Jürgen Müller

Einführung in die Mathematik/ Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

Skriptum zur den Vorlesungen
Wintersemester 2008/2009 und Sommersemester 2009
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Dank an Elke Gawronski für die Mithilfe bei der Erstellung

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen und Abbildungen

Wir starten mit einigen einführenden Definitionen und Ergebnissen aus der Theorie der Mengen und Abbildungen, die Grundlage der gesamten Mathematik sind. Unsere Darstellung gründet auf den von G. Cantor geprägten (sog. naiven) Mengenbegriff.

> Eine *Menge* M ist eine ”Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen”.

Ein solches Objekt x heißt *Element* der Menge M (Schreibweise: $x \in M$; ist x nicht Element von M, so schreiben wir $x \notin M$). Es gibt prizipiell zwei Möglichkeiten der Darstellung von Mengen: die aufzählende Schreibweise (etwa $M = \{1, 3, 5, 7\}$) und die beschreibende Schreibweise. Die beschreibende Schreibweise hat allgemein die Form $M = \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$, wobei E irgendeine Eigenschaft ist (also im obigen Fall etwa $M = \{x : x \text{ ungerade natürliche Zahl kleiner als } 9\}$). Die Menge ohne Elemente heißt die *leere Menge* (Schreibweise: $\emptyset$)

Definition 1.1 Es seien A, B Mengen.

1. A heißt *Teilmenge* von B (Schreibweie: $A \subset B$), falls aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt.
2. A und B heißt *gleich*, falls $A \subset B$ und $B \subset A$.
3. Die Menge $B \setminus A := \{x : x \in B \text{ und } x \notin A\}$ heißt *Differenz* von B und A. Ist $A \subset B$, so heißt $A^c := C_B(A) := B \setminus A$ *Komplement* von A bezüglich B.

Definition 1.2 Es sei $I = \emptyset$ eine Menge, und es seien A_α Mengen für alle $\alpha \in I$. Dann heißen

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\}$$

Vereinigung der Mengen A_α $(\alpha \in I)$ und

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \text{ für alle } \alpha \in I\}$$

Durchschnitt der Mengen A_α $(\alpha \in I)$.
Ist I in aufzählender Form gegeben, so setzen wir „ $\cup$ “ bzw. „ $\cap$ “ auch zwischen die einzelnen Mengen, also etwa im Falle $I = \{1, 2, 3\}$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \qquad A_1 \cap A_2 \cap A_3 := \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Insbesondere sind damit für eine Menge von Mengen (einem so genannten Mengensystem) $\mathcal{F}$ auch

$$\bigcup_{M\in\mathcal{F}} M \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{M\in\mathcal{F}} M$$

definiert (hier ist speziell $A_M = M$).

Beispiel 1.3 Es sei

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$

die Menge der natürlichen Zahlen (wir setzen diese mitsamt den Rechenroperationen „ + “ und „ · “ als bekannt voraus).
1. Ist $I = \mathbb{N}$ und ist $A_m := \{j \in \mathbb{N} : j \geq m\}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, so ist

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m = \mathbb{N}, \quad \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = \emptyset.$$

2. Ist $\mathcal{F} = \{M : M \subset \mathbb{N} \text{ endlich}\}$, so ist

$$\bigcup_{M\in\mathcal{F}} M = \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{M\in\mathcal{F}} M = \emptyset.$$

3. Sind $A = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ und $B = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$, so gilt ($\mathcal{F} = \{A, B\}$)

$$A \cap B = \{6k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Satz 1.4 *Ist A eine Menge und sind B_α $(\alpha \in I)$ Mengen, so gilt*

1. $A \cap (\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} (A \cap B_\alpha)$,
2. $A \cup (\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} (A \cup B_\alpha)$.

Beweis. 1. „ $\subset$ “ Es sei $x \in A \cap (\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha)$. Dann ist $x \in A$ und $x \in \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$, also $x \in A$ und $x \in B_\beta$ für ein $\beta \in I$. Damit ist $x \in A \cap B_\beta$, also auch $x \in \bigcup_{\alpha\in I} (A \cap B_\alpha)$.
„ $\supset$ “ Es sei $x \in \bigcup_{\alpha\in I} (A \cap B_\alpha)$. Dann existiert ein $\beta \in I$ mit $x \in A \cap B_\beta$. Damit ist $x \in A$ und $x \in B_\beta$, also auch $x \in A$ und $x \in \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$, d. h. $x \in A \cap (\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha)$.
2. [Ü] □

Satz 1.5 *(De Morgansche Regeln)*
Es sei B eine Menge, und es seien $A_\alpha \subset B$ für alle $\alpha \in I$. Dann gilt

1. $C_B(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} C_B(A_\alpha)$,

2. $C_B(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} C_B(A_\alpha)$.

Beweis. 1. „ $\subset$ “ Es sei $x \in C_B(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)$. Dann ist $x \in B$ und $x \notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, also $x \in B$ und $x \notin A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Damit ist $x \in B \setminus A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$, also $x \in \bigcap_{\alpha\in I} C_B(A_\alpha)$.
„ $\supset$ “ Es sei $x \in \bigcap_{\alpha\in I} C_B(A_\alpha)$. Dann ist $x \in C_B(A_\alpha)$ für alle $\alpha \in I$, also $x \in B$ und $x \notin A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Damit ist $x \in B$ und $x \notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, d. h. $x \in C_B(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)$.
2. [Ü] □

Definition 1.6 Es seien A, B Mengen. Dann heißt die Menge

$$A \times B := \big\{(a,b) : a \in A, b \in B\big\}$$

der geordneten Paare von Elementen aus A und B die *Produktmenge* (oder kurz das *Produkt* von A und B. (Ein geordnetes Paar ist formal definiert als

$$(a,b) := \big\{\{a\}, \{a,b\}\big\},$$

insbesondere gilt damit $(a,b) = (\tilde{a}, \tilde{b})$ genau dann, wenn $a = \tilde{a}$ und $b = \tilde{b}$ ist.)

Beispiel 1.7 Ist $A = \{1,2\}, B = \{3\}$, so ist

$$A \times B = \big\{(1,3),(2,3)\big\} \qquad \text{und} \qquad B \times A = \big\{(3,1),(3,2)\big\}.$$

Man beachte, dass $A \times B \neq B \times A$ ist.

Definition 1.8 Es seien X, Y Mengen. Eine Teilmenge R (genauer das Tripel $(R, X, Y) := \big(R(X,Y)\big)$) heißt *Relation* (zwischen X und Y). Ist speziell $X = Y$, so heißt R Relation von X. Ist $(x,y) \in R$, so schreibt man auch xRy.

Bemerkung und Definition 1.9 Eine Relation R heißt *Abbildung* (von X nach Y) bzw. *Funktion* (von X nach Y), falls gilt

a) Für alle $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ mit $(x,y) \in R$.

b) Sind (x,y) und $(x,\tilde{y}) \in R$, so gilt $y = \tilde{y}$.

Ist R eine Abbildung von X nach Y, so ist jedem Wert von $x \in X$ genau ein Wert $f(x)$ mit $\big(x, f(x)\big) \in R$ zugeordnet. Wir identifizieren dann R auch mit dieser Zuordnungsvorschrift f und schreiben $f : X \to Y$ oder $X \ni x \mapsto f(x) \in Y$.
Weiter heißen X der *Definitionsbereich*, Y der *Zielbereich* und

$$W(f) := \{f(x) : x \in X\} = \{y \in Y : y = f(x) \text{ für ein } x \in X\}$$

Wertebereich von f.
Ist $f : X \to Y$ und $X_0 \subset X$, so heißt $f_{|X_0} : X_0 \to Y$, definiert durch $f_{|X_0}(x) := f(x)$ für alle $x \in X_0$, die *Einschränkung* von f auf X_0.

Beispiel 1.10 Es seien $X = Y = \mathbb{N}$, und es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x\ , & \text{falls } x \text{ gerade,} \\ 2x, & \text{falls } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist

$$W(f) = \{y \in \mathbb{N} : y \text{ gerade}\}.$$

Ist $X_0 := \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ungerade}\}$, so ist

$$f_{|X_0}(x) = 2x \qquad (x \in X_0).$$

Definition 1.11 Sind X, Y Mengen und ist $f : X \to Y$, so heißt für $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Urbildmenge von B unter f und für $A \subset X$

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} = \{y \in Y : y = f(x) \text{ für ein } x \in A\}$$

Bildmenge von A unter f.

Beispiel 1.12 In der Situation von B. 1.10 ist etwa

$$f^{-1}\big(\{2,4,6\}\big) = f^{-1}\big(\{1,2,3,4,5,6\}\big) = \{1,2,3,4,6\}$$

und

$$f\big(\{1,2,3\}\big) = \{2,6\}.$$

Satz 1.13 *Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$.*

1. *Sind $B_\alpha \subset Y$ für $\alpha \in I$, so gilt*

(i) $f^{-1}\big(\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\big) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$,

(ii) $f^{-1}\big(\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\big) = \bigcap\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$.

2. *Sind $A_\alpha \subset X$ für $\alpha \in I$, so gilt*

(i) $f\big(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\big) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$,

(ii) $f\big(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\big) \subset \bigcap\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$.

Beweis. 1. (i) „ $\subset$ “: Es sei $x \in f^{-1}\big(\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\big)$. Dann ist $f(x) \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$, d.h. es existiert ein $\beta \in I$ mit $f(x) \in B_\beta$. Also ist $xinf^{-1}(B_\beta)$ und damit auch $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$.
„ $\supset$ “: Ist $\beta \in I$, so ist $B_\beta \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$, also auch $f^{-1}(B_\beta) \subset f^{-1}\big(\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\big)$. Da $\beta \in I$ beliebig war, gilt $\bigcup\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha) \subset f^{-1}\big(\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\big)$.
(ii) „ $\subset$ “: Für alle $\beta \in I$ ist $\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha \subset B_\beta$, also auch $f^{-1}\big(\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\big) \subset f^{-1}(B_\beta)$. Da β beliebig war, ist $f^{-1}\big(\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\big) \subset \bigcap\limits_{\beta\in I} f^{-1}(B_\beta)$.
„ $\supset$ “: Es sei $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$. Dann ist $x \in f^{-1}(B_\alpha)\,(\alpha \in I)$, also $f(x) \in B_\alpha\,(\alpha \in I)$ und damit auch $f(x) \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$. Folglich ist $x \in f^{-1}\big(\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\big)$.
2. (i) „ $\subset$ “: Es sei $y \in f\big(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\big)$. Dann existiert ein $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ mit $f(x) = y$. Ist $\beta \in I$ mit $x \in A_\beta$, so ist also $y = f(x) \in f(A_\beta)$. Damit ist $y \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$.
„ $\supset$ “: Ist $\beta \in I$, so ist $A_\beta \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$, also auch $f(A_\beta) \subset f\big(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\big)$. Da $\beta \in I$ beliebig war, gilt „ $\supset$ “.
(ii) [Ü] □

Definition 1.14 Es seien X, Y Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

1. *surjektiv* (oder Abbildung von X *auf* Y), falls $W(f) = Y$ ist,
2. *injektiv* (oder *eineindeutige* Abbildung), falls für alle $y \in W(f)$ die Menge $f^{-1}(\{y\})$ einelementig ist (d. h. sind $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$, so ist $f(x_1) \neq f(x_2)$),
3. *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 1.15 Es sei f wie im B 1.10 Dann ist f weder surjektiv noch injektiv (es gilt etwa $1 \notin W(f)$ und $f(2) = f(1)$), dagegen ist $f_{|X_0}$ injektiv.

Definition 1.16 Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann heißt $g \circ f : X \to Z$, definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad (x \in X)$$

Verknüpfung von g und f (oder *Hintereinanderausführung von f und g*).

Satz 1.17 *Es seien X, Y, Z, U Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ und $h : Z \to U$ Abbildungen. Dann gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\ .$$

Beweis. Es gilt $h \circ (g \circ f) : X \to U$ sowie $(h \circ g) \circ f : X \to U$ und für $x \in X$ ist

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x)\ .\end{aligned}$$

□

Bemerkung und Definition 1.18 Es seien X, Y Mengen und es sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann existiert zu jedem $y \in Y$ **genau** ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wir definieren

$$f^{-1}(y) := x \qquad (y \in Y)\ ,$$

wobei $y = f(x)$. Die Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ heißt *Umkehrabbildung von f*. Es gilt dabei

$$f^{-1} \circ f : X \to X\ , (f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad (x \in X)\ ,$$

d. h. $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$, wobei $\mathrm{id}_X : X \to X$, definiert durch $\mathrm{id}_X(x) := x$ $(x \in X)$, die sog. identische Abbildung auf X bezeichnet. Genauso gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ und außerdem ist auch $f^{-1} : Y \to X$ bijektiv.

Definition 1.19 1. Eine Relation $\sim$ in X heißt *Äquivalenzrelation* (auf X), falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

a) $x \sim x$ (Reflexivität),

b) aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (Symmetrie),

c) aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (Transitivität).

2. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, so heißt $[x] := \{x' \in X : x \sim x'\}$ *die von x erzeugte Äquivalenzklasse*. Außerdem heißt $X/_\sim := \big\{[x] : x \in X\big\}$ der *Quotient* von X *modulo* $\sim$.

