J. Müller

WS 2021/22
18.11.2021

4. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A11: Es seien $c = (c_k) \in \ell_1(\mathbb{Z}) = L_1(\mathbb{Z}, \mathrm{Pot}(\mathbb{Z}), \sigma)$ und $c^\vee(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu z^\nu = \int c(n) z^n \, d\sigma(n)$ für $z \in \mathbb{S}$. Zeigen Sie:

a) $c^\vee \in C(\mathbb{S})$ und $\|c^\vee\|_\infty \leq \|c\|_1 = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |c_\nu|$.

b) Sind $a = (a_k), b = (b_k) \in \ell_1(\mathbb{Z})$ so gilt für $a * b$, definiert durch $(a * b)_k := \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j b_{k-j}$,

(i) $a * b \in \ell_1(\mathbb{Z})$ und $\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$.

(ii) $(a * b)^\vee = a^\vee \, b^\vee$.

A12: Beweisen Sie:

a) $\|D_n\|_1 \leq 3 + \ln n$.

b) Für $f \in C(\mathbb{S})$ gilt $\|f - S_n f\|_\infty \leq (4 + \ln n) \inf_{P \in \mathscr{T}_n} \|f - P\|_\infty$.

A13: Es seien (X, d_X) ein vollständiger metrischer Raum, (Y, d_Y) ein metrischer Raum, $f : X \to Y$ stetig und $M \subset X$ dicht in X. Beweisen Sie: Ist $f|_M$ eine Isometrie, also $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ für $x, y \in M$, und ist $f(M)$ dicht in Y, so ist f surjektiv.

A14: Nutzen Sie die Parsevalsche Gleichung, um den Wert der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu^4$ zu berechnen.