int \int f(t\mathbf{v} + u^\top \mathbf{W})\, du\, dt = \int \Big( \int_{E(t,\mathbf{v})} f \Big)\, dt.$$

**Bemerkung und Definition 4.7** Für $f \in \mathscr{S}_N$ heißt die Funktion $Rf : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(Rf)(t,\mathbf{v}) := \int_{E(t,\mathbf{v})} f \qquad ((t,\mathbf{v}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1}),$$

die **Radon-Transformierte** von $f$. Wir schreiben $\mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1})$ für die Menge aller $g : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1} \to \mathbb{C}$ mit $g_\mathbf{v} := g(\cdot, \mathbf{v}) \in C^\infty(\mathbb{R})$ und so, dass

$$\sup_{(t,\mathbf{v}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1}} |t^k g_\mathbf{v}^{(\ell)}(t)| < \infty$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt $Rf \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1})$.

Denn: (Skizze) Wegen $f \in \mathscr{S}_N$ existiert zu jedem $k$ eine Konstante $A_k > 0$ mit

$$(1 + |t|)^k (1 + |u|)^k |f(t\mathbf{v} + u^\top \mathbf{W})| \le A_k \quad (t \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^{N-1})$$

Also ist für $k \ge N$

$$(1 + |t|)^k |(Rf)(t,\mathbf{v})| \le A_k \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{du}{(1 + |u|)^k} < \infty.$$

Eine entsprechende Argumentation gilt für die Ableitungen.

Die Abbildung $R : \mathscr{S}_N \to \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1})$ heißt ($N$-dimensionale) **Radon-Transformation**.

Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage, ob $f$ durch $Rf$ eindeutig bestimmt ist, also $R$ injektiv ist, und, wenn ja, wie sich $f$ gegebenenfalls aus $Rf$ rekonstruieren lässt. Die erste Frage beantwortet

**Satz 4.8** *Es sei $f \in \mathscr{S}_N$. Dann gilt*

1. *Für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{N-1}$ ist $(Rf(\cdot,\mathbf{v}))\widehat{\ } = \widehat{f}(\cdot\,\mathbf{v})$.*
2. *Aus $Rf = 0$ folgt $f = 0$.*

**Beweis.** 1. Wegen $\mathbf{v} \perp E(t,\mathbf{v})$ und $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1$ gilt

$$t = \mathbf{v}\cdot(t\mathbf{v} + \sum_{j=1}^{N-1} u_j \mathbf{w}_j) = \mathbf{v}\cdot U_{\mathbf{v}}(t, u_1, \ldots, u_{N-1}) = \mathbf{v}\cdot U_{\mathbf{v}}(t,u)$$

für $u \in \mathbb{R}^{N-1}$. Also folgt wegen der Bewegungsinvarainz des Lebesgue-Maßes für $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(Rf(\cdot,\mathbf{v}))\widehat{\ }(s) &= \int \Big(\int_{E(t,\mathbf{v})} f\Big) e^{-ist}\,dt \\
&= \int\int f(t\mathbf{v} + u^\top \mathbf{W})\,du\,e^{-ist}\,dt \\
&= \int f(U_{\mathbf{v}}(t,u)) e^{-is\mathbf{v}\cdot U_{\mathbf{v}}(t,u)}\,d(t,u) \\
&= \int f(t,u)) e^{-is\mathbf{v}\cdot(t,u)}\,d(t,u) = \widehat{f}(s\,\mathbf{v})
\end{aligned}$$

2. Ist $Rf = 0$ so ist auch $0 = (Rf(\cdot,\mathbf{v}))\widehat{\ } = \widehat{f}(\cdot\,\mathbf{v})$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{N-1}$. Damit ist $\widehat{f} = 0$, also wegen der Injektivität der Fourier-Transformation auf $\mathscr{S}$ auch $f = 0$. □

**Bemerkung 4.9** Der erste Teil von Satz 4.8 zeigt etwa im Falle $N = 2$, dass $\widehat{f}$ genau dann auf einer Geraden durch den Ursprung verschwindet, wenn $Rf$ auf allen dazu senkrechten Geraden verschwindet. Ist $f = 0$ außerhalb einer kompakten Menge, so kann man zeigen, dass $\widehat{f}$ (und damit $f$) schon dann verschwindet, wenn $\widehat{f}$ auf einer unendlichen Menge von Geraden durch den Ursprung verschwindet.[30]

Wir wollen die Frage untersuchen, wie man $f$ aus $Rf$ rekonstruieren kann.

**Definition 4.10** Es sei $\sigma = \sigma_N$ das Oberflächenmaß der Sphäre $\mathbb{S}^{N-1}$. Die **duale Radon-Transformierte** $R^* : \mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathscr{S}_N$ ist für $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{N-1})$ definiert durch

$$(R^*h)(x) := \int_{\mathbb{S}^{N-1}} h(x\cdot\mathbf{v},\mathbf{v})\,d\sigma(\mathbf{v}) \quad (x \in \mathbb{R}^N).$$

[30] Dieses und weitere Ergebnisse in dem Zusammenhang findet man etwa im Artikel *Uniqueness and Nonuniqueness for the Radon Transform* von P.D. Lax und L. Zalcman in ihren Buch *Complex Proofs of Real Theorems*, American Mathematical Society, Providence, 2012.

Im Fall $N = 3$ lässt sich damit die Frage nach der Rekonstruktion von $f$ aus $Rf$ in sehr eleganter Weise beantworten. Unter Verwendung sphärischer Polarkoordinaten, der Substitutionsregel und des Satzes von Fubini kann man zunächst zeigen ([Ü]), dass für $f \in L_1(\mathbb{R}^3)$

$$\int f \, d\lambda_3 = \int_{\mathbb{S}^2} \int_{(0,\infty)} f(r\mathbf{v}) \, r^2 \, dr \, d\sigma(\mathbf{v}) \tag{4.1}$$

gilt.

**Satz 4.11** *Für $f \in \mathscr{S}_3$ gilt $(-\Delta R^* R)f = 8\pi^2 f$.*

**Beweis.** Nach und Satz 4.8 und Fourier-Inversion (Satz 3.12) ist $Rf(\cdot, \mathbf{v}) = (\widehat{f}(\cdot\mathbf{v}))^\vee$. Also gilt für $x \in \mathbb{R}^3$

$$(R^* Rf)(x) = \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(s\mathbf{v}) e^{isx\cdot\mathbf{v}} \, dm_1(s) \, d\sigma(\mathbf{v}).$$

Wir schreiben $S_\pm := \mathbb{S}^2 \cap \{x : \pm x_1 > 0\}$ für die rechte bzw. linke Hemisphäre. Wegen $E(-t, -\mathbf{v}) = E(t, \mathbf{v})$ und $|\mathbf{v}| = 1$ folgt wieder mit Fourier-Inversion (Satz 3.12) und mit (4.1)

$$\begin{aligned}
-\Delta(R^* Rf)(x) &= \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(s\mathbf{v}) \, s^2 |\mathbf{v}|^2 \, e^{isx\cdot\mathbf{v}} \, dm_1(s) \, d\sigma(\mathbf{v}) \\
&= \Big( \int_{S_+} \int_{\mathbb{R}_+} + \int_{S_+} \int_{\mathbb{R}_-} + \int_{S_-} \int_{\mathbb{R}_+} + \int_{S_-} \int_{\mathbb{R}_-} \Big) \widehat{f}(s\mathbf{v}) \, s^2 \, e^{isx\cdot\mathbf{v}} \, dm_1(s) \, d\sigma(\mathbf{v}) \\
&= 2 \int_{\mathbb{S}^2} \int_{(0,\infty)} \widehat{f}(s\mathbf{v}) \, s^2 \, e^{isx\cdot\mathbf{v}} \, dm_1(s) \, d\sigma(\mathbf{v}) \\
&= 2(2\pi)^2 \int \widehat{f}(\omega) e^{ix\cdot\omega} \, dm_3(\omega) = 8\pi^2 \, (\widehat{f})^\vee(x) = 8\pi^2 f(x).
\end{aligned}$$

□

In Bemerkung 3.24 haben wir angedeutet, wie die Fourier-Transformation auf den Raum $\mathscr{S}'$ der temperierten Distributionen ausgedehnt werden kann. Dies kann genutzt werden, um Sobolev-Räume beliebiger reeller Ordnung $s$ zu definieren.

**Bemerkung 4.12** Es sei $s \in \mathbb{R}$. Ist $g$ mit $\omega \mapsto (1 + |\omega|^2)^{s/2} g(\omega) \in \mathscr{L}_2$, so ist $\varphi \cdot g$ integrierbar für alle $\varphi \in \mathscr{S}$ und durch $v(\varphi) := \int \varphi g$ eine temperierte Distribution $v = v_g$ gegeben. Damit definiert man den **Sobolev-Raum** $H^s$ der Ordnung $s$ als den Raum aller $u \in \mathscr{S}'$ so, dass $\widehat{u} = v_g$ für eine Funktion $g$ wie oben. Identifiziert man $\widehat{u}$ und $g$, so ist durch

$$\langle u_1, u_2 \rangle := \int (1 + |\omega|^2)^s \widehat{u_1}(\omega) \overline{\widehat{u_2}(\omega)} \, dm(\omega)$$

ist ein Skalarprodukt auf $H^s$ (wohl-)definiert, mit dem $H^s$ zu einem Hilbertraum wird.