Beispiel 1.20 1. Es sei $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\sim := \big\{ \big((a,b),(c,d) \in X \times X : a + d = b + c \big\}$$

d. h. $(a,b) \sim (c,d)$ genau dann, wenn $a+d = b+c$. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X (ergibt sich aus Rechenregeln für die Addition in $\mathbb{N}$).
Formal ist damit die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen definiert als

$$\mathbb{Z} := X/_\sim = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_\sim.$$

Dabei ergibt sich $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, indem man $n \in \mathbb{N}$ mit $\big[(n+1,1)\big]$ identifiziert und für die ganze Zahl $\big[(a,b)\big]$ schreibt man dann

$$\big[(a,b)\big] := \begin{cases} m, & \text{falls } a = b + m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } a = b, \\ -m, & \text{falls } a + m = b \text{ für ein } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die Rechenoperationen „ $+$ “ und „ $\cdot$ “ sowie die Relation „ $<$ “ lassen sich auf $\mathbb{Z}$ übertragen (wir gehen davon aus, dass diese mitsamt ihren Rechenregeln bekannt sind). Schließlich setzen wir noch

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

2. Es sei $X = \mathbb{Z} \times \big(\mathbb{Z} \setminus \{0\}\big)$. Wir definieren

$$\sim := \big\{ \big((a,b),(c,d)\big) \in X \times X : ad = bc \big\},$$

mit anderen Worten $(a,b) \sim (c,d)$ genau dann, wenn $ad = bc$. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X (ergibt sich aus Rechenregeln für die Multiplikation in $\mathbb{Z}$).
Formal ist damit die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen definiert als

$$\mathbb{Q} := \big(\mathbb{Z} \times (Z \setminus \{0\})\big)/_\sim \,.$$

Für die rationale Zahl $\big[(a,b)\big]$ schreibt man a/b. Wieder lassen sich die Rechenoperationen „ $+$ “ und „ $\cdot$ “ sowie die Relation „ $<$ “ auf $\mathbb{Q}$ übertragen (wir gehen auch hier davon aus, dass diese bekannt sind). Außerdem ergibt sich $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, indem man $a \in \mathbb{Z}$ mit $a/1$ identifiziert.

2 Körper und das Prinzip der vollständigen Induktion

Definition 2.1 Es seien $G \neq \emptyset$ eine Menge, und es sei $* : G \times G \to G$ eine Abbildung. Dann heißt $(G, *)$ *abelsche* (oder *kommutative*) *Gruppe*, falls gilt

(G.1) (Assoziativgesetz)
Für alle $x, y, z \in G$ ist
$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

(G.2) (Kommutativgesetz)
Für alle $x, y \in G$ ist
$$x * y = y * x.$$

(G.3) (Existenz eines neutralen Elementes)
Es existiert ein $e \in G$ mit $x * e = x$ für alle $x \in G$.

(G.4) (Existenz inverser Elemente)
Für alle $x \in G$ existiert ein $y \in G$ mit $x * y = e$.

Bemerkung 2.2 Für $(G.4)$ ist es wichtig, dass das neutrale Element eindeutig bestimmt ist, d. h. es existiert nur ein $e = e_G \in G$ mit $x * e = x \, (x \in G)$.
(Denn: Sind $e, e' \in G$ neutrale Elemente, so gilt
$$e' = e' * e \overset{(G.2)}{=} e * e' = e.)$$
Außerdem existiert zu jedem $x \in G$ nur ein $y \in G$ mit $x * y = e$.
(Denn: Sind y und $y' \in G$ mit $x * y = x * y' = e$, so folgt
$$\begin{aligned} y' &= y' * e = y' * (x * y) \overset{(G.1)}{=} (y' * x) * y \\ &\overset{(G.2)}{=} (x * y') * y = e * y \overset{(G.2)}{=} y * e \overset{(G.3)}{=} y.) \end{aligned}$$
Wir schreiben x^* für das inverse Element von x.
Es gilt damit für $x, y \in G$
$$(x * y)^* = x^* * y^* \quad \text{und} \quad (x^*)^* = x.$$
(Denn: Es ist
$$\begin{aligned} (x * y) * (x^* * y^*) &\overset{(G.2)}{=} (x * y) * (y^* * x^*) = \\ &\overset{(G.1)}{=} \big((x * y) * y^*\big) * x^* \overset{(G.1)}{=} \big(x * (y * y^*)\big) * x^* \\ &= (x * e) * x^* \overset{(G.3)}{=} x * x^* = e, \end{aligned}$$

also ist aufgrund der Eindeutigkeit $(x * y)^* = x^* * y^*$. Weiter ist

$$x^* * x \overset{(G.2)}{=} x * x^* = e,$$

also wieder aufgrund der Eindeutigkeit $(x^*)^* = x$.)

Beispiel 2.3 1. $(\mathbb{N}_0, +)$ ist keine abelsche Gruppe. (Es existiert kein $y \in \mathbb{N}_0$ mit $1 + y = 0$.)
2. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe; $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist keine (es existiert kein $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $2 \cdot y = 1$).

Satz 2.4 *Es sei $(G, *)$ eine Gruppe, und es seien $a, b \in G$. Dann hat die Gleichung $a * x = b$ genau eine Lösung $x \in G$, nämlich $x = b * a^*$.*

Beweis. [Ü] □

Definition 2.5 Es sei K eine Menge mit mindestens zwei Elementen. Weiter seien $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ Abbildungen. Dann heißt $(K, +, \cdot)$ *Körper*, falls gilt

(K.1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element genannt $0 = 0_K$).

(K.2) $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element genannt $1 = 1_K$).

(K.3) (Distributivgesetze)
Für alle $x, y, z \in K$ gilt

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \quad \text{und} \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Im Folgenden schreiben wir auch kurz xy statt $x \cdot y$ und $x + yz$ statt $x + (yz)$ („Punkterechnung vor Strichrechnung“). Weiter schreiben wir für $x \in X$ wie üblich $-x$ für das inverse Element bezüglich „ $+$ “ und x^{-1} für das inverse Element bezüglich „ $\cdot$ “ (im Falle $x \neq 0_K$). Schließlich schreiben wir noch $x - y$ statt $x + (-y)$ und x/y statt xy^{-1}.

Satz 2.6 *Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Ferner seien $x, y \in K$. Dann gilt*

1. $0_K \cdot x = x \cdot 0_K = 0_K$,

2. $-(xy) = (-x)y = x(-y)$,

3. $xy = 0_K$ *genau dann, wenn* $x = 0_K$ *oder* $y = 0_K$ *(Nullteilerfreiheit).*

Beweis.
1. Aus $0_K \cdot x = (0_K + 0_K)x \overset{(K.3)}{=} 0_K x + 0_K x$ folgt

$$0_K x = 0_K x - 0_K x = 0_K$$

nach S. 2.4 (mit $(G, *) = (K, +)$). Entsprechend sieht man $x \cdot 0_K = 0_K$.
2. und 3. [Ü] □

Beispiel 2.7 1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper.
2. (Binärkörper) Es sei $K = \{n, e\}$ mit den Rechenoperationen

$+$	n	e
n	n	e
e	e	n

$\cdot$	n	e
n	n	n
e	n	e

Dann ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit $n = 0_K$ und $e = 1_K$ (Beweis: [Ü]).

3. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bilden keine Körper (vgl. B. 2.3).

Definition 2.8 Wir definieren nun Summen und Produkte für mehr als zwei Summanden bzw. Faktoren: Sind $x_1, \ldots, x_n \in K$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so setzen wir

$$\sum_{\nu=1}^{1} x_\nu := x_1 \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{k+1} x_\nu := \left(\sum_{\nu=1}^{k} x_\nu\right) + x_{k+1} \text{ für } k = 1, \ldots, n-1$$

und

$$\prod_{\nu=1}^{1} x_\nu := x_1 \quad \text{und} \quad \prod_{\nu=1}^{k+1} x_\nu := \left(\prod_{\nu=1}^{k} x_\nu\right) \cdot x_{k+1} \text{ für } k = 1, \ldots, n-1.$$

Ist speziell $x_1 = \ldots = x_n =: x$, so schreiben wir

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x =: nx$$

und

$$\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu = \prod_{\nu=1}^{n} x =: x^n \,.$$

Schließlich setzen wir noch für $n \in \mathbb{N}$

$$(-n)x := n(-x)\,, \qquad x^{-n} := (x^{-1})^n$$

und

$$0 \cdot x := 0_K\,,\ x^0 := 1_K \quad \text{wobei 0 die Null in } \mathbb{Z} \text{ bezeichnet}\,.$$

Eng verbunden mit dem eben verwendeten Prinzip der rekursiven oder induktiven Definition ist das Beweisverfahren der vollständigen Induktion:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Zum Beweis der Behauptung

“Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$”

geht man oft folgendermaßen vor:

1. Man zeigt, dass $A(1)$ richtig ist (*Induktionsanfang*).

2. a) Man nimmt an, dass $A(k)$ (oder auch $A(1), \ldots, A(k)$) für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ richtig ist (*Induktionsannahme*).

   b) Man zeigt, dass aus der Richtigkeit von $A(k)$ (bzw. $A(1), \ldots, A(k)$), d. h. aus der Induktionsannahme, die Richtigkeit von $A(k+1)$ folgt (*Induktionsschritt*).

Dieses Beweisschema nennt man *Induktionsbeweis* oder *vollständige Induktion.* Aus 1. und 2. ergibt sich, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. (Eine wesentliche Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist die, dass für $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $n+1 \in M$ für alle $n \in M$ schon $M = \mathbb{N}$ gilt.)
Manchmal möchte man statt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0, n \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$ zeigen. Dann macht man den Induktionsanfang nicht für $n = 1$, sondern für $n = N$ und den Induktionsschritt von k auf $k+1$ für beliebiges $k \geq N$.

Ein typischer Induktionsbeweis ist der Beweis zu

Satz 2.9 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Beweis.

1. Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\sum\limits_{\nu=1}^{1} \nu = \frac{1 \cdot 2}{2}$ (d. h. $A(1)$ gilt).

2. a) Induktionsannahme: Für ein $k \in \mathbb{N}$ gelte $\sum\limits_{\nu=1}^{k} \nu = \frac{k(k+1)}{2}$ (d. h. $A(k)$ gelte).

   b) Wir zeigen: aus a) folgt $\sum\limits_{\nu=1}^{k+1} \nu = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (d. h. $A(k+1)$ folgt).

   Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{k+1} \nu &= \left(\sum_{\nu=1}^{k} \nu \right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} . \end{aligned}$$

□

Wir kommen noch einmal auf das Summen- und das Produktzeichen zu sprechen.

Bemerkung und Definition 2.10 Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $\varphi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijektiv. Dann gilt für $x_1, \dots, x_n \in K$

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_{\varphi(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \qquad \text{und} \qquad \prod_{\nu=1}^{n} x_{\varphi(\nu)} = \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu .$$

Damit wird folgende Schreibweise sinnvoll: Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist I eine beliebige n-elementige Menge, so setzen wir für $x_j \in K$ $(j \in I)$

$$\sum_{j \in I} x_j := \sum_{k=1}^{n} x_{j_k} ,$$

wobei $\{j_1, \dots, j_n\}$ eine beliebige Aufzählung von I ist. Es gilt dann : Ist $\mathcal{F}$ eine Zerlegung von I, d. h. ist $I = \bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}} F$ mit $F \cap F' = \emptyset$, falls $F, F' \in \mathcal{F}, F \neq F'$, so gilt

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \sum_{j \in F} x_j = \sum_{j \in I} x_j, \qquad \prod_{F \in \mathcal{F}} \prod_{j \in F} x_j = \prod_{j \in I} x_j .$$

Sind weiter $y_j \in K$ $(j \in I)$ und $x \in K$, so gilt

$$\sum_{j \in I} x x_j = x \sum_{j \in I} x_j ,$$

und

$$\sum_{j \in I} (x_j + y_j) = \sum_{j \in I} x_j + \sum_{j \in I} y_j, \qquad \prod_{j \in I} (x_j y_j) = \prod_{j \in I} x_j \prod_{j \in I} y_j .$$

Die Beweise ergeben sich (nicht ganz leicht) per Induktion.
Weiter kann man hiermit (leicht) zeigen, dass für $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und $x_1, x_2, x \in K$ folgende Vervielfachungs- und Potenzgesetze gelten:

$$\begin{aligned} m_1 x + m_2 x &= (m_1 + m_2) x , \\ m x_1 + m x_2 &= m (x_1 + x_2) , \\ (m_1 m_2) x &= m_1 (m_2 x) . \end{aligned}$$

und (für $x_1, x_2, x \neq 0$)

$$\begin{aligned} x^{m_1} x^{m_2} &= x^{m_1 + m_2} , \\ x_1^m x_2^m &= (x_1 x_2)^m , \\ (x^{m_1})^{m_2} &= x^{m_1 m_2} . \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt Körper, die neben den algebraischen Strukturen "+" und "·" eine Ordnungsstruktur haben.

Definition 2.11 Es sei $K = (K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann heißt $K = (K, +, \cdot, <)$ *geordnet*, wenn auf K eine Relation $<$ gegeben ist, die folgenden Ordnungsaxiomen genügt.

(O.1) Für alle $x, y \in K$ gilt genau eine der Beziehungen
$x = y$ oder $x < y$ oder oder $y < x$
(Trichotomiegesetz).

(O.2) Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ (Transitivgesetz).

(O.3) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ für alle $z \in K$ (1. Monotoniegesetz).

(O.4) Aus $x < y$ und $0_K < z$ folgt $xz < yz$ (2. Monotoniegesetz).

Für $x < y$ schreiben wir auch $y > x$. Außerdem bedeutet $x \leq y$, dass entweder $x = y$ oder $x < y$ gilt. Dann schreibt man auch $y \geq x$. Wir nennen $x \in K$ *positiv*, falls $x > 0_K$ gilt und *negativ*, falls $x < 0_K$ gilt.

Satz 2.12 *Es seien $K = (K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gilt*

1. *Es ist $x > 0_K$ genau dann, wenn $-x < 0_K$ ist,*
2. *Aus $x, y < 0_K$ oder $x, y > 0_K$ folgt $xy > 0_K$,*
3. *Für $x \neq 0_K$ ist $x^2 > 0_K$, insbesondere also $1_K = 1_K^2 > 0_K$,*
4. *Aus $0_K < x < y$ folgt $0_K < y^{-1} < x^{-1}$.*

Beweis.

