J. Müller

WS 2021/22
09.12.2021

7. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A22: a) Zeigen Sie: Sind $c = (c_k) \in \ell_1(\mathbb{Z})$ und $\mu := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu \delta_\nu$ (als Borelmaß auf $\mathbb{R}$), so gilt

$$\widehat{\mu}(z) = c^\vee(e^z) \quad (z \in i\mathbb{R}).$$

b) (Poisson-Verteilung)
Es sei $\lambda > 0$. Berechnen Sie $\widehat{\mu}$ im Fall $c_k = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ für $k \geq 0$ und $c_k = 0$ für $k < 0$.

A23: Es sei X ein lokalkompakter metrischer Raum. Beweisen Sie:

a) $C_0(X)$ ist abgeschlossen in $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$.
b) Jede Funktion in $C_0(X)$ ist gleichmäßig stetig.
c) Finden Sie eine Funktion in $CB(\mathbb{R})$, die nicht gleichmäßig stetig ist.

A24: Es seien $g \in C_c$ mit $\int g = 1$ und $g_r := r^{-N} g(r^{-1}\,\cdot)$. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ integrierbar und ist $x \in \mathbb{R}^N$ eine Stetigkeitsstelle von f, so gilt

$$(f * g_r)(x) \to f(x) \qquad (r \to 0).$$

Hinweis: Mit $K := \operatorname{supp}(g)$ gilt

$$(f * g_r)(x) - f(x) = \int_{rK} (\tau_u f - f)(x) g_r(u)\, du.$$