# 5 Laplace-Transformation

Wir haben bereits früher bemerkt, dass Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ glatt sind, wenn $f \in L_1$ stark abklingt. Ist $N = 1$ und verschwindet $f$ sogar außerhalb eines kompakten Intervalls $[-m, m]$, so gilt für $a_k := \int t^k f(t)\,dt$

$$|a_k| \leq \int |t^k f(t)|\,dt \leq m^k \|f\|_1 \,.$$

Für alle festen $z, t \in \mathbb{C}$ konvergiert die Exponentialreihe

$$e^{-zt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-zt)^\nu / \nu! \,.$$

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz ergibt sich

$$(Lf)(z) := \int e^{-zt} f(t)\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu z^\nu / \nu!,$$

und zwar (als Potenzreihe mit Konvergenzradius $\infty$) mit gleichmäßiger Konvergenz auf kompakten Mengen in $\mathbb{C}$.

**Bemerkung und Definition 5.1** Ist $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, so heißt $f : \Omega \to \mathbb{C}$ **analytisch**, falls $f$ in jedem Punkt $x \in \Omega$ lokal durch eine Potenzreihe dargestellt wird, also falls zu jedem $x \in \Omega$ eine Folge $(c_k(x))$ in $\mathbb{C}$ existiert mit

$$f(x + h) = \sum_{\nu=0} c_\nu(x) h^\nu$$

für $|h|$ genügend klein. Potenzreihen sind stets beliebig oft differenzierbar auf ihrem Konvergenzkreis und es gilt $c_k(x) = f^{(k)}(x)/k!$ (mit anderen Worten: eine Potenzreihe ist die Taylor-Reihe der Grenzfunktion).
In der Funktionentheorie zeigt man, dass stetige komplexe Differenzierbarkeit[31] auf offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{C}$ schon Analytizität impliziert und dass für alle $x \in \Omega$ der Konvergenzradius der Potenzreihe um $x$ stets $\geq \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ ist. Man nennt auf $\Omega \subset \mathbb{C}$ komplex stetig differenzierbare Funktionen **holomorph** (auf $\Omega$) und setzt

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph}\}.$$

Im Falle $\Omega = \mathbb{C}$ spricht man auch von ganzen Funktionen. Ganze Funktionen sind damit um jeden Punkt in ihre Taylor-Reihe entwickelbar und dies mit Konvergenzradius $\infty$. Die Funktion $Lf$ von oben ist eine ganze Funktion.

**Definition 5.2** Wir betrachten kompakte Mengen $K$ in $\mathbb{C}$ und komplexe Maße $\mu$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{C})$ mit Träger in $K$, also $|\mu|(K) = |\mu|(\mathbb{C})$, und schreiben $M(K)$ für die Menge dieser Maße. Für $\mu \in M(K)$ heißt die Funktion $L\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$(L\mu)(z) := \int e^{-zw}\, d\mu(w) \quad (z \in \mathbb{C})$$

[31] Auf die Stetigkeit der Ableitung kann man sogar verzichten.

die **Laplace-Transformierte** von $\mu$. Im Falle $\mu = f\lambda$ mit $f$ wie oben schreibt man $Lf := L(f\lambda)$.

**Bemerkung und Definition 5.3** Sind $\mu \in M(K)$ und $a_k := \int w^k \, d\mu(w)$, so sieht man wie oben, dass

$$(L\mu)(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu z^\nu / \nu!$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Damit ist $L\mu$ eine ganze Funktion.
Eine ganze Funktion $g$ heißt **vom Exponentialtyp**, falls Konstanten $a, C \geq 0$ so existieren, dass

$$|g(z)| \leq Ce^{a|z|} \quad (z \in \mathbb{C})$$

gilt. Mit $m := \max_{w \in K} |w|$ ist

$$|(L\mu)(z)| \leq \int e^{-\mathrm{Re}(zw)} \, d|\mu|(w) \leq \int e^{|zw|} \, d|\mu|(w) \leq e^{m|z|} |\mu|(K) \quad (z \in \mathbb{C}),$$

also $L\mu$ vom Exponentialtyp. Weiter gilt für $z, h \in \mathbb{C}$

$$(L\mu)(z+h) = \int e^{-hw} e^{-zw} \, d\mu(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h^\nu}{\nu!} (-1)^\nu \int e^{-zw} w^\nu \, d\mu(w)$$

und damit

$$(L\mu)^{(k)}(z) = (-1)^k \int e^{-zw} \, w^k d\mu(w) \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Mit $p_k(w) := w^k$ ist also $(L\mu)^{(k)} = (-1)^k L(p_k \mu)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Wir betrachten nun wieder Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, allerdings nur solche, die auf der negativen Halbachse verschwinden.

**Bemerkung und Definition 5.4** 1. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ setzen wir $f_a := f \exp(-a\,\cdot)$ und damit

$$\mathscr{E} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f|_{(-\infty,0)} = 0, \; f_a \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})\}.$$

Weiter schreiben wir $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ für die offene rechte Halbebene. Ist $f \in \mathscr{E}$, so ist die **Laplace-Transformierte** $Lf : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ von $f$ definiert durch

$$(Lf)(z) := (Lf)(a + i\omega) := \int f(t) e^{-zt} \, dt = \widehat{f_a}(\omega) \quad (z = a + i\omega \in \mathbb{C}_+).$$

Außerdem ist $t \mapsto |t^k f(t)| e^{-\alpha t}$ für jedes $\alpha > 0$ eine integrierbare Majorante für die Familie $(t \mapsto (-t)^k f(t) e^{-zt})_{\mathrm{Re}(z) \geq \alpha}$. Damit erhält man mit dem Satz über die Differenziation von Parameterintegralen wieder die komplexe Differenzierbarkeit beliebiger Ordnung von $Lf$ auf $\mathrm{Re}(z) > \alpha$, also auch auf $\mathbb{C}_+$. Folglich ist die Laplace-Transformation $L$ eine lineare Abbildung von $\mathscr{E}$ nach $H(\mathbb{C}_+)$ und es gilt

$$(Lf)^{(k)} = (-1)^k L(p_k f) \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **lokal integrierbar** (auf $\Omega$), falls $f1_K$ für alle kompakten $K \subset \Omega$ integrierbar ist. Wir schreiben $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für den Raum der auf $\Omega$ lokal integrierbaren Funktionen. Ist $M \subset \mathbb{C}$ unbeschränkt, so nennen wir eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ **vom Subexponentialtyp**, falls für alle $\varepsilon > 0$ Konstanten $C, R > 0$ so existieren, dass $|f(w)| \le Ce^{\varepsilon|w|}$ für $|w| > R$. Ist $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ vom Subexponentialtyp mit $f|_{(-\infty,0)} = 0$, so ist $f \in \mathscr{E}$.

Denn: Ist $a > 0$, so existieren $C, R > 0$ so, dass $|f(t)| \le Ce^{ta/2}$ für $t > R$. Also ist $\int_R^\infty |f(t)|e^{-at}\,dt < \infty$ und wegen $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ist auch $\int_0^R |f(t)|e^{-at}\,dt < \infty$.

Damit existiert die Laplace-Transformierte insbesondere für solche $f$.
3. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ schreiben wir im Weiteren

$$f_+ := f1_{[0,\infty)}.$$

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und vom Subexponentialtyp mit $f'_+ := (f')_+ \in \mathscr{E}$, so ergibt sich

$$(Lf'_+)(z) = \int_0^\infty f'(t)e^{-zt}\,dt = f(t)e^{-zt}\Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty f(t)(-z)e^{-zt}\,dt = z(Lf_+)(z) - f(0).$$

4. Ist $f \in \mathscr{L}_1$ mit $f|_{(-\infty,0)} = 0$, so ist $f \in \mathscr{E}$ und $Lf$ durch

$$(Lf)(i\omega) := \widehat{f}(\omega) = \int f(t)e^{-i\omega t}\,dt \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

zu einer auf der abgeschlossenen Halbebene $\{\mathrm{Re}(z) \ge 0\}$ beschränkten und stetigen Funktion fortsetzbar (dominierte Konvergenz). In diesem Sinne kann man die Fourier-Transformierte von $f$ als die Randfunktion von $Lf$ auffassen.