1. Aus $0 < x$ folgt mit (O.3)
$$-x = 0 + (-x) < x + (-x) = 0 \ ,$$
d. h. $-x < 0$. Entsprechend folgt aus $-x < 0$ auch $0 = x + (-x) < x + 0 = x$.

2. Sind $x, y > 0$ so folgt mit (O.4) sofort $0 = 0y < xy$.

   Es seien $x, y < 0$. Aus $x < 0$ folgt $-x > 0$ nach 1. Wegen $y < 0$ ergibt sich mit (O.4)
$$-(xy) = y(-x) < 0(-x) = 0 \ ,$$
   also $xy > 0$ mit 1.

3. Ergibt sich unmittelbar aus 2. und (O.1).

4. Wir zeigen zunächst: $x^{-1} > 0$. (Denn: Angenommen, es ist $x^{-1} < 0$ (beachte $x^{-1} \neq 0$). Dann folgt mit (O.4) $1 = xx^{-1} < x0 = 0$ im Widerspruch zu 3.) Genauso ist $y^{-1} > 0$. Damit ergibt sich aus $x < y$ mit (O.4) $xy^{-1} < yy^{-1} = 1$ und wieder mit (O.4) $x^{-1}xy^{-1} < x^{-1}1 = x^{-1}$, also $y^{-1} < x^{-1}$.

□

Bemerkung 2.13 Es sei K ein geordneter Körper. Per Induktion sieht man leicht:

1. Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist $x < y$, so gilt $nx < ny$ und im Falle $x > 0_K$ auch $0_K < x^n < y^n$.
2. Ist $x > 0_K$, so ist auch $nx > mx > 0_K$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$.

Hieraus folgt: Sind $x, y \in K$ mit $x < y$, so liegen zwischen x und y unendlich viele Elemente aus K
(Denn: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ ist $n1_K > m1_K > 0_K$, also $(m1_K)^{-1} > (n1_K)^{-1} > 0_K$ und folglich

$$y = x + (y-x)(1_K)^{-1} > x + (y-x)(2 \cdot 1_K)^{-1} > x + (y-x)(3 \cdot 1_K)^{-1} \cdots > x\ .)$$

Insbesondere ist K selbst unendlich!

Beispiel 2.14 1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ ist ein geordneter Körper.
2. Im Binärkörper $(K, +, \cdot)$ aus B. 2.7.2 existiert keine Ordnungsrelation, da jeder geordnete Körper unendlich viele Elemente enthält (vgl. B 2.13).

3 Geometrische Summenformel und binomische Formel

Eine wichtige Formel für Summen von Potenzen in Körpern ist die

Satz 3.1 *(geometrische Summenformel)*
Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann gilt für alle $x \in K$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$1_K - x^n = (1_K - x) \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu \tag{3.1}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu &= \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu - x\sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu = \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{n-1} x \cdot x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{n-1} x^{\nu+1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu - \sum_{\mu=1}^{n} x^\mu = 1 - x^n \ .\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2 Allgemeiner kann man zeigen ([Ü]): Ist K ein Körper und sind $a, b \in K$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b^n - a^n = (b-a)\sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-1-\nu} \ .$$

Neben der geometrischen Summenformel gibt es eine weitere Formel in Körpern, die binomische Formel. Es handelt sich dabei um eine Summenformel für die Ausdrücke $(a+b)^n$, wobei $a, b \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ ist. Um die allgemeine Formel angeben zu können, brauchen wir

Definition 3.3 1. Wir definieren $n!$ ("*n-Fakultät*") für $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$n! := \prod_{\nu=1}^{n} \nu \ ,$$

wobei $\prod\limits_{\nu=m}^{n} x_\nu := 1$ im Falle $n < m$ gesetzt ist (also $0! = 1$).

2. Für $n, \nu \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$\binom{n}{\nu} := \frac{1}{\nu!} \prod_{k=n-\nu+1}^{n} k \qquad \left(= \frac{1}{\nu!} \prod_{k=1}^{\nu} (n+1-k) \right)$$

Die Zahlen $\binom{n}{\nu}$ heißen *Binomialkoeffizienten.*

Es gilt also etwa

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 \,, \qquad 10! = 3.628.800 \,,$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} = 21$$

Wir stellen einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten zusammen.

Satz 3.4 *Es seien $n, \nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

1. $\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \binom{n}{n-\nu}$ *falls* $\nu \leq n$.

2. $\binom{n}{\nu} = 0$ *falls* $\nu > n$.

Beweis.

1. Es gilt für $\nu \leq n$

$$\binom{n}{\nu} = \frac{\prod_{k=n-\nu+1}^{n} k}{\nu!} = \frac{\prod_{k=n-\nu+1}^{n} k}{\nu!} \cdot \frac{(n-\nu)!}{(n-\nu)!} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

Damit ist auch

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \frac{n!}{(n-(n-\nu))!(n-\nu)!} = \binom{n}{n-\nu} \,.$$

2. Für $\nu > n$ ist $n - \nu + 1 \leq 0$ und damit $\prod_{k=n-\nu+1}^{n} k = 0$, also auch $\binom{n}{\nu} = 0$.

□

Besonders wichtig ist folgende Rekursionsformel:

Satz 3.5 *Für $n, \nu \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{n+1}{\nu} = \binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu}$$

Beweis. Nach S. 3.4.1 gilt für $\nu \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} &= \frac{n!}{(\nu-1)!(n-\nu+1)!} + \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \\ &= \frac{n!}{\nu!(n+1-\nu)!}\left\{\frac{\nu!}{(\nu-1)!} + \frac{(n+1-\nu)!}{(n-\nu)!}\right\} = \\ &= \frac{n!}{\nu!(n+1-\nu)!}\{\nu + (n+1-\nu)\} = \frac{(n+1)!}{\nu!(n+1-\nu)!} = \binom{n+1}{\nu}.\end{aligned}$$

Für $\nu = n+1$ ist nach S. 3.4.2

$$\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \binom{n}{n} + 0 = 1 = \binom{n+1}{\nu}$$

und für $\nu > n+1$ sind beide Seiten $= 0$. $\square$

Ordnet man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\nu}$ in einem dreieckigen Schema an, wobei in der n-ten Zeile die Koeffizienten $\binom{n}{0}, \dots, \binom{n}{n}$ stehen, so entsteht das sog. *Pascal'sche Dreieck*:

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \\ \vdots\qquad \vdots\qquad \vdots \\ \binom{n}{0}\ \binom{n}{1} \dots \binom{n}{\nu-1}\ \binom{n}{\nu} \dots \binom{n}{n} \\ \binom{n+1}{0}\ \binom{n+1}{1}\ \dots \binom{n+1}{\nu} \dots\ \binom{n+1}{n+1} \end{array}$$

Die ersten Zeilen berechnen sich etwa unter Ausnutzung von S. 3.5 zu

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{array}$$

Damit gilt

Satz 3.6 *Es sei K ein Körper. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K$*

$$(1_K + x)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu$$

Beweis.
1. Für $n = 0$ gilt $(1 + x)^0 = 1 = \sum\limits_{\nu=0}^{0} \binom{0}{\nu} x^\nu$.
2. Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$(1 + x)^k = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} x^\nu \ .$$

Dann gilt mit S. 3.5

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k = (1+x) \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} x^\nu \\
&= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} x^\nu + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} x^{\nu+1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} x^\nu + \sum_{\mu=1}^{k+1} \binom{k}{\mu-1} x^\mu \\
&= 1 + \sum_{\nu=1}^{k} \binom{k+1}{\nu} x^\nu + x^{k+1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{k+1}{\nu} x^\nu \ .
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.7 Aus S. 3.6 ergibt sich unmittelbar die allgemeine binomische Formel: Sind $a, b \in K$, so ist

$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu} \ .$$

(Denn: Im Falle $b \neq 0$ ist

$$(a + b)^n = b^n \big(1 + (a/b)\big)^n = b^n \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (a/b)^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$$

und im Falle $b = 0$ steht auf beiden Seiten a^n.)

Beispiel 3.8 Es gilt etwa

$$\begin{aligned}(a+b)^6 &= \sum_{\nu=0}^{6} \binom{6}{\nu} a^\nu b^{n-\nu} \\ &= 1 \cdot b^6 + 6 \cdot ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + 1 \cdot a^6 \ .\end{aligned}$$

Bemerkung 3.9 Als Spezialfälle aus S. 3.6 ergeben sich interessante Beziehungen für das Pascal'sche Dreieck:
Für ($K = \mathbb{Q}$ und) $a = 1, b = 1$ ergibt sich

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} 1^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \ ,$$

d. h. die Summe der Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile des Pascal'schen Dreiecks ergibt stets 2^n.
Für $a = -1, b = 1$ ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$

$$0 = 0^n = \big(1 + (-1)\big)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \ ,$$

d. h. versieht man die Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile jeweils abwechselnd mit dem Vorzeichen $+$ und $-$, so erhält man als Summe 0.
Für $n = 6$ gilt etwa

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$

und

$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0 \ .$$

Bemerkung 3.10 (Bernoullische Ungleichung)
Ist $(K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper, so gilt nach S. 3.6 für alle $n \in \mathbb{N}, x \geq 0_K$

$$(1+x)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu \geq \sum_{\nu=0}^{1} \binom{n}{\nu} x^\nu = 1 + nx.$$

Tatsächlich gilt diese Abschätzung auch für $x \geq -1_K$.
(Denn: Für $k = 1$ ist $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$.
Gilt die Abschätzung für ein $k \in \mathbb{N}$ und ist $x \geq -1_K$, so folgt (da $1 + x \geq 0_K$)

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \ .)$$

Bemerkung 3.11 Zum Abschluss beschäftigen wir uns kurz mit der Bedeutung der Fakultäten und Binomialkoeffizienten im Bereich der „Kombinatorik".
Für eine endliche Menge M setzen wir

$$|M| := \text{Anzahl der Elemente von } M.$$

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Sind I, J n-elementige Mengen und ist

$$S(I,J) := \{\varphi : I \to J : \varphi \text{ bijektiv}\}$$

so ist

$$\big|S(I,J)\big| = n!.$$

(Denn: Für $k = 1$ ist die Behauptung klar.
Gilt die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}$ und sind I, J $(k+1)$-elementige Mengen, so ist für ein festes $j \in J$ durch

$$T_i := \big\{\varphi \in S(I,J) : \varphi(i) = j\big\} \qquad (i \in I)$$

eine Zerlegung von $S(I,J)$ gegeben. Also ist $\big|S(I,J)\big| = \sum\limits_{i \in I} |T_i|$. Weiter gilt: Jedem $\varphi \in T_i$ entspricht genau ein $\psi \in S\big(I \setminus \{i\}, J \setminus \{j\}\big)$, nämlich

$$\psi = \varphi_{|I \setminus \{i\}} : I \setminus \{i\} \to J \setminus \{j\}\ .$$

Nach Induktionsannahme gilt $\big|S\big(I \setminus \{i\}, J \setminus \{j\}\big)\big| = k!$ und damit auch $|T_i| = k!$. Also ist $\big|S(I,J)\big| = \sum\limits_{i \in I} k! = (k+1)k! = (k+1)!$.)

2. Ist M eine n-elementige Menge und ist $\mathcal{M}_\nu \subset \operatorname{Pot}(M)$ die Menge der ν-elementigen Teilmengen von M (wobei $\nu \in \{0, \ldots, n\}$), so ist ([Ü])

$$|\mathcal{M}_\nu| = \binom{n}{\nu}.$$

4 Reelle und komplexe Zahlen

Ist $(K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper (etwa $K = \mathbb{Q}$), so sind Gleichungen der Form

$$nx = c$$

für alle $n \in \mathbb{N}, c \in K$ lösbar ($x = c/n := c/(n1_K)$ ist die eindeutige Lösung). Im Allgemeinen gilt dies nicht für Gleichungen der Form

$$x^n = c,$$

wobei $c \in K, n \in \mathbb{N}, n > 1$. Sind $c < 0$ und n gerade, so ist dies nach S. 2.12.3 ohnehin ausgeschlossen. Aber auch im Falle $c > 0$ existiert im Allgemeinen keine Lösung (wie schon seit der Antike bekannt ist).

Satz 4.1 *Für alle $x \in \mathbb{Q}$ ist $x^2 \neq 2$.*

Beweis. 1. Allgemein gilt: Ist $m \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist auch m^2 ungerade (denn: ist $m = 2\ell + 1$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$, so ist $m^2 = 4(\ell^2 + \ell) + 1$, also ebenfalls ungerade).
2. Behauptung: Ist $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $(p/q)^2 = 2$ (wobei ohne Einschränkung $q \in \mathbb{N}$), so ist $q/2^n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(Dies zeigt, dass kein solches p/q existiert, da hieraus $q \geq 2^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgen würde).
Beweis dazu:
Für $n = 0$ ist die Behauptung klar.
Ist $q/2^k \in \mathbb{N}$, d. h. $q = 2^k\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}_0$, so folgt

$$\left(\frac{p}{2^k}\right)^2 = \frac{2q^2}{2^{2k}} = 2\ell^2,$$

also ist $(p/2^k)^2$ gerade. Nach 1. ist auch $p/2^k$ gerade, d. h. es existiert ein $j \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2^{k+1}j$. Hieraus folgt

$$\left(\frac{q}{2^k}\right)^2 = \frac{2q^2}{2^{2k+1}} = \frac{p^2}{2^{2k+1}} = 2j^2,$$

also ist $(q/2^k)^2$ gerade und nach 1. auch $q/2^k$. Folglich ist $q/2^{k+1} \in \mathbb{N}$. □

Unsere Ziele im Weiteren sind:
1. Erweitern von $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ zu einem geordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ so, dass $x^n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $c \geq 0_\mathbb{R}$ lösbar ist.
2. Erweitern von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zu einem Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ so, dass $x^n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C}$ lösbar ist.

