J. Müller

WS 2021/22
27.01.2022

12. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A39: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $u, v \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie:

a) $\Delta(uv) = v\Delta u + 2\,\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v$.

b) Ist Ω zusammenhängend und u harmonisch, so ist $|u|^2 = u\overline{u}$ nur dann harmonisch, wenn u konstant ist.

A40: Es seien $D \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet[1] und u harmonisch in D. Zeigen Sie:

a) Wird $|u|$ maximal, so ist u konstant.

b) (Maximiumprinzip; positive Form) Ist D beschränkt und ist u Einschränkung einer auf $\overline{D}$ stetigen Funktion v, so wird $|v|$ maximal an einer Stelle $a \in \partial D$.

c) Sind D beschränkt und $f \in C(\partial D)$, so hat das Dirichlet-Problem (D, f) höchstens eine Lösung.

d) Für die rechte Halbebene $D = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ hat das Dirichlet-Problem $(D, 0)$ mehrere Lösungen.

A41: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und (u_n) eine Folge in Ω harmonischer Funktionen. Beweisen Sie: Konvergiert (u_n) lokal gleichmäßig gegen u, d. h. existiert zu jedem Punkt $a \in \Omega$ eine Umgebung U so, dass $u_n \to u$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf U, so ist u harmonisch.

[1] Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^N$ nennt mann ein Gebiet, falls D nichtleer, offen und zusammenhängend ist.