**Beispiel 5.5** 1. Ist $a \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(a) \le 0$, so gilt $\exp(a\,\cdot)_+ \in \mathscr{E}$ und für $z \in \mathbb{C}_+$

$$(L\exp(a\,\cdot)_+)(z) = \int_0^\infty e^{(a-z)t}\,dt = \frac{1}{a-z}e^{(a-z)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{z-a}.$$

Mit $a = 0$ ergibt sich insbesondere $(L1_{[0,\infty)})(z) = 1/z$.
2. Ist $b \in \mathbb{R}$ so folgt aus 1. wegen $\cos(bt) = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2$ für $z \in \mathbb{C}_+$ auch

$$(L\cos(b\,\cdot)_+)(z) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-ib} + \frac{1}{z+ib}\Big) = \frac{z}{z^2+b^2}$$

und entsprechend

$$(L\sin(b\,\cdot)_+)(z) = \frac{b}{z^2+b^2}.$$

**Definition 5.6** Wir betrachten im Weiteren orientierte Integrale auf Strecken bzw. Geraden und auf Kreisen in $\mathbb{C}$. Dazu definieren wir zunächst Wegintegrale. Ist $I = [\alpha, \beta]$ und $\gamma : I \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so heißt für $g : \gamma(I) \to \mathbb{C}$ so, dass $(g \circ \gamma)\gamma'$ integrierbar ist,

$$\int_\gamma g := \int_\gamma g(s)\,ds := \int (g \circ \gamma)\gamma' = \int_\alpha^\beta (g(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

**Wegintegral** von $g$ längs $\gamma$. Sind $a, \zeta \in \mathbb{C}$ und $\gamma(t) := a + t\zeta$, so schreiben wir

$$\int_{a+\alpha\zeta}^{a+\beta\zeta} g := \int_\gamma g = \zeta \int_\alpha^\beta g(a + t\zeta)\, dt$$

für das orientierte Integral von $g$ längs der Strecke von $a+\alpha\zeta$ nach $a+\beta\zeta$ (nach der Substitutionsregel ist das Integral unabhängig von der Wahl der affin-linearen Parametrisierung $\gamma$ der orientierten Strecke). Speziell ist für $b \in \mathbb{C}$ und $\zeta := b - a$ mit $I = [0, 1]$

$$\int_a^b g = (b - a) \int_0^1 g(a + (b - a)t)\, dt.$$

Dabei gilt $\int_a^b g = -\int_b^a g$. In analoger Weise definieren wir orientierte Integrale über Kreisbögen. Wir setzen für $\beta - \alpha \leq 2\pi$

$$S_\alpha^\beta := \{e^{it} : \alpha \leq t \leq \beta\}$$

und für $c \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ mit $\gamma(t) := c + \rho e^{it}$

$$\int\limits_{c+\rho S_\alpha^\beta} g := \int_\gamma g = \rho i \int_\alpha^\beta g(c + \rho e^{it}) e^{it}\, dt.$$

Oft verwendet man die Abschätzung

$$\Big| \int\limits_{c+\rho S_\alpha^\beta} g \Big| \leq \rho \int_\alpha^\beta |g(c + \rho e^{it})|\, dt \leq \sup_{s \in c+\rho S_\alpha^\beta} |g(s)| \cdot \rho(\beta - \alpha).$$

Gelegentlich betrachten wir auch orientierte Integrale auf (Halb-)Geraden: Ist $I = (\alpha, \beta)$ mit $\beta = \infty$ oder $\alpha = -\infty$ und $\gamma(t) := a + t\zeta$ für $t \in I$, so ist $\gamma(I)$ eine Halbgerade oder Gerade. Ist $g : a + I\zeta \to \mathbb{C}$ so, dass $g \circ \gamma$ integrierbar auf $I$ ist, so setzen wir wieder

$$\int_{a+\alpha\zeta}^{a+\beta\zeta} g := \int_{a+\alpha\zeta}^{a+\beta\zeta} g(s)\, ds := \zeta \int_\alpha^\beta g(a + t\zeta)\, dt.$$

**Bemerkung 5.7** Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $g \in H(\Omega)$.
1. Als Spezialfälle des Cauchyschen Integralsatzes[32] ergeben sich für $a, b, c \in \mathbb{C}$

- (Lemma von Goursat) Enthält $\Omega$ die konvexe Hülle von $a, b, c$ (also das ausgefüllte Dreieck mit den Ecken $a, b, c$), so gilt

$$\int_a^b g + \int_b^c g + \int_c^a g = 0. \tag{5.1}$$

- (Cauchyscher Integralsatz für Kreissegmente) Gilt $a = c + \rho e^{i\alpha}$, $b = c + \rho e^{i\beta}$ und enthält $\Omega$ die von der Strecke von $a$ nach $b$ und dem Kreisbogen $c + \rho S_\alpha^\beta$ berandete konvexe Menge, so gilt

$$\int_a^b g = \int\limits_{c+\rho S_\alpha^\beta} g. \tag{5.2}$$

[32]Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Cauchyscher_Integralsatz.

Damit kann man zeigen ([Ü]): Enthält $\Omega$ den Sektor

$$W_\alpha^\beta := \{z = re^{it} : r \geq 0,\ \alpha \leq t \leq \beta\}$$

und existieren Konstanten $s > 1$ und $R, C > 0$ mit $|g(w)| \leq C|w|^s$ für $w \in W_\alpha^\beta$, $|w| > R$, so gilt für $z, z' \in W_\alpha^\beta \setminus \{0\}$

$$\int_0^{\infty z} g = \int_0^{\infty z'} g. \tag{5.3}$$

2. (Cauchysche Integralformel für Kreissegmente) Es seien $c \in \mathbb{C}$ und $\rho > 0$. Gilt $a = c + \rho e^{i\alpha}$, $b = c + \rho e^{i\beta}$ und enthält $\Omega$ die von der Strecke von $a$ nach $b$ und dem Kreisbogen $c + \rho S_\alpha^\beta$ berandete konvexe Menge $K$, so gilt für alle $z$ im Inneren von $K$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big( \int\limits_{c+\rho S_\alpha^\beta} + \int_b^a \Big) \frac{g(s)}{s-z}\, ds\,.$$

**Beispiel 5.8** Sind $n \in \mathbb{N}_0$ und $f(t) := t^n 1_{[0,\infty)}(t)$, so ist $f \in \mathscr{E}$ und für $z \in \mathbb{C}_+$ mit (5.3)

$$z^{n+1}(Lf)(z) = z\int_0^\infty (zt)^n e^{-zt}\, dt = \int_0^{\infty z} s^n e^{-s}\, ds = \int_0^\infty s^n e^{-s}\, ds = \Gamma(n+1),$$

also $(Lf)(z) = \Gamma(n+1)/z^{n+1} = n!/z^{n+1}$ auf $\mathbb{C}_+$.[33]

Wir wollen nun wieder die Frage nach der Rekonstruktion der Funktion $f$ aus $Lf$ untersuchen. Zunächst formulieren wir ein weiteres Ergebnis über die Rekonstruktion von $f$ aus der Fourier-Transformation im skalaren Fall $N = 1$.

**Bemerkung 5.9** (vgl. Bemerkung 2.10) Ist $f \in L_1(\mathbb{R})$ mit $t \mapsto f(t)/t \in L_1(\mathbb{R})$, so gilt

$$(\widehat{f} 1_{[-R,R]})^\vee(0) = \int_{-R}^R \widehat{f}(\omega)\, dm(\omega) \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Denn: Ist $g(t) := f(t)/t$, so ist $g \in L_1$ und mit Differenziation des Parameterintegrals

$$(\widehat{g})'(\omega) = -i\widehat{f}(\omega) \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und dem Riemann-Lebesgue-Lemma gilt

$$\int_{-R}^R \widehat{f}(\omega)\, d\omega = i(\widehat{g}(R) - \widehat{g}(-R)) \to 0 \quad (R \to \infty).$$

[33] Dies gilt genauso für allgemeine Exponenten $\alpha$ mit $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$ statt $n$, wenn man für $z^{\alpha+1}$ den Hauptzweig auf $\mathbb{C}_+$ wählt.

**Satz 5.10** *Es sei* $f \in L_1(\mathbb{R})$. *Existieren* $c_\pm \in \mathbb{C}$ *so, dass* $t \mapsto (f(t)-c_+)1_{[0,\infty)}(t)/t$ *und* $t \mapsto (f(t)-c_-)1_{(-\infty,0]}(t)/t$ *lokal integrierbar sind, so gilt*

$$\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\omega)\,dm(\omega) \to \frac{1}{2}(c_+ + c_-) \quad (R \to \infty).$$

**Beweis.** Es gilt (vgl. Beispiel 3.2)

$$\int_{-R}^{R} e^{-i\omega t}\,dm(\omega) = \frac{\sin(Rt)}{\pi t} =: u_R(t),$$

also

$$\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\omega)\,dm(\omega) = \int_{-R}^{R} \int f(t)e^{-it\omega}\,dt\,dm(\omega) = \int u_R(t)f(t)\,dt.$$

Während $u_R$ nicht absolut integrierbar ist (also $u_R \notin \mathscr{L}_1$), existiert das uneigentliche Integral[34] auf $\mathbb{R}$ und es gilt[35]

$$\int_0^\infty u_R = \int_{-\infty}^0 u_R = \frac{1}{2}$$

Also folgt

$$\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\omega)\,dm(\omega) - \frac{1}{2}(c_+ + c_-) = \int_0^\infty u_R(t)\big(f(t)-c_+\big)\,dt + \int_{-\infty}^0 u_R(t)\big(f(t)-c_-\big)\,dt.$$