Definition 4.2 Es sei K ein geordneter Körper, und es sei $M \subset K$.

1. M heißt *nach oben beschränkt*, wenn ein $\overline{s} \in K$ existiert mit
$$x \leq \overline{s} \quad \text{für alle} \quad x \in M\ .$$
Ein solches $\overline{s}$ heißt dann *obere Schranke* von M.

2. M heißt *nach unten beschränkt*, wenn ein $\underline{s} \in K$ existiert mit
$$x \geq \underline{s} \quad \text{für alle} \quad x \in M\ .$$
Ein solches $\underline{s}$ heißt dann *untere Schranke* von M.

3. M heißt *beschränkt* wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

4. Sind X eine Menge und $f : X \to K$, so heißt f *beschränkt*, falls $W(f) \subset K$ beschränkt ist.

Beispiel 4.3 Es sei $K = \mathbb{Q}$ und
$$M := \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\} \ \big(= \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 < 2\}\big)\ .$$
Dann ist M beschränkt, denn $\underline{s} = 0$ ist eine untere Schranke und $\overline{s} = 3/2$ ist eine obere Schranke von M (Ist $x > 3/2$, so folgt $x^2 > (3/2)^2 = 9/4 > 2$, d. h. $x \notin M$).

Mit einer oberen Schranke $\overline{s}$ von M ist natürlich jedes $\overline{\overline{s}} \in K$ mit $\overline{\overline{s}} > \overline{s}$ ebenfalls eine obere Schranke für M. Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage nach "kleinsten" oberen Schranken.

Definition 4.4 Es sei K ein geordneter Körper, und es sei $M \subset K$.

1. Ein obere Schranke $\overline{\xi} \in K$ von M heißt *kleinste obere Schranke* (oder *Supremum*) von M, falls für jede obere Schranke $\overline{s}$ von M gilt
$$\overline{s} \geq \overline{\xi}\ .$$

2. Eine untere Schranke $\underline{\xi} \in K$ von M heißt *größte untere Schranke* (oder *Infimum*) von M, falls für jede untere Schranke $\underline{s}$ von M gilt
$$\underline{s} \leq \underline{\xi}\ .$$

Bemerkung und Definition 4.5 Aus der Definition ergibt sich sofort, dass für jedes M höchstens ein Supremum $\overline{\xi}$ und ein Infimum $\underline{\xi}$ existieren. Wir schreiben (im Falle der Existenz) $\overline{\xi} = \sup M$. Zudem nennen wir $\overline{\xi}$ *Maximum* von M (und schreiben $\overline{\xi} = \max M$), falls zusätzlich $\overline{\xi} \in M$ gilt.
Weiter schreiben wir (im Falle der Existenz) $\underline{\xi} := \inf M$. Schließlich nennen wir $\underline{\xi}$ *Minimum* von M (und schreiben $\underline{\xi} = \min M$), falls zusätzlich $\underline{\xi} \in M$ gilt.

Beispiel 4.6 Es sei $K = \mathbb{Q}$.

1. Ist $M = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1\}$, so gilt
$$0 = \inf M (= \min M) \quad \text{und} \quad 1 = \sup M (= \max M) \,.$$
2. Ist $M = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$, so gilt ebenfalls
$$0 = \inf M \quad \text{und} \quad 1 = \sup M \,.$$
Man sieht, dass i.A. $\inf M$ und $\sup M$ nicht in M liegen müssen!
3. Es sei $M = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$. Nach B. 4.3 ist M beschränkt. Hier ist $\inf M = 0$, es existiert aber **kein Supremum** von M. Dies ergibt sich aus S. 4.1 und dem folgenden Resultat.

Satz 4.7 *Es sei K ein geordneter Körper, und es seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $c \in K, c \geq 0$. Wir setzen $M := \{x \in K : x \geq 0, x^n \leq c\}$. Dann gilt*

1. *M ist nichtleer und nach oben beschränkt.*
2. *Existiert $s := \sup M$, so gilt $s^n = c$.*

Beweis.

1. Stets ist $0 \in M$. Weiter ist $1 + c$ obere Schranke vom M. (Denn: Ist $x \in K$ mit $x > 1 + c$, so gilt nach der Bernoullischen Ungleichung
$$x^n > (1 + c)^n \geq 1 + nc > nc \geq c$$
und damit ist $x \notin M$.)
2. Zunächst gilt für $0 \leq a \leq b$
$$b^n - a^n \leq n(b - a)b^{n-1} \,. \qquad (*)$$
Denn: Nach der verallgemeinerten geometrischen Summenformel (B. 3.2) ist
$$b^n - a^n = (b - a)\sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-\nu-1} \leq n(b - a)b^{n-1}.$$
   a) Angenommen, es ist $s^n > c$. Für $h := \dfrac{s^n - c}{ns^{n-1}}$ gilt dann
$$0 < h \leq \frac{s^n}{ns^{n-1}} \leq \frac{s^n}{s^{n-1}} = s \,.$$
   Ist $x > s - h$, so folgt aus $(*)$ mit $b = s, a = s - h$
$$s^n - x^n < s^n - (s - h)^n \leq n \cdot h \cdot s^{n-1} = s^n - c \,.$$
   Also ist $x^n > c$, d.h. $x \notin M$. Damit ist $s - h$ obere Schranke von M im Widerspruch dazu, dass s kleinste obere Schranke ist. Also ist $s^n \leq c$.

b) Angenommen, $s^n < c$ (falls $c > 0$). Dann ist

$$y := \frac{c - s^n}{n(s+1)^{n+1}} > 0\,.$$

Für $z := \min(1, y)$ folgt dann aus $(*)$ mit $b = s + z, a = s$

$$(s+z)^n - s^n \leq n \cdot z(s+z)^{n-1} \leq n \cdot y(s+1)^{n-1} \;=\; c - s^n\,,$$

also ist $(s+z)^n \leq c$ und damit $s + z \in M$. Da $z > 0$ ist, ist damit s keine obere Schranke von M. Widerspruch. Also ist $s^n = c$ nach a).

□

Definition 4.8 Ein geordneter Körper K heißt *(ordnungs-)vollständig*, falls jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von K ein Supremum hat.

Bemerkung und Definition 4.9 Ist K vollständig, so hat für jedes $c \in K, c \geq 0$, und jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$x^n = c$$

genau eine Lösung $s \in K$ mit $s \geq 0$.
(Denn: Die Existenz einer Lösung x ergibt sich aus S. 4.7. Sind $x_1, x_2 \in K$ mit $0 \leq x_1 < x_2$ so ergibt sich auch $x_1^n < x_2^n$. Also hat die Gleichung $x^n = c$ höchstens eine Lösung.)
Wir setzen

$$\sqrt[n]{c} := s\,.$$

Damit ergibt sich für $c, d \in K$ $c, d \geq 0$ aus den entsprechenden Potenzgesetzen leicht ([Ü])

$$\sqrt[n]{cd} = \sqrt[n]{c}\,\sqrt[n]{d} \qquad \text{und} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[nm]{c}\,.$$

Schließlich ist für $0 \leq c < d$ auch $\sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{d}$.

Von zentraler Bedendeutung für die Analysis ist die folgende Tatsache

Satz 4.10 *Es existiert ein vollständiger geordneter Körper.*

Beweisskizze Wir wollen uns darauf beschränken, den Beweis zu skizzieren.
Die Elemente des Körpers werden als gewisse Teilmengen von $\mathbb{Q}$ definiert (sog. Dedekindsche Schnitte):
$A \subset \mathbb{Q}$ heißt *(Dedekindscher) Schnitt*, falls gilt:

(D.1) $A \neq \emptyset\,, \quad A \neq \mathbb{Q}$.

(D.2) Ist $p \in A$ so gilt $q \in A$ für alle $q < p$.

(D.3) Ist $p \in A$ so existiert ein $r \in A$ mit $p < r$.

Damit setzen wir

$$\mathbb{R} := \{A : A \text{ Dedekindscher Schnitt}\}\ .$$

1. Sind A, B Schnitte, so definiert man

$$A + B := \{r + s : r \in A, s \in B\}\ .$$

Dann ist auch $A + B$ ein Schnitt, d. h. $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(Denn:
Zu (D.1): Offenbar ist $A + B \neq \emptyset$.
Sind $r' \notin A, s' \notin B$, so ist $r' + s' > r + s$ für alle $r \in A, s \in B$. Also ist $r' + s' \notin A + B$ und insbesondere $A + B \neq \mathbb{Q}$.
Zu (D.2) und (D.3): Es sei $p \in A + B$. Dann existieren $r \in A, s \in B$ mit $p = r + s$. Ist $q < p$, so folgt $q - s < r$, also $q - s \in A$ und damit $q = (q - s) + s \in A + B$, d. h. (D.2) gilt.
Schließlich sei $t \in A$ so, dass $t > r$ ist. Dann gilt $p < t + s$ und $t + s \in A + B$. Also gilt auch (D.3).)
Man kann zeigen: Vermittels dieser Definition der Addition ist $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe mit

$$0_{\mathbb{R}} = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\} \quad \text{und} \quad -A = \{p \in \mathbb{Q} : -p - r \notin A \text{ für ein } r > 0\}$$

für $A \in \mathbb{R}$.

2. Wir definieren nun eine Relation $<$ auf den Schnitten (also auf $\mathbb{R}$) durch

$$A < B :\Leftrightarrow A \subset B,\ A \neq B\ .$$

Man rechnet damit nach, dass die Ordnungsaxiome $(O.1), (O.2)$ und $(O.3)$ erfüllt sind.

3. Nun kann man auch eine Multiplikation in $\mathbb{R}$ definieren. (Dies erweist sich als etwas schwieriger als die Definition der Addition, insbesondere weil Produkte negativer rationaler Zahlen positiv sind). Zunächst definiert man daher eine Multiplikation auf $\mathbb{R}_+ := \{A \in \mathbb{R} : A > 0_{\mathbb{R}}\}$ durch

$$A \cdot B := \{p \in \mathbb{Q} : \exists r \in A, s \in B \text{ mit } r, s > 0 \text{ und } p < rs\}$$

(wobei $A, B > 0_{\mathbb{R}}$). Anschließend definieren wir

$$A 0_{\mathbb{R}} := 0_{\mathbb{R}} A := 0_{\mathbb{R}}$$

und

$$AB := \begin{cases} (-A)(-B) & , \text{ falls } A < 0_{\mathbb{R}} \quad , \quad B < 0_{\mathbb{R}} \\ -[(-A)B] & , \text{ falls } A < 0_{\mathbb{R}} \quad , \quad B > 0_{\mathbb{R}} \\ -[A(-B)] & , \text{ falls } A > 0_{\mathbb{R}} \quad , \quad B < 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

Hiermit wird $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ zu einem geordneten Körper mit Einselement

$$1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}.$$

4. Wir zeigen, dass dieser vollständig ist:
Dazu sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ nach oben beschränkt. Wir definieren

$$B := \bigcup_{A \in M} A\,.$$

Dann kann man (leicht) zeigen, dass B ein Schnitt, also $B \in \mathbb{R}$ ist. Natürlich gilt $A \leq B$ für alle $A \in M$ und ist $C < B$, so existiert ein $s \in B$ mit $s \notin C$. Wegen $s \in B$ ist $s \in A$ für ein $A \in M$. Also ist $C < A$, d. h. C ist keine obere Schranke von M. Folglich ist $B = \sup M$. □

Bemerkung 4.11 Wir definieren $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ durch

$$j(r) := \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}\,,$$

Es gilt dann: Sind $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A < B$, so existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $A < j(r) < B$.
(Denn: Da $A < B$ ist, existiert ein $p \in \mathbb{Q}$ mit $p \in B, p \notin A$. Nach (D.3) existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $r > p$ und $r \in B$. Damit ist

$$A \subset j(r) \subset B \quad \text{umd} \quad A \neq j(r) \neq B\,,$$

d.h. $A < j(r) < B$.)
Weiter ist j injektiv, und es gilt $j(r+s) = j(r) + j(s)$ sowie $j(rs) = j(r)j(s)$ für alle $r, s \in \mathbb{Q}$. Außerdem ist dabei $j(r) < j(s)$ genau dann, wenn $r < s$ ist. Man sagt, $\mathbb{Q}$ sei vermittels j in $\mathbb{R}$ eingebettet. Indem wir r mit $j(r)$ identifizieren, können wir $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen.

Definition 4.12 Wir setzen für $a, b \in \mathbb{R}$ (mit $a \leq b$)

$$\begin{array}{lll lll}
[a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & (-\infty, b] & := & \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
(a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & (-\infty, b) & := & \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
[a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & [a, \infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & (a, \infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
 & & & (\infty, \infty) & := & \mathbb{R}\,,\ (-\infty, 0) = \mathbb{R}_-\,,\ (0, \infty) = \mathbb{R}_+
\end{array}$$

Diese Mengen heißen *Intervalle*.

Wie wir oben gesehen haben, hat in $\mathbb{R}$ jede Gleichung $x^n = c$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c \geq 0$ eine Lösung. Leider gilt dies nicht mehr im Falle $c < 0$ und n gerade (da $x^n \geq 0$ für gerades n und beliebiges $x \in \mathbb{R}$ nach S. 2.12.3). Unser Ziel ist es nun, den Körper der reellen Zahlen so zu erweitern, dass $x^2 = c$ auch für $c < 0$ (also etwa $x^2 = -1$) lösbar ist. (Wir werden später sehen, dass tatsächlich dann auch $x^n = c$ für beliebiges c lösbar ist.)

