J. Müller

WS 2021/22
03.02.2022

13. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A42: Es seien $1 \le p < \infty$ und $f \in L_p(m)$. Beweisen Sie, dass

$$\|Pf(r\,\cdot)\|_p \le \|f\|_p$$

für alle $0 < r < 1$ gilt.

Hinweis: Nach Aufgabe A10 ist Qm mit $Q(w) = P(r\zeta\overline{w}, 1)$ für $\zeta \in \mathbb{S}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

A43: (Abelscher Grenzwertsatz)

Es seien $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 und $f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ für $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie: Ist $\zeta \in \mathbb{S}$ so, dass die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \zeta^\nu$ konvergiert, so existiert der nichttangentiale Grenzwert $f^*(\zeta)$ und es gilt

$$f^*(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \zeta^\nu \,.$$

Hinweis: Betrachten Sie ohne Einschränkung $\zeta = 1$.

A44: Es sei $f \in C(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ definiert durch

$$f(z) := \exp\Big(-\frac{1+z}{1-z}\Big) \qquad (1 \ne z \in \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie:

a) $|f(z)| = 1$ für $z \in \mathbb{S} \setminus \{1\}$,

b) $(f|_{\mathbb{D}})^*(1) = 0$,

c) $f|_{\mathbb{D}}$ hat keinen Grenzwert an 1 .

A45: Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar, so ist durch

$$F(z) := z \int_0^1 f(tz)\, dt \quad (z \in \mathbb{D})$$

eine Stammfunktion zu f gegeben.

Hinweis: (komplexe) Differenziation von Parameterintegralen und partielle Integration.