Es reicht also zu zeigen, dass die beiden Integrale auf der rechten Seite für $R \to \infty$ abklingend sind. Aus Symmetriegründen reicht es wiederum, dies für das erste zu zeigen.
Sind $R, T \geq 1$, so gilt

$$\Big|\int_T^\infty u_R f\Big| \leq \int_T^\infty |f| \quad \text{und} \quad \int_T^\infty u_R = \int_{RT}^\infty u_1.$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert also ein $T \geq 1$ so, dass für alle $R \geq 1$

$$\Big|\int_T^\infty u_R(f-c_+)\Big| < \varepsilon.$$

Wie oben ist für $f_T := (f-c_+)1_{[0,T]}$

$$\int_0^T u_R(t)(f(t)-c_+)\,dt = \int u_R(t)f_T(t)\,dt = \int_{-R}^{R} \widehat{f_T}(\omega)\,dm(\omega).$$

Nach Bemerkung 5.9, angewandt auf $f_T$, konvergiert die rechte Seite gegen 0 für $R \to \infty$. Also ist

$$\Big|\int_0^\infty u_R(f-c_+)\Big| < 2\varepsilon$$

für $R$ genügend groß. □

---

[34] $h$ heißt uneigentlich integrierbar auf $[\alpha,\infty)$, falls $\int_\alpha^\infty h := \lim_{t\to\infty}\int_\alpha^t h$ existiert. Entsprechend heißt $h$ uneigentlich integrierbar auf $(-\infty,\beta]$, falls $\int_{-\infty}^{v} h := \lim_{t\to-\infty}\int_t^\beta h$ existiert. Darüber hinaus heißt $h$ uneigentlich integrierbar auf $(-\infty,\infty)$, falls $h$ uneigentlich integrierbar auf $(-\infty,0]$ und $[0,\infty)$ ist, und dann ist $\int_{-\infty}^\infty h := \int_0^\infty h + \int_{-\infty}^0 h$.

[35] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Integralsinus.

**Bemerkung 5.11** Ähnlich wie in Satz 2.11 sieht man: Ist $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ Hölder-stetig an der Stelle $t$, so ist $s \mapsto (f(s)-f(t))/(s-t)$ lokal integrierbar auf $\mathbb{R}$. Nach Satz 5.10, angewandt auf $f(\cdot+t)$, gilt wegen $(f(\cdot+t))\widehat{\ }(\omega) = e^{it\omega}\widehat{f}(\omega)$ in diesem Fall

$$(\widehat{f}1_{[-R,R]})^{\vee}(t) = \int_{-R}^{R} \widehat{f}(\omega)e^{it\omega}\,dm(\omega) \to f(t) \quad (R\to\infty).$$

Hat $f$ an $t$ eine Hölder-Sprungstelle, so gilt

$$(\widehat{f}1_{[-R,R]})^{\vee}(t) = \int_{-R}^{R} \widehat{f}(\omega)e^{it\omega}\,dm(\omega) \to \frac{1}{2}(f(t_+)+f(t_-)) \quad (R\to\infty).$$

Als unmittelbare Anwendung ergibt sich für Laplace-Transformierte

**Satz 5.12 (Laplace-Inversion)** *Es seien $f \in \mathscr{E}$ und $t \in \mathbb{R}$. Ist $f|_{[0,\infty)}$ Hölder-stetig an $t$ im Falle $t \geq 0$, so gilt für alle $a > 0$ und $R \to \infty$*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR} (Lf)(s)e^{st}\,ds \to \begin{cases} f(t), & \textit{falls } t \neq 0 \\ f(0)/2, & \textit{falls } t = 0 \end{cases}.$$

**Beweis.** Nach Bemerkung 5.11 gilt wegen $(Lf)(a+i\,\cdot) = \widehat{f_a}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR} (Lf)(s)e^{st}\,ds = e^{at}\int \widehat{f_a}(\omega)e^{it\omega}\,dm(\omega) \to \begin{cases} e^{at}f_a(t) = f(t), & \text{falls } t \neq 0 \\ f_a(0)/2 = f(0)/2, & \text{falls } t = 0 \end{cases}.$$

□

**Beispiel 5.13** Ist $f = 1_{[0,\infty)}$, so gilt $(Lf)(z) = 1/z$ auf $\mathbb{C}_+$ nach Beispiel 5.5 bzw. 5.8. Hier ergibt sich für $a > 0$ mit dem Hauptzweig des Logarithmus[36]

$$\begin{aligned} \int_{a-iR}^{a+iR} \frac{ds}{s} &= \log(a+iR) - \log(a-iR) \\ &= i\arg(a+iR) - i\arg(a-iR)) \to i\pi/2 - (-i\pi/2) = i\pi \quad (R\to\infty) \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR} \frac{ds}{s} \to \frac{1}{2} \quad (R\to\infty).$$

Wir untersuchen nun das Randverhalten von $(Lf)(z)$ bei Annäherung von $z$ an 0. Ist $f \in \mathscr{L}_1$ mit $f|_{(0,\infty)} = 0$, so ist, wie in Bemerkung und Definition 5.4 erwähnt, $Lf$ fortsetzbar zu einer auf $\{\mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ stetigen Funktion mit $(Lf)(i\omega) = \widehat{f}(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$, also insbesondere

$$(Lf)(0) = \widehat{f}(0) = \int_0^{\infty} f.$$

[36] also $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ und $\arg(z) = \theta$, wobei $z = |z|e^{i\theta}$ mit $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$

Man kann sich die Frage stellen, ob umgekehrt die stetige Fortsetzbarkeit von $Lf$ an der Stelle 0 schon die Existenz des ggfs. uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty f$ impliziert. Wir zeigen, dass unter einer starken Fortsetzbarkeitsbedingung eine entsprechende Aussage gilt, die unter Anderem beim Beweis des Primzahlsatzes im nächsten Abschnitt wichtig sein wird.

**Satz 5.14 (Ingham-Karamata)** *Es sei $f \in \mathscr{E}$ beschränkt. Existieren eine offene Obermenge $U$ der abgeschlossenen Halbebene $\{\mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ und eine Funktion $g \in H(U)$ mit $Lf = g|_{\mathbb{C}_+}$, so ist $f$ uneigentlich integrierbar und es gilt*

$$g(0) = \int_0^\infty f.$$

**Beweis.** Es sei $M := \sup_{t\geq 0} |f(t)|$. Für $0 < T < \infty$ setzen wir $g_T := L(f1_{[0,T]})$. Da das Maß $f1_{[0,T]}\lambda$ einen kompakten Träger hat, ist $g_T$ nach Bemerkung und Definition 5.3 eine ganze Funktion. Wir zeigen: Für alle $\rho > 0$ gilt

$$\limsup_{T\to\infty} |g(0) - g_T(0)| \leq 2M/\rho.$$

Damit ergibt sich $g_T(0) \to g(0)$ für $T \to \infty$. Dies entspricht der Behauptung.
Es sei also $\rho > 0$. Dann existiert ein $\delta = \delta(\rho) > 0$ so, dass

$$K = K(\rho) := \rho B \cap \{\mathrm{Re}(z) \geq -\delta\} \subset U.$$

Ist $a = \rho e^{i\alpha} \in \partial K$ mit $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ so, dass $\mathrm{Re}(a) = -\delta$, so gilt für

$$h_\rho(z) := g(z)e^{zT}(1 + z^2/\rho^2) \quad \text{und} \quad h_{T,\rho}(z) := g_T(z)e^{zT}(1 + z^2/\rho^2)$$

nach der Cauchyschen Integralformel für Kreissegmente

$$(g - g_T)(0) = (h_\rho - h_{T,\rho})(0) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\rho S^\alpha_{-\alpha}} + \int_a^{\overline{a}}\Big) s^{-1}(h_\rho - h_{T,\rho})(s)\, ds.$$

Wir schreiben $x := \mathrm{Re}(z)$. Für $|z| = \rho$ ergibt sich

$$|z^{-1}e^{zT}(1 + z^2/\rho^2)| = e^{xT}|\overline{z} + z|/\rho^2 = 2e^{xT}|x|/\rho^2.$$

Ist $x > 0$, so gilt

$$|g(z) - g_T(z)| = \Big|\int_T^\infty f(t)e^{-zt}\, dt\Big| \leq M\int_T^\infty e^{-xt}\, dt = \frac{Me^{-xT}}{x}.$$

Also folgt

$$\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho S^{\pi/2}_{-\pi/2}} s^{-1}(h_\rho - h_{T,\rho})(s)\, ds\Big| \leq \sup_{s\in\rho S^{\pi/2}_{-\pi/2}} |s^{-1}(h_\rho - h_{T,\rho})(s)| \cdot \frac{\rho\pi}{2\pi} \leq \frac{M}{\rho}.$$

Für $x < 0$ gilt

$$|g_T(z)| = \Big|\int_0^T f(t)e^{-zt}\, dt\Big| \leq M\int_{-\infty}^T e^{-xt}\, dt = \frac{Me^{-xT}}{|x|}$$

und damit wie oben

$$\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho S_{\pi/2}^{-\pi/2}} s^{-1} h_{T,\rho}(s)\, ds\Big| \le \frac{M}{\rho}.$$

Da $h_{T,\rho}$ ganz ist, gilt nach (5.2)

$$\int_{\rho S_{\pi/2}^{-\pi/2}} s^{-1} h_{T,\rho}(s)\, ds = \Big(\int_{\rho S_{\pi/2}^{\alpha}} + \int_a^{\overline{a}} + \int_{\rho S_{-\alpha}^{-\pi/2}}\Big) s^{-1} h_{T,\rho}(s)\, ds.$$