Bemerkung und Definition 4.13 Wir setzen

$$\mathbb{C} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \qquad (= \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

und für $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

sowie

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2 \,,\, x_1 y_2 + x_2 y_1) \,.$$

Man rechnet leicht nach, dass dann $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist. $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ heißt *Körper der komplexen Zahlen* und $z \in \mathbb{C}$ heißt *komplexe Zahl*.
Dabei ist die Null in $\mathbb{C}$ gegeben durch $0 = 0_{\mathbb{C}} = (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$ und die Eins in $\mathbb{C}$ ist gegeben durch $1 = 1_{\mathbb{C}} = (1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$. Weiter sieht man: Ist $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, so gilt

$$-z = (-x, -y) \qquad \text{und} \quad z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{für } z \neq 0 \,.$$

Wir nennen für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$

$$\text{Re}\, z := x \qquad \textit{Realteil} \text{ von } z$$

und

$$\text{Im}\, z := y \qquad \textit{Imaginärteil} \text{ von } z \,.$$

Beispiel 4.14 Es sei $z_1 = (3, -1),\ z_2 = (2, 4)$.
Dann gilt $z_1 + z_2 = (5, 3),\ z_1 - z_2 = (3, -1) + (-2, -4) = (1, -5)$ und

$$z_1 \cdot z_2 = (3, -1) \cdot (2, 4) = (6 - (-4), 12 - 2) = (10, 10) \,.$$

Bemerkung 4.15 Vermittels der Abbildung $j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$j(x) := (x, 0) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ist $\mathbb{R}$ eingebettet in $\mathbb{C}$.
(Man leicht, dass j injektiv ist und die Körperstruktur erhält, d. h. es ist $j(x + y) = j(x) + j(y)$ sowie $j(xy) = j(x)j(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$).

Indem wir wieder $j(x)$ mit x identifizieren, können wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. Den reellen Zahlen entsprechen die komplexen Zahlen mit Imaginärteil $= 0$. *Wir schreiben dann auch kurz x statt $(x, 0)$.*
Man nennt weiterhin

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}$$

die *imaginäre Einheit* in $\mathbb{C}$. Für i gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1\,.$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir jedes $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ in der Form

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy \;(= \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)$$

schreiben. Diese Darstellung heißt *Normaldarstellung* von z.
So gilt etwa

$$\begin{aligned} z_1 = (3, -1) &= 3 + i(-1) \quad (= 3 - i) \\ z_2 = (2, 4) &= 2 + i4 \qquad\;\; (= 2 + 4i) \end{aligned}$$

Bemerkung 4.16 In $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist es nicht möglich, eine Ordnungsrelation $<$ (mit den Eigenschaften aus D. 2.11) zu definieren!
(Denn: Angenommen, doch. Dann gilt $1_{\mathbb{C}} > 0_{\mathbb{C}}$ nach S. 2.12.3, also $-1_{\mathbb{C}} < 0_{\mathbb{C}}$ nach S. 2.12.1. Für $z = i$ gilt mit S. 2.12.3 aber andererseits $0 < i^2 = -1_{\mathbb{C}}$ also Widerspruch zu (O.1).)

Definition 4.17 Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl.

1. Die komplexe Zahl $\overline{z} := x - iy$ heißt zu z *konjugiert komplex.*
2. Die Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty)$ heißt *Betrag* von z.

Geometrisch entsteht $\overline{z}$ durch Spiegelung von z an der reellen Achse. Der Betrag $|z|$ gibt anschaulich die Länge der Strecke von 0 zu z wieder (Pythagoras!)

Satz 4.18 *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
3. $\overline{(\overline{z})} = z$,
4. $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *und* $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Beweis. [Ü] □

Für das Rechnen mit Beträgen gelten folgende Regeln

Satz 4.19 *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

1. $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$ *ist,*
2. $|z| = |\overline{z}|$, $|z| = |-z|$, $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$,
3. $|z|^2 = z\overline{z}$ *und* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ *(falls* $z \neq 0$*),*
4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,
5. $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *("Dreiecksungleichung in* $\mathbb{C}$*").*

Beweis. 1., 2. und 3. als [Ü].
4. Es gilt

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2 \,.$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung.
5. Es gilt

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = \\ &= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\overset{2.}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &\overset{3.}{=} |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung für $z_1 + z_2$. Damit erhält man dann auch

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| \,.$$

□

Beispiel 4.20 Es gilt für $z_1 = (3, -1) = 3 - i, z_2 = (2, 4) = 2 + 4i$

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}\,, \qquad |z_2| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \\ \overline{z_1} &= 3 - (-i) = 3 + i \\ z_1\overline{z_1} &= (3-i)(3+i) = 9 - 3i + 3i - i^2 = 9 + 1 \left(= |z_1|^2\right) \end{aligned}$$

Definition 4.21 In Verallgemeinerung von D. 3.3 setzen wir noch für $z \in \mathbb{C}$ und $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{z}{\nu} := \frac{1}{\nu!}\prod_{k=1}^{\nu}(z+1-k) = \begin{cases} \dfrac{z(z-1)\cdots(z-\nu+1)}{\nu!}, & \text{falls} \quad \nu > 0 \\ 1, & \text{falls} \quad \nu = 0 \end{cases}$$

Die Zahlen $\binom{z}{\nu} \in \mathbb{C}$ heißen ebenfalls *Binomialkoeffizienten*.

5 Folgen in $\mathbb{K}$

Es seien I, Y nichtleere Mengen und $a : I \to Y$. Man schreibt dann manchmal statt $a(\alpha)$ auch a_α (sog. Indexschreibweise) und statt $\alpha \mapsto a(\alpha)$ auch $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ oder kurz (a_α).
Ist $I \subset \mathbb{N}$ oder $I \subset \mathbb{Z}$ (unendlich), so spricht man von einer *Folge* (*in* Y). Im Falle $I = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq N\}$ schreibt man dabei auch $(a_n)_{n=N}^{\infty}$
In diesem Abschnitt betrachten wir $Y = \mathbb{R}$ (Folgen reeller Zahlen) oder $Y = \mathbb{C}$ (Folgen komplexer Zahlen). Um die beiden Fälle $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ einheitlich bezeichnen zu können, schreiben wir $\mathbb{K} := K$, falls $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 5.1 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt

1. *beschränkt*, falls $(|a_n|)$ beschränkt ist im Sinne von D. 4.2.4, d. h., falls ein $M > 0$ existiert mit $|a_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$. (Anderenfalls heißt (a_n) *unbeschränkt.*)

2. *Cauchy-Folge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit
$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N_\varepsilon.$$

3. *konvergent*, falls ein $a \in \mathbb{K}$ so existiert, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit
$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon.$$
Die Zahl a heißt dann *Grenzwert* von (a_n) und wir schreiben
$$a_n \to a \quad (n \to \infty)\ .$$
(Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent.*)

Bemerkung 5.2 1. Man sieht leicht, dass jede Folge (a_n) höchstens einen Grenzwert a hat ([Ü]). Man setzt im Falle der Konvergenz
$$a =: \lim_{n\to\infty} a_n\ .$$
2. Es sei $A(n)$ eine Aussage $(n \in \mathbb{N})$. Man sagt, $A(n)$ gilt *für alle* n *genügend groß*, falls die Menge $\{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist nicht wahr}\}$ endlich ist. So lässt sich etwa die Konvergenz einer Folge auch folgendermaßen formulieren: (a_n) ist genau dann konvergent gegen a, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt
$$|a_n - a| < \varepsilon$$
für alle n genügend groß.

Beispiel 5.3 1. Ist $a \in \mathbb{K}$ und ist $a_n = a$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist (a_n) konvergent mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.
2. Die Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ mit $a_n = n$ ist unbeschränkt (Denn: Nach B. 4.11 existiert zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$; sog. archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$).
3. Die Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ mit $a_n = 1/n$ ist konvergent zum Grenzwert $a = 0$, d. h.

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)\ .$$

(Denn: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\varepsilon > 1/\varepsilon$ (wieder B. 4.11). Also gilt für alle $n \geq N_\varepsilon$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon\ .\ )$$

4. Die Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ mit $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt (da $|a_n| = 1$für alle $n \in \mathbb{N}$), aber keine Cauchy-Folge.
(Denn: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_{2k} - a_{2k+1}| = 2\ ,$$

d. h. etwa zu $\varepsilon = 2$ existiert kein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$.)
Damit ist (a_n) auch divergent, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 5.4 *1. Jede Cauchy-Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ ist beschränkt.*
2. Jede konvergente Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis.
1. Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < 1 \qquad (n, m \geq N)\ ,$$

also $|a_n| = |a_n - a + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < |a_N| + 1$ für alle $n \geq N$. Mit

$$M := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$$

gilt dann

$$|a_n| \leq M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

2. Es sei $a := \lim a_n$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/2\,(n \geq N_\varepsilon)$. Also gilt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N_\varepsilon\ .$$

□

Bemerkung 5.5 Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$.
1. Aus der Definition der Konvergenz ergibt sich sofort: Es gilt $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ genau dann, wenn $|a_n - a| \to 0$ $(n \to \infty)$.
2. Ein einfaches, aber sehr nützliches Konvergenzkriterium ist das folgende: Sind $M > 0$ eine Konstante und (δ_n) eine Folge mit $|a_n - a| \leq M\delta_n$ für n genügend groß, und gilt $\delta_n \to 0\,(n \to \infty)$, so folgt $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.
(Denn: Es sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| \leq M\delta_n$ für alle $n \geq N$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, wobei o.E. $N_\varepsilon \geq N$, mit $\delta_n < \varepsilon/M$ $(n \geq N_\varepsilon)$ Dann ist auch $|a_n - a| \leq M\delta_n < \varepsilon$ $(n \geq N_\varepsilon)$.)

Als wichtiges Anwendungsbeispiel erhalten wir

Beispiel 5.6 (geometrische Folge)
Wir betrachten für $q \in \mathbb{C}$ die Folge $(q^n)_n$. Dann gilt

1. Für $|q| < 1$ konvergiert (q^n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
2. Für $|q| > 1$ ist (q^n) unbeschränkt, also insbesondere divergent.

(Denn:
1. Für $q = 0$ ist die Behauptung klar. Es sei also $0 < |q| < 1$. Dann ist mit einem $a > 0$

$$1/|q| = 1 + a\ .$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt $(1+a)^n \geq 1 + na > na$ und daher

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+a)^n} < \frac{1}{na} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Aus $1/n \to 0$ folgt mit B. 5.5 die Behauptung.
2. Nun sei $|q| > 1$, d. h. $|q| = 1+b$ mit einem $b > 0$. Mit der Bernoullischen Ungleichung gilt

$$|q^n| = (1+b)^n \geq 1 + nb \qquad (n \in \mathbb{N})\ ,$$

d. h. (q^n) ist unbeschränkt und damit nach S. 5.4 divergent.).

Der folgende Satz zeigt, dass Grenzwertbildung mit den algebraischen Operationen in $\mathbb{K}$ verträglich ist.

Satz 5.7 *Die Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent mit*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n\ , \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n\ .$$

Dann gilt

1. *Die Folge* $(a_n \pm b_n)$ *konvergiert gegen* $a \pm b$*, d. h.*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b \left(= \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n\right) .$$

2. *Die Folge* $(a_n \cdot b_n)$ *konvergiert gegen* $a \cdot b$*, d. h.*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b \left(= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\right) .$$

3. *Ist* $b_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ **und** $b \neq 0$*, so konvergiert* (a_n/b_n) *gegen* a/b *d. h.*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b \left(= \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n\right) .$$

Beweis.

1. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren ein $N_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N}$ und ein $N_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \ (n \geq N_\varepsilon^{(1)}) \qquad \text{und} \qquad |b_n - b| < \varepsilon/2 \ (n \geq N_\varepsilon^{(2)}) .$$

Also gilt für $n \geq N_\varepsilon := \max(N_\varepsilon^{(1)}, N_\varepsilon^{(2)})$:

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| = |a_n - a \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

2. Nach S. 5.4 ist (b_n) beschränkt, d. h. es existiert ein $M > 0$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq \\ &\leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \leq M|a_n - a| + |a||b_n - b| . \end{aligned}$$

Nach B. 5.5 und 1. konvergiert die rechte Seite gegen 0. Also konvergiert wieder nach B. 5.5 $(a_n b_n)$ gegen ab.

3. a) Wir zeigen zunächst:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} .$$

Da $b \neq 0$ ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n - b| < |b|/2 \qquad (n \geq N) .$$

Also gilt (umgekehrte Dreiecksungleichung!)

$$|b_n| = |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - |b|/2 = |b|/2 > 0 \qquad (n \geq N) .$$

Damit ergibt sich

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|.$$

Aus $|b_n - b| \to 0$ folgt $1/b_n \to 1/b$ $(n \to \infty)$ mit B. 5.5.

b) Mit 2. und a) ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = a \cdot \frac{1}{b} \,.$$

□

Beispiel 5.8 Es sei $a_n = \frac{3n^2-4n}{2n^2+5}$. Dann folgt mit S. 5.7 und B. 5.3.1./3.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3-4/n}{2+5/n^2} = \frac{3-4\lim\limits_{n\to\infty} 1/n}{2+5\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2} = \frac{3-4\cdot 0}{2+0} = \frac{3}{2} \,.$$

Wir betrachten nun speziell Folgen reeller Zahlen, wobei wir entscheidend von der Ordnungsstruktur in $\mathbb{R}$ Gebrauch machen. Insbesondere verwenden wir häufig folgende Aussage über die Verträglichkeit von Grenzwerten und $\leq$-Relation: Sind (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq b_n$ für n genügend groß, so gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \,.$$

Definition 5.9 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann heißt (a_n)

1. *monoton wachsend*, falls $a_{n+1} \geq a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ (Schreibweise: $a_n \nearrow$),
2. *streng monoton wachsend*, falls $a_{n+1} > a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ (Schreibweise: a_n streng $\nearrow$),
3. *monoton fallend*, falls $a_{n+1} \leq a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ (Schreibweise: $a_n \searrow$),
4. *streng monoton fallend*, falls $a_{n+1} < a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ (Schreibweise: a_n streng $\searrow$).

