J. Müller

WS 2021/22
28.10.2021

1. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A1: Berechnen Sie $\widehat{f}$ für $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, definiert für $t \in (\pi, \pi]$ durch

a) $f(e^{it}) := t$,

b) $f(e^{it}) := t^2$.

.

A2: Es sei $f \in L_1(m)$. Zeigen Sie:

a) Ist f reellwertig, so ist $\widehat{f}(-k) = \overline{\widehat{f}(k)}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

b) Ist $f(\overline{z}) = f(z)$ für $z \in \mathbb{S}$, so ist $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

c) Ist $f(\overline{z}) = -f(z)$ für $z \in \mathbb{S}$, so ist $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Für $g \in L_1(m)$ gilt $\overline{\int g\, dm} = \int \overline{g}\, dm$ und $\int g(\overline{z})\, dm(z) = \int g\, dm$.

A3: Es seien $(V, \langle \cdot, \cdot\cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum und $\| \cdot \|$ die induzierte Norm. Weiter seinen $(u_j)_{j \in J}$ ein endliches Orthogonalsystem und $U := \operatorname{span}\{u_j : j \in J\}$. Zeigen Sie:

a) (Pythagoras) $\| \sum\limits_{j \in J} u_\alpha \|^2 = \sum\limits_{j \in J} \|u_\alpha\|^2$.

b) Ist $(u_j)_{j \in J}$ ein Ortho*normal*system und ist $Px := \sum\limits_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j$ für $x \in V$, so gilt

(i) $(x - Px) \perp U$ d. h. $\langle x - Px, y \rangle = 0$ für $y \in U$,

(ii) $\|x - y\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px - y\|^2$ für $y \in U$,

(iii) (Bessel-Ungleichung) $\|Px\| \leq \|x\|$.

A4: Es seien $f \in C(\mathbb{S})$ und $g \in L(m)$. Zeigen Sie, dass (die m-fast überall definierte Funktion) $f * g$ gleichmäßig stetig ist.