Zum Nachweis von $\limsup_{T\to\infty} |g(0) - g_T(0)| \le 2M/\rho$ reicht damit zu zeigen, dass

$$\Big(\int_{\rho S_{\pi/2}^{\alpha}} + \int_a^{\overline{a}} + \int_{\rho S_{-\alpha}^{-\pi/2}}\Big) s^{-1} g(s)(1 + s^2/\rho^2) e^{sT}\, ds \to 0 \quad (T \to \infty)$$

gilt. Dies ergibt sich aus dem Satz von der dominierten Konvergenz, da der Integrand wegen $|e^{zT}| \le 1$ für $\mathrm{Re}\,(z) \le 0$ gleichmäßig bzgl. $T$ beschränkt auf der kompakten Menge $\rho S_{\pi/2}^{\alpha} \cup \{a + t(\overline{a} - a) : t \in [0,1]\} \cup \rho S_{-\alpha}^{-\pi/2}$ ist und für jede Folge $0 < T_n \to \infty$ die Funktionenfolge $(\exp(T_n\, \cdot))_n$ auf $\{\mathrm{Re}(z) < 0\}$ punktweise gegen 0 konvergiert. $\square$

Der Satz von Plancherel (Satz 3.20) zeigt, dass die Fourier-Transformation zu einem isometrischen Isomorphismus $T : L_2 \to L_2(m)$ fortgesetzt werden kann. Wir wollen nun eine ähnliche Aussage für die Laplace-Transformation formulieren. Dazu setzen wir

$$L_2(\mathbb{R}_+) := \{f \in L_2(\mathbb{R}) : f 1_{[0,\infty)} = f\}.$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt $f \in \mathscr{E}$ für $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Damit ist die Laplace-Transformation $L : L_2(\mathbb{R}_+) \to H(\mathbb{C}_+)$ (wohl-)definiert. Außerdem gilt mit dem Satz von Plancherel wegen $(Lf)(a + i\,\cdot) = \widehat{f}_a$

$$\int |(Lf)(a + i\,\cdot)|^2\, dm = \int |\widehat{f}_a|^2\, dm = \int_0^\infty |f_a|^2 \le \int_0^\infty |f|^2 = \|f\|_2^2.$$

Setzt man für $p \ge 1$

$$H^p(\mathbb{C}_+) := \Big\{g \in H(\mathbb{C}_+) : \|g\|^p := \sup_{a>0} \int |g(a + i\,\cdot)|^p\, dm < \infty\Big\},$$

so ist $(H^p(\mathbb{C}_+), \|\cdot\|)$ ein normierter Raum[37] und $Lf \in H^2(\mathbb{C}_+)$ mit $\|Lf\| \le \|f\|_2$ für alle $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Ist $g \in H^2(\mathbb{C}_+)$ und $L^*g := T^{-1}(g(1 + i\,\cdot))\exp$, so gilt

$$L^*Lf = (T^{-1}\widehat{f}_1)\exp = f_1 \exp = f \qquad (f \in L_2(\mathbb{R}_+)).$$

Wir zeigen (mit nicht prüfungsrelevantem Beweis), dass auch $LL^*g = g$ für alle $g \in H^2(\mathbb{C}_+)$ gilt und damit den

**Satz 5.15 (Paley-Wiener)** *Die Laplace-Transformation $L$ ist ein isometrischer Isomorphismus von $(L_2(\mathbb{R}_+, \|\cdot\|_2)$ auf $(H^2(\mathbb{C}_+), \|\cdot\|)$.*

[37] Die Räume $H^p(\mathbb{C}_+)$ sollten nicht verwechselt werden mit den Sobolov-Räumen $H^s$.

**Beweis.** Wir müssen noch beweisen, dass $L$ surjektiv ist und dass $\|Lf\| \geq \|f\|$ für alle $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$ gilt. Es seien $g \in H^2(\mathbb{C}_+)$ und $a > 0$. Ist $I_a$ das Intervall zwischen $a$ und 1, so ergibt sich mit dem Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{I_a} |g(u+i\omega)|^2 \, du \, dm(\omega) \leq |a-1| \cdot \|g\|,$$

also $\omega \mapsto \int_{I_a} |g(\cdot + i\omega)|^2 \in L_1$. Daraus ergibt sich die Existenz einer Folge $(R_j)$ mit $R_j \to \infty$ und

$$\int_{I_a} |g(\cdot \pm iR_j)|^2 \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Ist

$$\Phi_j^{\pm}(a,t) := \int_{1 \pm iR_j}^{a \pm iR_j} g(s) e^{st} \, ds \quad (t \in \mathbb{R},\, j \in \mathbb{N}),$$

so folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|\Phi_j^{\pm}(a,t)|^2 \leq \int_{I_a} |g(\cdot \pm iR_j)|^2 \cdot \int_{I_a} e^{2ut} \, du$$

und damit $\Phi_j^{\pm}(a,t) \to 0$ für $j \to \infty$. Mit

$$\Psi_j(a,t) := \int_{a - iR_j}^{a + iR_j} g(s) e^{st} \, ds \quad (t \in \mathbb{R},\, j \in \mathbb{N})$$

folgt aus dem Lemma von Goursat, angewandt auf die beiden Dreiecke mit Ecken $a - iR_j$, $a + iR_j$, $1 + iR_j$ bzw. $1 - iR_j$, $a - iR_j$, $1 + iR_j$,

$$\Psi_j(a,t) - \Phi_j^{+}(a,t) - \Psi_j(1,t) + \Phi_j^{-}(a,t) = 0.$$

und damit

$$\Psi_j(a,t) - \Psi_j(1,t) \to 0 \quad (j \to \infty). \tag{5.4}$$

Nach Voraussetzung ist $g_a := g(a + i\,\cdot) \in L_2$ und mit dem Satz von Plancherel gilt wegen $\exp(-a\,\cdot)\Psi(a,\cdot) = (g_a 1_{[-R_j,R_j]})^{\vee}$

$$\|T^{-1}(g_a) - \exp(-a\,\cdot)\Psi_j(a,\cdot)\|_2 \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Insbesondere konvergiert eine Teilfolge von $\big(\exp(-a\,\cdot)\Psi_j(a,\cdot)\big)_j$ fast überall gegen $T^{-1}g_a$. Ist $f := L^* g = T^{-1}(g_1)\exp$, so gilt daher wegen (5.4)

$$f = T^{-1}(g_a)\exp(a\,\cdot) \qquad (a > 0). \tag{5.5}$$

Mit dem Satz von Plancherel folgt

$$\int e^{-2at}|f(t)|^2 \, dt = \|T^{-1}g_a\|_2^2 = \|g_a\|_2^2 \leq \|g\|^2 \quad (a > 0).$$

Für $a \to \infty$ ergibt sich $f = 0$ fast überall auf $(-\infty, 0)$ und für $a \to 0$

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{\infty} |f|^2 \leq \|g\|^2.$$

Aus (5.5) folgt damit insbesondere $T^{-1}g_a \in L_1$ für alle $a > 0$. Nach dem Satz von Plancherel ist dann $g_a = (T^{-1}g_a)\widehat{\ }$, also

$$(Lf)(a+i\omega) = \int_0^\infty f(t)e^{-(a+i\omega)t}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt = g_a(\omega) = g(a+i\omega).$$

Damit gilt auch $\|Lf\| = \|g\| \geq \|f\|_2$. Da jede Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$ von der Form $f = L^*g$ ist (nämlich für $g = Lf$), gilt die Ungleichung für alle $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$. $\square$

**Bemerkung 5.16** Es gibt eine Reihe weiterer Sätze vom Paley-Wiener Typ. Eine Variante besagt, dass für alle $a > 0$ die Laplace-Transformation eine surjektive Abbildung vom Raum $\mathscr{L}_2(-a,a)$ auf dem Raum der ganzen Funktionen $g$ vom Exponentialtyp $\leq a$ [38] mit $g|_{\mathbb{R}} \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R})$ darstellt.[39]

[38]Die ganze Funktion $g$ heißt vom Exponentialtyp $\leq a$, falls eine Konstante $C > 0$ existiert mit $|g(z)| \leq Ce^{a|z|}$ für $z \in \mathbb{C}$ gilt.
[39]Siehe etwa W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1987.

# 6 Eine Anwendung: Beweis des Primzahlsatzes

Wir wollen in diesem Abschnitt den Satz von Ingham-Karamata nutzen, um eine fundamentale Aussage über die asymptotische Häufigkeit der Primzahlen innerhalb der natürlichen Zahlen zu beweisen, den Primzahlsatz. Der Satz wurde 1896 gleichzeitig und unabhängig von de la Vallée-Poussin und Hadamard bewiesen.