Beispiel 5.10 Es gilt

1. $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ ist streng monoton fallend,
2. $(q^n)_n$ ist streng monoton wachsend falls $q > 1$, streng monoton fallend falls $0 < q < 1$ und weder monoton wachsend noch monoton fallend falls $q < 0$. Außerdem ist $(1)_n$ monoton wachsend und fallend, aber nicht streng monoton wachsend oder fallend.

3. Für die Folgen (a_n) und (b_n) in $\mathbb{R}$ mit
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
gilt: (a_n) ist (streng) monoton wachsend und (b_n) ist (streng) monoton fallend. (Denn: Für alle $n \geq 2$ gilt
$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n}\right)^{n-1} = \\ &= \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \overset{B.3.10}{\geq} \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right) = \frac{n^3+1}{n^3} > 1\,.\end{aligned}$$
Der Beweis für (b_n) verläuft analog; [Ü].)

Eine fundamentale Folgerung aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist

Satz 5.11 *(Hauptsatz über monotone Folgen)*
Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Ist (a_n) monoton (wachsend oder fallend) und beschränkt, so ist (a_n) konvergent.

Beweis. Wir betrachten die Menge
$$A := \{x : x = a_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}\,.$$
Dann ist $A \neq \emptyset$ und beschränkt. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existieren
$$a := \sup A \qquad \text{und} \qquad b := \inf A\,.$$
1. Wir zeigen: Ist (a_n) monoton wachsend, so ist $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Da a obere Schranke von A ist, gilt $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist (nach Definition von $\sup A$) $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von A, d. h. es existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a_N > a - \varepsilon$. Da (a_n) monoton wachsend ist, gilt $a_n \geq a_N > a - \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also insgesamt
$$a - \varepsilon < a_n \leq a \qquad (n \geq N)$$
d. h.
$$-\varepsilon < a_n - a \leq 0 \qquad (n \geq N)$$
und damit insbesondere $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.
2. Ist (a_n) monoton fallend, so sieht man entsprechend, dass $a_n \to b$ gilt. □

Der Hauptsatz über monotone Folgen ist eines der wichtigsten Kriterien für die Konvergenz von Folgen. Man beachte, dass die Kenntnis des Grenzwerts bei der Konvergenzuntersuchung nicht vonnöten ist. Der Beweis zeigt: (a_n) konvergiert gegen $\sup A$ falls (a_n) wachsend ist und gegen $\inf A$, falls (a_n) fallend ist.

Bemerkung und Definition 5.12 Manchmal erweist es sich als nützlich, für reelle Folgen (a_n) erweiterte Grenzwerte $\pm\infty$ zu betrachten. Wir sagen deshalb

1. (a_n) heißt *bestimmt divergent* gegen ∞, falls zu jedem $R > 0$ ein $N_R \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > R$ für alle $n \geq N_R$. Wir schreiben dann $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$

2. (a_n) heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, falls zu jedem $R > 0$ ein $N_R \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n < -R$ für alle $n \geq N_R$. Wir schreiben dann $a_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$

So gilt etwa

$$q^n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

im Falle $q > 1$, aber für $q < -1$ ist (q^n) weder bestimmt divergent gegen ∞ noch bestimmt divergent gegen $-\infty$.
Damit ergibt sich leicht folgende Abrundung des Hauptsatzes über monotone Folgen: Ist (a_n) monoton wachsend und unbeschränkt, so gilt $a_n \to \infty$ und ist (a_n) monoton fallend und unbeschränkt, so gilt $a_n \to -\infty$.
(Denn: O. E. sei (a_n) monoton wachsend. Dann gilt insbesondere $a_n \geq a_1$ für alle n. Damit existiert zu jedem $R > 0$ ein N mit $a_N > R$. Wieder auf Grund der Monotonie ist damit auch $a_n > R$ für alle $n \geq N$. Da $R > 0$ beliebig war, gilt $a_n \to \infty$.)

Beispiel 5.13 (Eulersche Zahl e)
Wir betrachten noch einmal die Folgen (a_n) und (b_n) aus B. 5.10.3. d. h.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

Aufgrund der Monotonieaussagen aus B. 5.10.3. gilt $2 = a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 = 4$. Nach dem Hauptsatz über monotone Folgen sind (a_n) und (b_n) konvergent und mit S. 5.7.2 folgt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Wir setzen

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(e heißt *Eulersche Zahl*).

Beispiel 5.14 (Babylonisches Wurzelziehen)
Es sei $c > 0$ gegeben. Ein sehr effizientes Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{c}$ ist das sog. Babylonische Wurzelziehen:
Wir betrachten mit einem beliebigen Startwert $a_0 > 0$ die Folge (a_n) in $(0, \infty)$ mit

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 + c\right) .$$

(Der Startwert a_0 kann eine grobe Näherung an $\sqrt{c}$ sein.)

Behauptung: (a_n) ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$.

Denn: 1. Wir zeigen: $a_n \geq \sqrt{c}$ $(n \in \mathbb{N})$. Denn: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - 2a_n\sqrt{c} + c) = \frac{1}{2a_n}(a_n - \sqrt{c})^2 \geq 0 \ ,$$

also ist $a_{n+1} \geq \sqrt{c}$.
2. Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist monoton fallend, denn für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{c}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - c\right) \ .$$

Aus $a_n \geq \sqrt{c}$ folgt $a_n^2 \geq c$, also $a_n - a_{n+1} \geq 0$.
3. Nach dem Hauptsatz über monotone Folgen ist (a_n) konvergent. Zur Bestimmung des Grenzwertes kann man folgendermaßen vorgehen:
Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, und damit (da $a \geq \sqrt{c} > 0$)

$$a \longleftarrow a_{n+1} = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 + c\right) \longrightarrow \frac{1}{2a}\left(a^2 + c\right) \qquad (n \to \infty) \ .$$

Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt

$$a = \frac{1}{2a}\left(a^2 + c\right) \ ,$$

woraus man $a = \sqrt{c}$ berechnet (beachte $a > 0$).

Man kann also die Folgeglieder a_n als Näherungen für $\sqrt{c}$ verwenden (dabei sind im Falle $c \in \mathbb{Q}$ und $a_0 \in \mathbb{Q}$ die Näherungen a_n stets rationale Zahlen).
Wie sieht es dabei mit dem Fehler aus, wenn man a_n statt $\sqrt{c}$ verwendet? Wir schätzen den Fehler nach oben ab. Dazu sei

$$a_n = \sqrt{c}(1 + f_n)$$

($f_n = \frac{a_n - \sqrt{c}}{\sqrt{c}}$ heißt “relativer Fehler”). Dann gilt $f_n \geq 0$ und

$$1 + f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + f_n + \frac{1}{1 + f_n}\right) \ ,$$

also

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f_n^2}{1 + f_n} \leq \frac{1}{2}\min(f_n, f_n^2)(= \frac{1}{2}f_n^2 \ , \text{ falls } f_n < 1) \ .$$

Hat man nach n Schritten für a_n einen Fehler $f_n \leq 10^{-m}$, so ist der Fehler f_{n+1} dem nächsten Schritt $\leq \frac{1}{2}(10^{-m})^2 = \frac{1}{2}10^{-2m}$; die Anzahl der “exakten Stellen” verdoppelt sich im Wesentlichen.

Bemerkung und Definition 5.15 Es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Mengen

$$B_n := \{a_k : k \geq n\}$$

Es gilt dabei $B_{n+1} \subset B_n$ (und die B_n sind beschränkt). Also existieren

$$\overline{b_n} := \sup B_n \quad \text{und} \quad \underline{b_n} := \inf B_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und nach Definition von sup und inf sind die Folgen $(\overline{b_n})$ bzw. $(\underline{b_n})$ monoton fallend bzw. monoton wachsend (und beschränkt, da $\underline{b_1} \leq \underline{b_n} \leq \overline{b_n} \leq \overline{b_1}$). Also sind beide Folgen konvergent nach dem Hauptsatz über monotone Folgen. Damit existieren

$$\overline{a} := \lim_{n\to\infty} \overline{b_n} \qquad \text{und} \qquad \underline{a} := \lim_{n\to\infty} \underline{b_n}$$

Die reelle Zahl $\overline{a}$ heißt *Limes superior* von (a_n) (Schreibweise: $\overline{a} =: \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ oder auch $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$), und $\underline{a}$ heißt *Limes inferior* von (a_n) (Schreibweise: $\underline{a} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ oder auch $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$).

Satz 5.16 *Es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, und es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. *Es ist $a = \overline{\lim} a_n$ genau dann, wenn folgende beiden Bedingungen gelten:*
   a) *Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $a_n < a + \varepsilon$ für alle n genügend groß.*
   b) *Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $a_n > a - \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Es ist $a = \underline{\lim} a_n$ genau dann, wenn folgende beiden Bedingungen gelten:*
   a) *Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $a_n > a - \varepsilon$ für alle n genügend groß.*
   b) *Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $a_n < a + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. 1. "$\Longrightarrow$" Es sei $a = \overline{\lim} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}$, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein N_ε mit $a - \varepsilon < \sup\{a_k : k \geq n\} < a + \varepsilon$ $(n \geq N_\varepsilon)$. Aus der zweiten Ungleichung ergibt sich insbesondere $a_n < a + \varepsilon$ $(n \geq N_\varepsilon)$. Aus der ersten Ungleichung folgt, dass für jedes $n (\geq N_\varepsilon)$ ein $k \geq n$ existiert mit $a - \varepsilon < a_k$. Damit gilt auch b).
"$\Longleftarrow$ " Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
Aus a) folgt

$$\overline{b_n} = \sup\{a_k : k \geq n\} \leq a + \varepsilon$$

für alle n genügend groß. Also ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{b_n} \leq a + \varepsilon\ .$$

Aus b) folgt $\overline{b_n} > a - \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ergibt sich

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{b_n} \geq a - \varepsilon\ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \le a$ und $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \ge a$, also insgesamt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a$.

2. Der Beweis für $\underline{\lim} a_n$ verläuft analog. □

Beispiel 5.17 Es sei $a_n = (-1)^n (1 + 1/n)$. Dann ist (a_n) beschränkt und mit S. 5.16 ergibt sich

$$\overline{\lim}\, a_n = 1 \quad \text{und} \quad \underline{\lim}\, a_n = -1.$$

Satz 5.18 *Es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.
2. *(a_n) ist genau dann konvergent, wenn $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ gilt (und in diesem Fall ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$).*

Beweis. 1. Teil 1. ergibt sich sofort aus

$$\underline{b_n} = \inf\{a_k : k \ge n\} \le \overline{b_n} = \sup\{a_k : k \ge n\}$$

und

$$\underline{\lim} a_n = \lim \underline{b_n}\ , \qquad \overline{\lim} a_n = \lim \overline{b_n}\ .$$

2. "$\Longrightarrow$" Es sei (a_n) konvergent, $\lim a_n =: a$, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein N_ε mit

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad \text{für alle } n \ge N_\varepsilon\ .$$

Also sind a) und b) aus S. 5.16.1 und 2. erfüllt und folglich gilt mit S. 5.16

$$\lim a_n = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n.$$

"$\Longleftarrow$" Gilt $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n =: a$, so folgt aus S. 5.16 dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n < a + \varepsilon \qquad (n \ge N_\varepsilon^{(1)})$$

und ein $N_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n > a - \varepsilon \qquad (n \ge N_\varepsilon^{(2)})$$

existieren. Also gilt für $n \ge N_\varepsilon := \max(N_\varepsilon^{(1)}, N_\varepsilon^{(2)})$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon\ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist (a_n) konvergent mit $\lim a_n = a$. □

Bemerkung und Definition 5.19 Es sei (a_n) eine beliebige Folge in Y. Ist (n_k) eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aus den Definitionen ergibt sich unmittelbar für Folgen (a_n) in $\mathbb{K}$: Ist (a_n) konvergent, so ist auch jede Teilfolge konvergent (mit gleichem Grenzwert) und ist (a_n) eine Cauchy-Folge, so ist auch jede Teilfolge eine Cauchy-Folge.

Beispiel 5.20 1. Es sei $a_n = (-1)^n(1+1/n)$ (vgl. B 5.17). Dann sind

$$(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = \Big(1+\frac{1}{2k}\Big)_{k\in\mathbb{N}} \qquad \text{und} \qquad (a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = \Big(-1-\frac{1}{2k-1}\Big)_{k\in\mathbb{N}}$$

Teilfolgen von (a_n). Dabei gilt $a_{2k} \to 1 = \overline{\lim}\, a_n$ und $a_{2k-1} \to -1 = \underline{\lim}\, a_n$ für $k \to \infty$. Die Folge (a_n) selbst ist divergent.