Ist $I = (a, \infty)$ und sind $f, g : I \to \mathbb{C}$, so schreibt man $f(x) \sim g(x)$, falls $f(x)/g(x) \to 1$ für $x \to \infty$ gilt. Bezeichnet man mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$, also[40]

$$\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} : p \leq x\} = \sum_{p \leq x} 1 \quad (x > 0),$$

so ergibt sich:

**Satz 6.1 (Primzahlsatz)** *Es gilt* $\pi(x) \sim x/\ln x$.

**Bemerkung 6.2** Die Aussage des Primzahlsatzes kann man auch unter Verwendung der Integrallogarithmus Li formulieren: Für $x > 2$ ist

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Mit partieller Integration ergibt sich

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} - \frac{2}{\ln 2}.$$

Durch Aufteilung des Integrals in die beiden Teilintegrale von 2 bis $x/\ln^2 x$ und $x/\ln^2 x$ bis $x$ kann man zeigen, dass

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = O\Big(\frac{x}{\ln^2 x}\Big)$$

gilt ([Ü]). Insbesondere folgt $\mathrm{Li}(x) \sim x/\ln x$ und damit ist die Aussage des Primzahlsatzes äquivalent zu

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x).$$

Es zeigt sich,[41] dass $\mathrm{Li}(x)$ tatsächlich eine wesentlich bessere Approximation an $\pi(x)$ liefert als $x/\ln x$.

Für den Beweis des Primzahlsatzes benötigen wir – neben dem Satz von Ingham-Karamata – weitere Hilfsmittel. Zunächst reformulieren wir die Aussage des Satzes unter Verwendung der Tschebyscheffschen Theta-Funktion $\vartheta : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leq x} \ln p \qquad (x > 0).$$

[40] Im Weiteren sind Summen über Indizes $p$ jeweils so zu verstehen, dass $p \in \mathbb{P}$ gilt, wobei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen bezeichnet.

[41] Siehe etwa `https://de.wikipedia.org/wiki/Primzahlsatz`, auch für weitere interessante Informationen zur Historie.

Die Theta-Funktion zählt also die Primzahlen $p \leq x$ jeweils gewichtet mit $\ln p$. Nach Definition gilt $\vartheta(x) \leq \pi(x) \ln x$.

**Satz 6.3**

1. *Für $x > 1$ ist $\vartheta(x) \leq 4x \ln 2$.*
2. *Es gilt $\vartheta(x) \sim x$ genau dann, wenn $\pi(x) \sim x/\ln x$.*

**Beweis.** 1. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$. Ist $p$ prim mit $n < p \leq 2n$, so ist $p$ Teiler von $(2n)!/(n!)^2 = \binom{2n}{n}$. Also folgt

$$\Big(\prod_{n<p\leq 2n} \frac{1}{p}\Big)\binom{2n}{n} \in \mathbb{N}$$

und daher

$$\exp(\vartheta(2n) - \vartheta(n)) = \prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich $\vartheta(2^{k+1}) - \vartheta(2^k) \;\leq\; 2^{k+1} \ln 2$, also mit $\vartheta(1) = 0$

$$\vartheta(2^{k+1}) \;=\; \sum_{\ell=0}^{k} \big(\vartheta(2^{\ell+1}) - \vartheta(2^\ell)\big) \;\leq\; \sum_{\ell=0}^{k} 2^{\ell+1} \ln 2 \;=\; 2(2^{k+1} - 1) \ln 2 \;\leq\; 2^{k+2} \ln 2.$$

Ist nun $2^k \leq x < 2^{k+1}$, so folgt $\vartheta(x) \leq \vartheta(2^{k+1}) \leq 2^{k+2} \ln 2 \leq 4x \ln 2$.
2. Ist $\varepsilon > 0$, so gilt wegen $\pi(y) \leq y$

$$\vartheta(x) \geq \sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leq x} \ln p \geq (1-\varepsilon) \ln x \sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leq x} 1 \geq (1-\varepsilon) \ln x \big(\pi(x) - x^{1-\varepsilon}\big).$$

Mit $\vartheta(x) \leq \pi(x) \ln x$ folgt

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \pi(x) \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\vartheta(x)}{(1-\varepsilon)x} + \frac{\ln x}{x^\varepsilon}.$$

Gilt also $\vartheta(x)/x \to 1$, so ergibt sich

$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \pi(x) \ln(x)/x \leq \limsup_{x\to\infty} \pi(x) \ln(x)/x \leq 1/(1-\varepsilon).$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$, also $\pi(x) \ln x/x \to 1$. Umgekehrt folgt aus $\pi(x) \ln x/x \to 1$

$$(1-\varepsilon) \leq \liminf_{x\to\infty} \vartheta(x)/x \leq \limsup_{x\to\infty} \vartheta(x)/x \leq 1$$

und damit $\vartheta(x)/x \to 1$. $\square$

**Bemerkung und Definition 6.4** 1. Auf der Halbebene $\{\operatorname{Re} z > 1\} = 1 + \mathbb{C}_+$ ist die **Riemannsche Zeta-Funktion** $\zeta$ definiert durch

$$\zeta(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu^z \quad (\operatorname{Re} z > 1).$$

Die Reihe konvergiert für alle $z \in 1+\mathbb{C}_+$ absolut und als Funktionenreihe lokal gleichmäßig auf $1+\mathbb{C}_+$. Da die Reihenglieder $k^{-z} = e^{-z\ln k}$ ganze Funktionen sind, ist $\zeta$ eine holomorphe Funktion auf $1+\mathbb{C}_+$.[42] Der entscheidende Zusammenhang zur Theorie der Verteilung der Primzahlen ergibt sich aus der **Euler-Formel**: Unter Verwendung der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen sieht man, dass $\zeta$ keine Nullstellen in $1+\mathbb{C}_+$ hat und dass, wenn man die Folge der Primzahlen aufsteigend als $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schreibt,

$$(1/\zeta)(z) = \prod_{p\in\mathbb{P}} (1 - 1/p^z) := \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} (1 - 1/p_j^z) \quad (\operatorname{Re} z > 1) \tag{6.1}$$

gilt.[43]

Denn: Es ist

$$(1 - 2^{-z})\zeta(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu^{-z} - (2\nu)^{-z}) = 1 + \sum_{n\in 2\mathbb{N}+1} n^{-z}$$

und allgemein mit $N_k := \{1 < n \in \mathbb{N} : p_1, \ldots, p_k \text{ kein Teiler von } n\}$

$$(1-2^{-z})(1-3^{-z})\cdots(1-p_k^{-z})\zeta(z) = 1 + \sum_{n\in N_k} n^{-z}.$$

Aufgrund der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen gilt $\min N_k = p_{k+1}$ und damit konvergiert die rechte Seite gegen 1 für $k \to \infty$.

2. Ebenfalls (punktweise) absolut auf $1 + \mathbb{C}_+$ und lokal gleichmäßig konvergiert die Reihe

$$\Phi(z) := \sum_{p\in\mathbb{P}} \ln(p)/p^z \quad (\operatorname{Re} z > 1).$$

Damit ist auch $\Phi$ holomorph in $1 + \mathbb{C}_+$. Aus der Produktdarstellung (6.1) ergibt sich für $\operatorname{Re} z > 1$ mit logarithmischem Differenzieren[44]

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_p \frac{\ln p}{p^z - 1} = \Phi(z) + \sum_p \frac{\ln p}{p^z(p^z-1)}\ . \tag{6.2}$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert lokal gleichmäßig auf $1/2+\mathbb{C}_+$ und stellt damit eine auf dieser Halbebene holomorphe Funktion dar.

[42] Aus der Cauchyschen Integralformel ergibt sich mit Differenziation von Parameterintegralen leicht, dass Grenzfunktionen lokal gleichmäßig konvergenter Folgen holomorpher Funktionen holomorph sind.

[43] Man kann zeigen, dass der Grenzwert unabhängig von der Reihenfolge der Produktbildung ist, was die Schreibweise $\prod_{p\in\mathbb{P}}$ erst rechtfertigt.

[44] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmische_Ableitung.

**Satz 6.5** *Mit* $\gamma(z) = 1/(1-z)$ *für* $z \neq 1$ *gilt:*

1. $\zeta + \gamma$ *ist holomorph fortsetzbar nach* $\mathbb{C}_+$ *und damit* $\zeta$ *nach* $\mathbb{C}_+ \setminus \{1\}$.