Allgemein erhalten wir

Satz 5.21 *Es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.*
2. *Es existiert eine Teilfolge (a_{m_k}) mit $a_{m_k} \to \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.*
3. *Ist (a_{ℓ_k}) eine konvergente Teilfolge von (a_n) so ist*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \le \lim_{k\to\infty} a_{\ell_k} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \ .$$

Beweis. 1. Wir definieren (n_k) induktiv. Dazu setzen wir $n_1 := 1$. Sind $n_1, \dots, n_k$ bereits definiert, so wählen wir ein $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k$ und so, dass

$$|a_{n_{k+1}} - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n| < 1/(k+1)$$

gilt (existiert nach S. 5.16). Dann gilt $a_{n_k} \to \overline{\lim} a_n \ (k \to \infty)$.
2. Analog
3. Es sei (a_{ℓ_k}) eine konvergente Teilfolge von (a_n) und $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{\ell_k}$. Aus $a_{\ell_k} \le \overline{b_{\ell_k}}$ folgt $a \le \lim\limits_{k\to\infty} \overline{b_{\ell_k}} = \overline{\lim} a_n$. Entsprechend sieht man, dass $\underline{\lim} a_n \le a$ gilt. □

Als Konsequenz erhalten wir zwei der zentralen Ergebnisse der Analysis, den Satz von Bolzano und Weierstraß sowie das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz 5.22 *(Bolzano-Weierstraß)*
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. 1. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann wähle man etwa (n_k) wie in S. 5.21.1.
2. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Ist $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ die Normaldarstellung von a_n, so sind die Folgen (α_n) und (β_n) in $\mathbb{R}$ beschränkt (es gilt $|\alpha_n| \leq |a_n|$ und $|\beta_n| \leq |a_n|$). Nach 1. existieren eine Teilfolge (α_{n_k}) von (α_n) und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$. Da auch $(\gamma_k) := (\beta_{n_k})$ beschränkt ist, existieren wieder nach 1. eine Teilfolge $(\beta_{n_{k_\ell}}) = (\gamma_{k_\ell})$ von (γ_k) und ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta_{n_{k_\ell}} \to \beta\,(\ell \to \infty)$. Nach S. 5.7 gilt also

$$\alpha_{n_{k_\ell}} + i\beta_{n_{k_\ell}} \to \alpha + i\beta \qquad (\ell \to \infty)\,.$$

□

Beispiel 5.23 Es sei $a_n = q^n$ mit $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$. Dann ist auch $|a_n| = 1$ für alle n. Also hat nach S. 5.22 die geometrische Folge (a_n) eine konvergente Teilfolge. Ist etwa $q = i$, so gilt

$$a_{4k} = 1 \to 1, \quad a_{4k+1} = i \to i, \quad a_{4k+2} = -1 \to -1, \quad a_{4k+3} = -i \to -i\,.$$

Satz 5.24 *(Cauchysches Konvergenzkriterium)*
Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Genau dann ist (a_n) konvergent wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. 1. Ist (a_n) konvergent, so ist (a_n) nach S. 5.4.2 eine Cauchy-Folge.
2. Es sei umgekehrt (a_n) eine Cauchy-Folge. Dann ist (a_n) jedenfalls beschränkt nach S. 5.4.1. Also hat (a_n) nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}).
Es sei $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann esistiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \qquad (n, m \geq N_\varepsilon)\,.$$

Weiter existiert ein $k = k_\varepsilon$ so, dass $n_k \geq N_\varepsilon$ und $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$. Damit ist

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon \qquad (n \geq N_\varepsilon)\,.$$

□

6 Mächtigkeit von Mengen

Wir werden im Folgenden sehen, dass in gewisser Weise „sehr viele“ reelle Zahlen irrational sind. Dazu beschäftigen wir uns zunächst mit dem Begriff der Mächtigkeit einer Menge.

Definition 6.1 Es seien M, M_1, M_2 beliebige Mengen.

1. M_1 und M_2 heißen *von gleicher Mächtigkeit* (oder kurz *gleichmächtig*), falls eine bijektive Abbildung $\varphi : M_1 \to M_2$ existiert.
2. M heißt *endlich*, falls M gleichmächtig zu $\{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (oder auch $= \emptyset$) ist. Anderenfalls heißt M *unendlich.*
3. M heißt *abzählbar unendlich* falls M gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.
4. M heißt *abzählbar* falls M endlich oder abzählbar unendlich ist. Anderenfalls heißt M *überabzählbar.*

Bemerkung 6.2 1. Aus D. 6.1 ergibt sich sofort, dass eine Menge M genau dann abzählbar unendlich ist, wenn eine Folge $(x_n)_n$ in M existiert mit $x_n \neq x_m$ für $n \neq m$ und $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Weiter folgt aus D. 6.1 auch, dass $M \neq \emptyset$ genau dann abzählbar ist, wenn eine Folge $(x_n)_n$ in M existiert mit $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Eine solche Darstellung nennt man auch eine *Abzählung* von M.
(Denn: „$\Rightarrow$ “: Ist M abzählbar unendlich, so existiert eine solche Folge nach Definition. Ist M endlich, etwa $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$, so setze man $x_j := x_n$ für $j > n$.
„$\Leftarrow$ “: Ist M endlich, so sind wir fertig. Es sei also M unendlich. Wir definieren $n_1 := 1$. Sind $n_1, \ldots, n_k$ bereits definiert, so setzen wir $n_{k+1} := \min\{n : x_n \neq x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}$. (Man beachte: Nach dem Wohlordnungssatz (siehe (Ü)) hat jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum.) Dann gilt nach Konstruktion $M = \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ und $x_{n_j} \neq x_{n_k}$ für $j \neq k$.)
2. Man sieht mit einer ähnlichen Überlegung wie in 1. auch, dass jede unendliche Menge eine abzählbar unendliche Teilmenge besitzt.

Satz 6.3 *1. Jede Teilmenge B einer abzählbaren Menge A ist wieder abzählbar.*

2. Es sei $I \neq \emptyset$ eine abzählbare Menge, und es seien A_n $(n \in I)$ abzählbare Mengen. Dann ist auch $\bigcup_{n \in I} A_n$ abzählbar.

Beweis. 1. O. E. sei $B \neq \emptyset$. Nach B. 6.2 existiert eine Folge (x_n) mit $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ist n_0 so, dass $x_{n_0} \in B$, so definieren wir

$$y_n := \begin{cases} x_n, & \text{falls } x_n \in B \\ x_{n_0}, & \text{falls } x_n \notin B \end{cases} .$$

Dann ist $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, also B abzählbar nach B. 6.2.
2. Ohne Einschränkung können wir $A_n \neq \emptyset$ für alle $n \in I$ annehmen. Zudem koennen wir uns auch auf den Fall $I = \mathbb{N}$ beschränken. (Ist I endlich, so können wir ohne Einschränkung $I = \{1, \ldots, n_0\}$ wählen und dann $A_n := A_1$ für $n > n_0$ setzen.) Es sei

$$A_1 = \left\{ x_k^{(1)} : k \in \mathbb{N} \right\} , \quad A_2 = \left\{ x_k^{(2)} : k \in \mathbb{N} \right\}, \ldots$$

Dann ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left\{ x_k^{(n)} : k, n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Wir betrachten folgende Anordnung der Elemente $x_k^{(n)}; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1^{(1)} & \rightarrow & x_2^{(1)} & & x_3^{(1)} & \rightarrow & x_4^{(1)} & & x_5^{(1)} & \rightarrow & x_6^{(1)} & & \dots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
x_1^{(2)} & & x_2^{(2)} & & x_3^{(2)} & & x_4^{(2)} & & x_5^{(2)} & & \dots & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
x_1^{(3)} & & x_2^{(3)} & & x_3^{(3)} & & x_4^{(3)} & & \dots & & \dots & & \dots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
x_1^{(4)} & & x_2^{(4)} & & x_3^{(4)} & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & \\
x_1^{(5)} & & x_2^{(5)} & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
& \swarrow & & & & & & & & & & & \\
x_1^{(6)} & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
\downarrow & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Hierbei treten alle $x_k^{(n)}$ auf. Diese können durch "Verfolgen der Pfeile" zu einer Folge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ angeordnet werden:

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_3^{(2)}, \ldots$$

(Genauer: $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist für $n \in \mathbb{N}$ und $j = 1, \ldots, n$ definiert durch

$$y_{\frac{n(n-1)}{2}+j} := \begin{cases} x_{(j)}^{(n+1-j)} & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ x_{(n+1-j)}^{(j)} & , \text{ falls } n \text{ gerade} \end{cases} .$$

Man beachte dabei: Für $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(\{n\} \times \{1,\ldots,n\}\big)$ sind $\varphi : M \to \mathbb{N}$ bzw. $\psi : M \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit

$$\varphi(n,j) := \frac{n(n-1)}{2} + j \quad \text{bzw.} \quad \psi(n,j) = (n+1-j, j)$$

bijektiv.) □

Insbesondere ergibt sich aus S. 6.3

Satz 6.4 *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Zunächst sieht man leicht, dass $\mathbb{Z}$ abzählbar ist ([Ü]). Damit sind nach S. 6.3 auch $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (\mathbb{Z} \times \{m\})$$

abzählbar. Ist $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ so ist

$$\mathbb{Q} = \Big(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\Big)/_\sim = \{[x_j] : j \in \mathbb{N}\}\ ,$$

also $\mathbb{Q}$ abzählbar. □

Wir wollen nun zeigen, dass jedes (nichttriviale) Intervall in $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Daraus ergibt sich auch unmittelbar die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Vorbereitend zeigen wir:

Satz 6.5 *(Intervallschachtelungsprinzip)*

1. *Ist I_n eine Folge von Intervallen der Form $I_n = [a_n, b_n]$, mit $I_{n+1} \subset I_n$ $(n \in \mathbb{N})$, so existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$ und*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a,b]\ .$$

2. *Gilt zusätzlich $b_n - a_n \to 0\,(n \to \infty)$, so ist $a = b$, d. h. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ ist einpunktig.*

Beweis. 1. Nach Voraussetzung ist $(a_n)\uparrow$ und $(b_n)\downarrow$. Außerdem gilt $a_1 \le a_n \le b_n \le b_1$. Also gilt nach dem Hauptsatz über monotone Folgen

$$a_n \to \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\} =: a \quad \text{und} \quad b_n \to \inf\{b_k : k \in \mathbb{N}\} =: b\ .$$

Aus $a_n \le b_n$ folgt $a \le b$, also insgesamt

$$a_n \le a \le b \le b_n \qquad (n \in \mathbb{N})\ .$$

Folglich ist

$$[a,b] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \ .$$

Andererseits folgt für $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ aus $a_n \le x \le b_n$ für alle n auch $a \le x \le b$, also $x \in [a,b]$.

2. Aus $0 \le b - a \le b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt $b - a = 0$. □

Satz 6.6 *Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, das mehr als einen Punkt enthält, ist überabzählbar.*

Beweis. Es reicht ([Ü]), das Intervall $[0,1]$ zu betrachten. Angenommen, $[0,1]$ ist abzählbar, d. h.

$$[0,1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Wir teilen dann $[0,1]$ in die drei gleich langen Intervalle $[0,1/3],[1/3,2/3]$ und $[2/3,1]$ auf. Dann ist x_1 in einem dieser Intervalle (das wir I_1 nennen) nicht enthalten. Anschließend teilen wir I_1 in drei gleich lange Intervalle (also der Länge $1/9 = 1/3^2$) auf. Dann ist x_2 in einem dieser Intervalle (I_2 genannt) nicht enthalten. So fortfahrend erhalten wir induktiv eine Folge $I_n = [a_n, b_n]$ von Intervallen in $[0,1]$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ sowie $x_n \notin I_n$ und $b_n - a_n = 1/3^n \to 0$ $(n \to \infty)$. Also ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$ für ein $x \in [0,1]$. Ist $k \in \mathbb{N}$ so gilt nach Konstruktion $x_k \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$, d. h. $x_k \neq x$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Widerspruch! □

Bemerkung 6.7 Allgemein gilt: Ist M überabzählbar und ist $A \subset M$ abzählbar, so ist auch $M \setminus A$ überabzählbar (denn sonst wäre nach S. 6.3 auch $M = A \cup (M \setminus A)$ abzählbar). Also ist insbesondere nach S. 6.4 und S. 6.6 die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ überabzählbar.

7 Reihen

Wir betrachten wieder die Folge $(q^\nu)_{\nu=0}^\infty$ für ein $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$. Für die Summe der ersten $(n+1)$ Folgelieder gilt nach der geometrischen Summenformel

$$\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ .$$

Wegen $q^{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$ folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu \to \frac{1}{1-q} \qquad (n \to \infty) \ ,$$

die Folge der Summen konvergiert also gegen $\frac{1}{1-q}$. Man verwendet dann kurz das **Symbol** $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ für den Grenzwert $\frac{1}{1-q}$.

Bemerkung und Definition 7.1 Es seien $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $(a_\nu)_{\nu=n_0}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{K}$.
1. Die der Folge (a_ν) zugeordnete Folge $(s_n)_{n=n_0}^\infty$ der *Partial-* oder *Teilsummen*

$$s_n := \sum_{\nu=n_0}^{n} a_\nu \qquad (n \in \mathbb{Z},\, n \geq n_0)$$

heißt (*die mit* (a_ν) *gebildete*) *Reihe* und wird mit $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ bezeichnet. Die a_ν heißen dann *Reihenglieder*.
2. Ist die Reihe $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ (also die Folge (s_n)) konvergent gegen s, so schreiben wir $s =: \sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$. Die Zahl s heißt dann der *Reihenwert*.

Man beachte, dass das Symbol $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ also zwei Bedeutungen hat: Erstens steht es für die Folge (s_n) der Teilsummen und zweitens (im Falle der Konvergenz!) für deren Grenzwert.