2. $\Phi + \gamma$ *ist holomorph fortsetzbar nach* $(1/2 + \mathbb{C}_+) \setminus Z(\zeta)$, *wobei* $Z(\zeta)$ *die Menge der Nullstellen von* $\zeta$ *in* $\mathbb{C}_+ \setminus \{1\}$ *bezeichnet.*

**Beweis.** 1. Für $\operatorname{Re} z > 1$ gilt

$$(\zeta + \gamma)(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z} - \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^z} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\nu}^{\nu+1} \left( \frac{1}{\nu^z} - \frac{1}{t^z} \right) dt.$$

Ist $z \in \mathbb{C}_+$ und $\varphi(t) := t^{-z}$ für $t > 0$, so gilt nach dem Schrankensatz

$$|\varphi(t) - \varphi(k)| \leq \max_{k \leq u \leq k+1} |z/u^{z+1}| \leq |z|/k^{1+\operatorname{Re} z} \quad (k \leq t \leq k+1).$$

Damit konvergiert die Reihe auf der rechten Seite für $z \in \mathbb{C}_+$ absolut und als Funktionenreihe lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}_+$. Also definiert die rechte Seite eine holomorphe Fortsetzung von $\zeta + \gamma$ nach $\mathbb{C}_+$. Außerdem ist $\zeta = (\zeta + \gamma) - \gamma$ holomorph fortsetzbar nach $\mathbb{C}_+ \setminus \{1\}$.
2. Als Nullstellenmenge der auf $\mathbb{C}_+ \setminus \{1\}$ holomorphen Funktion $\zeta$ ist $Z(\zeta)$ abgeschlossen in $\mathbb{C}_+ \setminus \{1\}$. Außerdem gilt $\operatorname{dist}(1, Z(\zeta)) > 0$ wegen $|\zeta(z)| \to \infty$ für $z \to 1$. Nach (6.2) und 1. ist $\Phi$ holomorph fortsetzbar auf die offene Menge $(1/2 + \mathbb{C}_+) \setminus (Z(\zeta) \cup \{1\})$. Wegen $\gamma' = \gamma^2$ gilt mit $h := \zeta + \gamma$ in einer punktierten Umgebung von 1

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{h' - \gamma^2}{h - \gamma}$$

und damit

$$\gamma - \frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{\gamma(h-\gamma) - h' + \gamma^2}{h - \gamma} = \frac{h\gamma - h'}{h - \gamma} = \frac{h - h'/\gamma}{h/\gamma - 1}.$$

Wegen $1/\gamma(z) = (1-z)$ ist $\gamma - \zeta'/\zeta$ an der Stelle 1 holomorph fortsetzbar. Wieder mit (6.2) sieht man, dass auch $\gamma + \Phi$ an der Stelle 1 holomorph fortsetzbar ist. □

Nach Bemerkung und Definition 6.4.1 hat die Zeta-Funktion keine Nullstellen in $\operatorname{Re} z > 1$. Von zentraler Bedeutung ist die Tatsache, dass auch keine Nullstellen auf der Geraden $\operatorname{Re} z = 1$ liegen. Beim Beweis des entsprechenden Satzes verwenden wir eine nützliche Aussage über das lokale Verhalten holomorpher Funktionen: Ist $a \in \mathbb{C}$ und $f$ homomorph – und damit analytisch – auf einer Umgebung von $a$ mit Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}_0$ an $a$ (nach Definition ist die Ordnung 0, falls $f(a) \neq 0$ gilt), so ergibt sich wegen $a_k \neq 0$

$$(z-a)(f'/f)(z) = \sum_{\nu=k}^{\infty} \nu a_\nu (z-a)^{\nu-k} \Big/ \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu (z-a)^{\nu-k} \to k \quad (z \to a). \tag{6.3}$$

**Satz 6.6** *Es gilt* $Z(\zeta) \subset \{\operatorname{Re} z < 1\}$.

**Beweis.** Wir müssen zeigen: Ist $a = 1 + i\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ist $k \in \mathbb{N}_0$ die Nullstellenordnung von $\zeta$ an $a$, so gilt $k = 0$ . Es sei $m$ die Nullstellenordnung von $\zeta$ an der Stelle $1 + 2i\alpha$. Da $\zeta(\overline{z}) = \overline{\zeta(z)}$ gilt, sind $k$ bzw. $m$ auch die Nullstellenordnungen von $\zeta$ an den Stellen $1 - i\alpha$ bzw. $1 - 2i\alpha$. Aus Satz 6.5 folgt

$$(z-1)\Phi(z) = (z-1)(\Phi+\gamma)(z) + 1 \to 1 \quad (z \to 1)$$

und aus (6.2)

$$\lim_{t\to 1^+}(t-1)(\zeta'/\zeta)(t+i\beta) = -\lim_{t\to 1^+}(t-1)\Phi(t+i\beta)$$

für $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ist $t > 1$, so gilt wegen $p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2} = 2\,\mathrm{Re}\, p^{i\alpha/2} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^t}(p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2})^4 = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^t}\left(p^{2i\alpha} + 4p^{i\alpha} + 6 + 4p^{-i\alpha} + p^{-2i\alpha}\right) \\ &= \Phi(t-2i\alpha) + 4\Phi(t-i\alpha) + 6\Phi(t) + 4\Phi(t+i\alpha) + \Phi(t+2i\alpha). \end{aligned}$$

Multiplikation mit $(t-1)$ und Grenzübergang $t \to 1$ ergibt wegen (6.3)

$$0 \leq -2m - 8k + 6,$$

also $8k \leq 6 - 2m \leq 6$ und damit $k = 0$. □

Damit kommen wir schließlich zum **Beweis des Primzahlsatzes**:

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(t) := \vartheta(e^t)e^{-t} - 1$ für $t > 0$ und $f(t) = 0$ für $t \leq 0$. Nach Satz 6.3.1 ist $f$ beschränkt. Wir zeigen, dass $f$ abklingend an $\infty$ ist. Damit folgt die Behauptung aus Satz 6.3.2.
Es sei wieder $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Abzählung der Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge und $p_0 := 1$. Sind $\mathrm{Re}\, s > 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$, so gilt wegen $\vartheta(e^t) = \vartheta(p_n)$ für $\ln p_n \leq t < \ln p_{n+1}$

$$s\int_{\ln p_n}^{\ln p_{n+1}} e^{-st}\vartheta(e^t)\,dt = -\vartheta(p_n)e^{-st}\Big|_{t=\ln p_n}^{\ln p_{n+1}} = \vartheta(p_n)(p_n^{-s} - p_{n+1}^{-s}).$$

Aus Satz 6.3.1 folgt $\vartheta(p_N)p_{N+1}^{-s} \to 0$ für $N \to \infty$. Mit partieller Summation[45] und $\ln p_n = \vartheta(p_n) - \vartheta(p_{n-1})$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln(p_n)\, p_n^{-s} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(\vartheta(p_n) - \vartheta(p_{n-1}))p_n^{-s} \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\vartheta(p_n)(p_n^{-s} - p_{n+1}^{-s}) + \vartheta(p_N)p_{N+1}^{-s}\right) = s\int_0^{\infty} e^{-st}\vartheta(e^t)\,dt. \end{aligned}$$

Für $\mathrm{Re}\, z > 0$ ergibt sich mit Beispiel 5.8

$$(Lf)(z) = \int_0^{\infty}\vartheta(e^t)e^{-t}e^{-zt}\,dt - \frac{1}{z} = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z+1}\Big((\Phi+\gamma)(z+1) - 1\Big).$$

[45] Sind $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{C}$, so gilt $\sum\limits_{n=1}^{N}(a_n - a_{n-1})b_n = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n(b_n - b_{n+1})$ mit $a_0 := b_{N+1} := 0$.

Nach Satz 6.5 und Satz 6.6 ist die Funktion $z \mapsto (\Phi + \gamma)(z+1)$ holomorph auf einer offenen Obermenge $U$ der abgeschlossenen Halbebene $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$ und damit $Lf$ fortsetzbar zu einer Funktion $g \in H(U)$. Der Satz von Ingham-Karamata (Satz 5.14) impliziert nun die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty f$.
Angenommen, es existieren ein $\delta > 0$ und eine wachsende Folge $(t_k)$ mit $t_k \to \infty$ sowie $f(t_k) \geq \delta$. Dann ist $\vartheta(e^{t_k})e^{-t_k} \geq \lambda := 1 + \delta$ für alle $k$. Wir wählen $1 < \mu < \lambda$. Da $\vartheta$ monoton wachsend ist, folgt für $k \in \mathbb{N}$ und $t_k \leq t \leq t_k + \ln \mu$

$$\vartheta(e^t)e^{-t} - 1 \geq \vartheta(e^{t_k})e^{-t_k - \ln \mu} - 1 \geq \lambda/\mu - 1,$$

also

$$\int_{t_k}^{t_k + \ln \mu} f \geq (\lambda/\mu - 1) \ln \mu > 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dies widerspricht dem Cauchy-Kriterium für uneigentliche Integrale. Mit einer entsprechenden Argumentation führt man die Annahme der Existenz eines $\delta > 0$ und einer wachsenden Folge $(t_k)$ mit $t_k \to \infty$ sowie $f(t_k) \leq -\delta$ für alle $k$ zum Widerspruch. $\square$

# A Maße und Integrale

**Definition A.1** Es sei $\Omega \neq \varnothing$ eine Menge.
1. Ist $\Sigma \subset \mathrm{Pot}(\Omega)$, so heißt $\Sigma$ eine **$\sigma$-Algebra** (in $\Omega$), falls gilt

($\sigma$1) $\varnothing \in \Sigma$.

($\sigma$2) Mit $A \in \Sigma$ ist auch $\Omega \setminus A \in \Sigma$.

($\sigma$3) Ist $N$ abzählbar und $(A_n)_{n\in N}$ eine Familie in $\Sigma$, so ist $\bigcup_{n\in N} A_n \in \Sigma$.

Das Paar $(\Omega, \Sigma)$ nennt man einen **Messraum**.
2. Ist $\Sigma$ eine $\sigma$-Algebra, so heißt eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ **Maß** (auf $\Sigma$), falls

(M1) $\mu(\varnothing) = 0$.

(M2) Ist $N$ abzählbar und $(A_n)_{n\in N}$ eine Familie paarweiser disjunkter Mengen in $\Sigma$, so ist mit $\infty + x = \infty$ für $x \in [0, \infty]$

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in N} A_n\Big) = \sum_{n\in N} \mu(A_n) \quad \Big(:= \sup_{F\subset N \text{ endlich}} \sum_{n\in F} \mu(A_n)\Big).$$

In diesem Fall nennt man $(\Omega, \Sigma, \mu)$ einen **Maßraum**. Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so heißt $\mu$ **endlich** und im Falle $\mu(\Omega) = 1$ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**.
3. Ist $\mu$ ein Maß auf $\Sigma$, so heißt $A \in \Sigma$ eine ($\mu$-)**Nullmenge**, falls $\mu(A) = 0$ ist. Gilt eine Eigenschaft für alle $x \in \Omega$ bis auf eine Nullmenge, so sagt man, die Eigenschaft gilt ($\mu$-)**fast überall**.

**Beispiel A.2** 1. Ist $\Omega \neq \varnothing$, so definiert

$$\mu(A) := \#A \qquad \big(A \in \mathrm{Pot}(\Omega)\big)$$

ein Maß auf $\mathrm{Pot}(\Omega)$. Man nennt $\mu$ das **Zählmaß** auf $\Omega$. Dabei ist $\mu$ endlich genau dann, wenn $\Omega$ endlich ist. Außerdem ist in diesem Falle $P := \mu(\Omega)^{-1}\mu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (genannt **Laplace-Verteilung** auf $\Omega$).
2. Ist $(S, d)$ ein metrischer Raum, so heißt die kleinste $\sigma$-Algebra, die die offenen Mengen enthält, die **Borel-$\sigma$-Algebra** bezüglich $(S, d)$. Wir schreiben dafür $\mathscr{B}(S, d)$ (oder $\mathscr{B}(d)$ oder $\mathscr{B}(S)$). Ist speziell $(S, d) = (\mathbb{R}^m, |\cdot|)$, so existiert genau ein Maß $\lambda = \lambda_m$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ mit

$$\lambda\big([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]\big) = (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m)$$

für alle Rechtecke $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$. Man nennt $\lambda_m$ das $m$-dimensionale **Lebesgue-Maß**.

**Definition A.3** Es sei $(\Omega, \Sigma)$ ein Messraum. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so heißt $f$ **messbar**, falls $f^{-1}(U) \in \Sigma$ für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ gilt. Weiter heißt $f$ **einfach** (bzw. **Elementarfunktion**), falls $f$ messbar und $f(\Omega)$ endlich ist.

**Satz A.4** *Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, so existiert eine Folge $(\varphi_n)$ einfacher Funktionen mit $\varphi_n \to f$ punktweise auf $\Omega$ und $|\varphi_n| \leq |f|$.*

**Bemerkung und Definition A.5** Es sei $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum.
1. Ist $\varphi$ einfach mit $\varphi \geq 0$ oder $\mu(\varphi \neq 0) < \infty$, so setzen wir mit $0 \cdot \infty := 0$

$$\int \varphi \, d\mu := \int \varphi(\omega) \, d\mu(\omega) := \sum_{\alpha \in \varphi(\Omega)} \alpha \cdot \mu(\varphi = \alpha) \begin{cases} \in [0, \infty], & \text{falls } \varphi \geq 0 \\ \in \mathbb{C}, & \text{falls } \mu(\varphi \neq 0) < \infty \end{cases} .$$

2. Ist $g$ messbar und $g \geq 0$, so setzen wir

$$\int g \, d\mu := \sup \Big\{ \int \varphi \, d\mu : \varphi \text{ einfach}, 0 \leq \varphi \leq f \Big\} \in [0, \infty] \, .$$

Durch

$$(g\mu)(A) := \int g 1_A \, d\mu \quad (A \in \Sigma)$$

ein Maß $g\mu$ auf $\Sigma$ definiert. Die Funktion $g$ heißt dann ($\mu$-)**Dichte** des Maßes $g\mu$.
3. Ist $f$ messbar, so heißt $f$ ($\mu$-)**integrierbar**, falls $\int |f| \, d\mu < \infty$ gilt. Wir setzen

$$\mathscr{L}(\mu) := \mathscr{L}_1(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ integrierbar}\}.$$

Damit ist durch

$$\langle f, \mu \rangle := \int f \, d\mu := \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, d\mu \in \mathbb{C} \, ,$$

wobei $(\varphi_n)$ eine beliebige Folge wie in S. A.4 ist, eine lineare Abbildung $\langle \cdot, \mu \rangle : \mathscr{L}(\mu) \to \mathbb{C}$ (wohl-)definiert mit

$$\Big| \int f \, d\mu \Big| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Weiter heißt $\int f \, d\mu$ das ($\mu$)-**Integral** von $f$. Ist $g \geq 0$ messbar, so gilt für $f \in \mathscr{L}(g\mu)$

$$\int f \, d(g\mu) = \int fg \, d\mu.$$

4. Ist $M \in \Sigma$, so ist mit $f$ auch $1_M f \in \mathscr{L}(\mu)$. Man schreibt dann auch

$$\int_M f \, d\mu := \int f \, d(1_M \mu) = \int f 1_M \, d\mu \, .$$

Die Schreibweise verwendet man auch im Fall messbarer Funktionen $f \geq 0$.

**Bemerkung A.6** Es sei $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum.
1. Ist $M \in \Sigma$, so sind durch

$$\Sigma \cap M := \{A \cap M : A \in \Sigma\} = \{B \in \Sigma : B \subset M\}$$

eine $\sigma$-Algebra in $M$ und durch $\mu_M := \mu|_{\Sigma\cap M}$ ein Maß $\mu_M$ auf $\Sigma \cap M$ definiert. Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und Regelfunktionen $f$ auf $[a,b]$ gilt damit

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f_0 \, d\lambda = \int f_0 \, d(1_{[a,b]}\lambda) = \int f \, d\lambda_{[a,b]},$$

wobei $f_0$ die durch 0 auf $\mathbb{R}$ erweiterte Funktion bezeichnet.
2. Sind $S \in \mathscr{B}(\mathbb{C})$ und $\varphi : \Omega \to S$ messbar, so ist durch

$$(\varphi_*\mu)(B) := \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) \qquad \big(B \in \mathscr{B}(\mathbb{C}) \cap S\big)$$

ein Maß $\varphi_*\mu$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{C}) \cap S$ definiert (andere Schreibweisen: $\mu^\varphi$ oder $\varphi(\mu)$). Das Maß $\varphi_*\mu$ heißt **Bildmaß** von $\mu$ unter $\varphi$. Es gilt damit: Ist $f : S \to \mathbb{C}$ messbar, so ist $f$ genau dann $\varphi_*\mu$-integrierbar, wenn $f \circ \varphi$ $\mu$-integrierbar ist und in diesem Fall ist

$$\int f \, d(\varphi_*\mu) = \int (f \circ \varphi) \, d\mu.$$

**Bemerkung A.7** Es seien $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Wir setzen

$$\mathscr{L}_p(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ messbar}, \int |f|^p \, d\mu < \infty\}.$$

Ist $p > 1$ und $q > 1$ mit $p + q = pq$, so gilt für $f \in \mathscr{L}_p(\mu)$ und $g \in \mathscr{L}_q(\mu)$ die **Hölder-Ungleichung**

$$\int |fg| \, d\mu \leq \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int |g|^q \, d\mu\Big)^{1/q}$$

und damit die (auch für $p = 1$ gültige) **Minkowski-Ungleichung**

$$\Big(\int |f+g|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int |g|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \qquad (f, g \in \mathscr{L}_p(\mu)).$$

Ist $\int 1 \, d\mu = \mu(\Omega) < \infty$, so ergibt sich aus der Hölder-Ungleichung mit $g = 1$ insbesondere

$$\Big(\int |f| \, d\mu\Big)^p \leq \mu(\Omega)^{p/q} \int |f|^p \, d\mu.$$

Wegen der Gültigkeit der Minkowski-Ungleichung ist durch

$$\|f\|_p := \|f\|_{p,\mu} := \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \qquad \big(f \in \mathscr{L}_p(\mu)\big)$$

eine Halbnorm auf $\mathscr{L}_p(\mu)$ gegeben. Mit $N := \{f \in \mathscr{L}_p(\mu) : f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\}$ wird $L_p(\mu) := \mathscr{L}_p(\mu)/N$ mit

$$\big\|[f]\big\|_p := \int |f|^p \, d\mu$$

ein Banachraum. Man schreibt wieder kurz $f$ statt $[f]$ und spricht auch von Funktionen.

**Bemerkung und Definition A.8** Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $\lambda = \lambda_d$. Für $M \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ setzen wir

$$\mathscr{L}(M) := \mathscr{L}(1_M \lambda) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ messbar}, \int_M |f| \, d\lambda < \infty\}.$$

Weiter schreiben wir für $f \in \mathscr{L}(M)$ kurz

$$\int_M f := \int_M f(x) \, dx := \int f \, d(1_M \lambda) = \int_M f \, d\lambda$$

für das $d$-dimensionale Lebesgue-Integral auf $M$ und noch kürzer $\int f := \int f(x) \, dx := \int_{\mathbb{R}^d} f$ im Falle $M = \mathbb{R}^d$.

# Index