Beispiel 7.2 1. Es sei $a_\nu = \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ $(\nu \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \sum_{\nu=2}^{n+1} \frac{1}{\nu} = 1 - \frac{1}{n+1} \ .$$

Also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, d. h. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ ist konvergent mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1 \ .$$

2. Es sei $a_\nu = q^\nu$ für ein $q \in \mathbb{K}$, $|q| < 1$. Dann ist (s. o.) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ konvergent mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = \frac{1}{1-q} .$$

Diese Reihe heißt *geometrische Reihe*. Speziell ergibt sich etwa für $q = 1/2$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 2$$

Für das "Rechnen" mit konvergenten Reihen gilt

Satz 7.3 *Es seien $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu$ konvergente Reihen in $\mathbb{K}$, und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann ist auch $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} (\alpha a_\nu + \beta b_\nu)$ konvergent mit*

$$\sum_{\nu=n_0}^{\infty} (\alpha a_\nu + \beta b_\nu) = \alpha \sum_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu + \beta \sum_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu .$$

Beweis. Ergibt sich leicht durch Anwendung von S. 5.7. □

Damit gilt etwa

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^\nu + 4}{5^\nu} &= 2 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{3^\nu}{5^\nu} + 4 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{5^\nu} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1 - 3/5} + 4 \cdot \frac{1}{1 - 1/5} = 10 . \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man aus S. 7.3 auch: Ist $n > n_0$, so ist $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ genau dann konvergent, wenn $\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} a_\nu$ konvergiert, und in diesem Fall ist

$$\sum_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu = \sum_{\nu=n_0}^{n-1} a_\nu + \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu .$$

Für Konvergenzuntersuchungen ist es also unwichtig, wie die untere Summationsgrenze aussieht. Wir werden daher im Weiteren meist o. E. $n_0 = 0$ (oder $n_0 = 1$) betrachten.

Bemerkung 7.4 Notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden, d. h. ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent, so gilt

$$a_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

(Denn: Ist $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$, so gilt

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = 0 \quad (n \to \infty).)$$

Ist etwa $a_n = q^n$ mit $|q| \geq 1$, so ist $|a_n| \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$, also ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ sicher divergent. Damit ergibt sich für geometrische Reihen insgesamt:
$\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ **ist genau dann konvergent, wenn** $|q| < 1$ **ist**.

Wir betrachten jetzt speziell Reihen mit nichtnegativen Gliedern.

Bemerkung 7.5 Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ eine Reihe mit $a_\nu \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \uparrow$. Also gilt

- entweder ist (s_n) beschränkt und damit $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent (Hauptsatz über monotone Folgen)
- oder (s_n) ist unbeschränkt und damit $s_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Wir schreiben im ersten Fall dann auch $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu < \infty$ und im zweiten Fall $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \infty$.

Satz 7.6 *(Cauchyscher Verdichtungssatz)*
Es sei $a_\nu \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und (a_ν) monoton fallend.

1. *Ist $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$ und $\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$, so gilt*

$$s_{2^{n+1}-1} \leq \sigma_n \leq 2 s_{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

2. *$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.*

Beweis.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
s_{2^{n+1}-1} &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\
&\leq 2^0 a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} (= \sigma_n) \\
&= 2\left(\frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n}\right) \\
&\leq 2\big(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots a_8) + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n})\big) \\
&= 2\, s_{2^n}
\end{aligned}$$

2. „ $\Longrightarrow$ “ Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu < \infty$, also (s_n) beschränkt, so ist auch (σ_n) beschränkt nach 1. Damit ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$.

   „ $\Longleftarrow$ “ Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$, so ist (σ_m) beschränkt, also nach 1. auch $(s_{2^{m+1}-1})_m$. Da (s_n) monoton wachsend ist, ist (s_n) beschränkt, also $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu < \infty$.

$\square$

Beispiel 7.7 (Harmonische Reihen)
Es sei $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^p} \begin{cases} = \infty & \text{, falls } p = 1 \\ < \infty & \text{, falls } p > 1 \end{cases}.$$

(Denn: Es ist $0 \leq 1/\nu^p \downarrow$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k.$$

Mit S. 7.6 und B. 7.4 ergibt sich die Behauptung.)

Satz 7.8 *(Leibniz-Kriterium für alternierenede Reihen)*
Es sei $a_\nu \geq 0$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$ und (a_ν) monoton fallend.

1. *Ist $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu$, so ist (s_{2j}) monoton fallend und (s_{2j+1}) monoton wachsend.*
2. *Gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu$ konvergent.*

Beweis.

1. Für $n \geq 2$ ist

$$s_n - s_{n-2} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-2} (-1)^\nu a_\nu = (-1)^n \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{\leq 0}.$$

   Also ist $s_{2j} - s_{2j-2} \leq 0$ und $s_{2j+1} - 2_{2j-1} \geq 0$ $(j \in \mathbb{N})$.

2. Zunächst gilt

$$s_{2j} = \sum_{\nu=0}^{2j} (-1)^\nu a_\nu = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2j-2} - a_{2j-1})}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2j}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Nach dem Hauptsatz über monotone Folgen ist (s_{2j}) konvergent. Ist $s := \lim_{j\to\infty} s_{2j}$, so gilt auch

$$s_{2j+1} = s_{2j} - \underbrace{a_{2j+1}}_{\to 0} \to s \quad (j \to \infty)\ .$$

Hieraus folgt $s_n \to s$ für $n \to \infty$ ([Ü]).

□

Beispiel 7.9 (alternierende harmonische Reihe)
Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu/\nu$ konvergiert nach S. 7.8 (denn: $a_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$). Während also $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu$ (nach B. 7.7) divergiert, führt das "Anbringen" abwechselnder Vorzeichen zur Konvergenz. Wir untersuchen nun Reihen (mit Reihengliedern in $\mathbb{K}$), bei denen dieser Unterschied nicht auftritt.

Bemerkung 7.10 (Cauchy-Kriterium für Reihen)
Es sei (a_ν) eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ genau dann konvergent, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so existiert, dass

$$\Big| \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \Big| < \varepsilon \qquad (n > m \geq N_\varepsilon).$$

(Denn: Ist $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$, so ist für $n > m \geq 0$

$$|s_n - s_m| = |s_m - s_n| = \Big| \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \Big|.$$

Damit ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen.)

Eines der wichtigsten Kriterien für Konvergenz ist

Satz 7.11 *(Weierstraßsches Majorantenkriterium)*
Es seien (a_ν) eine Folge in $\mathbb{K}$ und $b_\nu \geq 0$ mit $|a_\nu| \leq b_\nu$ für ν genügend groß. Dann gilt: Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu < \infty$, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent, und es gilt

$$\Big| \sum_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu \Big| \leq \sum_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu$$

für alle n_0 so, dass $|a_\nu| \leq b_\nu$ $(\nu \geq n_0)$.

Beweis. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\Big| \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \Big| \leq \sum_{\nu=m+1}^{n} |a_\nu| \leq \sum_{\nu=m+1}^{n} b_\nu \qquad (n > m \geq n_0 - 1).$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert nach B. 7.10 ein $N_\varepsilon\,(> n_0)$ so, dass

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} b_\nu < \varepsilon \qquad (n > m \geq N_\varepsilon),$$

also auch

$$\Big| \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \Big| < \varepsilon \qquad (n > m \geq N_\varepsilon).$$

Wieder nach B. 7.10 ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent. Außerdem ergibt sich (mit $m = n_0 - 1$) für $n \geq n_0$

$$\Big| \sum_{\nu=n_0}^{n} a_\nu \Big| \leq \sum_{\nu=n_0}^{n} b_\nu \leq \sum_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu$$

und damit auch

$$\Big| \sum_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu \Big| \leq \sum_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu \,.$$

(Man beachte: Gilt $s_n \to s$ und $|s_n| \leq M$, so ist $|s| \leq M$.) □

Beispiel 7.12 1. Es sei $a_\nu = (-1)^\nu \dfrac{\nu^2 + 3\nu}{2\nu^4 + 4}$. Dann gilt

$$\nu^2 |a_\nu| = \frac{1 + 3/\nu}{2 + 4/\nu^4} \to \frac{1}{2} \qquad (\nu \to \infty).$$

Also ist $|a_\nu| \leq 1/\nu^2$ für ν genügend groß. Aus $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu^2 < \infty$ ergibt sich die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ mit S. 7.11.

2. Es sei $p \in \mathbb{N}$ und $b_\nu = 1/\sqrt[p]{\nu}$. Dann ist
$$b_\nu = \frac{1}{\sqrt[p]{\nu}} \geq \frac{1}{\nu} \qquad (\nu \in \mathbb{N}).$$
Also ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 1/\sqrt[p]{\nu} = \infty$ (denn wäre $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/\sqrt[p]{\nu} < \infty$, so wäre auch $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu < \infty$ nach S. 7.11.

Bemerkung und Definition 7.13 Es sei (a_ν) eine Folge in $\mathbb{K}$. Die Reihe $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$ ist. Aus S. 7.11 ergibt sich mit $b_\nu = |a_\nu|$:

Ist $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent, so ist $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ auch konvergent.

Ist $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ konvergent und $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} |a_\nu| = \infty$, so heißt $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ *bedingt konvergent.*
Aus dem Beweis zu S. 7.11 ergibt sich zudem, dass unter den dortigen Voraussetzungen $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent ist mit
$$\Big|\sum_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu\Big| \leq \sum_{\nu=n_0}^{\infty} |a_\nu| \leq \sum_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu\ .$$

Beispiel 7.14 Es sei wieder $p \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu/\nu^p$ ist für $p = 1$ bedingt konvergent und für $p \geq 2$ absolut konvergent (B. 7.9 und B. 7.7).

Wir schreiben für (c_ν) in $[0,\infty)$
$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, c_\nu = \infty$$
falls (c_n) unbeschränkt ist und
$$.\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, c_\nu = \infty$$
falls $c_n \to \infty$. Außerdem gelte die Konvention $\infty > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Durch Anwendung von S. 7.12 auf die konvergente Majorante $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ für geeignetes $0 < q < 1$ ergibt sich:

Satz 7.15 *(Wurzelkriterium)*
Es sei (a_ν) eine Folge in $\mathbb{K}$ und es sei
$$a := \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \sqrt[\nu]{|a_\nu|}\ .$$
Dann gilt
1. Ist $a < 1$, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent.
2. Ist $a > 1$, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ divergent.

Beweis. 1. Ist $a < 1$, so existiert zu $q := (1+a)/2 (< 1)$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \le q$ (und damit auch $|a_\nu| \le q^\nu$) für alle $\nu \ge N$. Da $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ konvergiert, ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent nach S. 7.11.
2. Ist $a > 1$, so ist $\sqrt[\nu]{|a_\nu|} > 1$ (und damit auch $|a_\nu| > 1$) für ∞ viele $\nu \in \mathbb{N}_0$. Also ist (a_ν) sicher nicht konvergent gegen 0. Nach B. 7.4 ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ divergent. □

Beispiel 7.16 1. Es sei $a_\nu = \nu^p q^\nu$ für ein festes $p \in \mathbb{N}$ und ein festes $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann gilt, da $\sqrt[\nu]{\nu} \to 1$ für $\nu \to \infty$ ([Ü]),

$$\sqrt[\nu]{\nu^p |q|^\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^p |q| \to |q| \qquad (\nu \to \infty)\ .$$

Also gilt

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = |q| < 1\ .$$

Nach S. 7.15 ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \nu^p q^\nu$ absolut konvergent. (Insbesondere ergibt sich mit B. 7.4 auch $\nu^p q^\nu \to 0$ $(\nu \to \infty)$.)
2. Es sei $a_\nu = \frac{1}{\nu^p}$ für ein festes $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \left(\frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu}}\right)^p \to 1 \quad (\nu \to \infty)\ ,$$

d. h. es ist $a = 1$ in der Situation von S. 7.15. Wie oben gesehen ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu$ divergent und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu^p$ für $p > 1$ (absolut) konvergent. Also lässt sich im Fall $a = 1$ i. A. keine Aussage machen.

Satz 7.17 *(Quotientenkriterium)*
Es sei (a_ν) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_\nu \neq 0$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

1. $\underline{\lim}_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \le \underline{\lim}_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \le \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \le \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|$

2. *Ist* $\overline{\lim}_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| < 1$*, so ist* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *absolut konvergent.*

Beweis. 1. Es sei $a := \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \le a + \varepsilon \qquad (\nu \ge N)\ .$$

Für $\nu > N$ gilt dann

$$|a_\nu| = \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{\nu-1}}{a_{\nu-2}}\right| \cdots \left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| |a_N| \le (a+\varepsilon)^{\nu-N} |a_N| = \frac{|a_N|}{(a+\varepsilon)^N} \cdot (a+\varepsilon)^\nu$$

also

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \le (a+\varepsilon) \sqrt[\nu]{\frac{|a_N|}{(a+\varepsilon)^N}} \longrightarrow a+\varepsilon \qquad (\nu \to \infty)$$

und damit

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \le a+\varepsilon\ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.
Der Beweis für $\underline{\lim}$ verläuft ähnlich.
2. Nach dem Wurzelkriterium (S. 7.15) und 1. ist $\sum a_\nu$ absolut konvergent. □

Beispiel 7.18 Wir betrachten $a_\nu := \frac{z^\nu}{\nu!}$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$, wobei $z \in \mathbb{C}$ fest ist. Dann gilt (für $z \neq 0$)

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \frac{|z|^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\frac{\nu!}{|z|^\nu} = \frac{|z|}{\nu+1} \to 0 \quad (\nu\to\infty)\,.$$

Damit liefert das Quotientenkriterium die absolute Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ (und für $z=0$ ist die Reihe trivialerweise konvergent).

Wir wollen uns jetzt noch (kurz) mit der Multiplikation von Reihen beschäftigen. Dazu orientieren wir uns zunächst an der Multiplikation von Summen: Es sei

$$A := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\ , \qquad B = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu\ .$$

Dann ist

$$AB = \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu\right) = \sum_{\substack{0\le\nu\le n\\ 0\le\mu\le m}} a_\nu b_\mu$$

wobei die Reihenfolge der Summation beliebig ist. Entsprechend sollte beim Produkt $\left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\right)\left(\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} b_\mu\right)$ jeder der Summanden $a_\nu b_\mu\,(\nu\in\mathbb{N}_0, \mu\in\mathbb{N}_0)$ einmal auftauchen. Anders als bei endlichen Summen spielt dabei jedoch die "Reihenfolge" der Summation

i. A. eine Rolle. Eine mögliche Anordnung ist die folgende

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_0b_0 & & a_0b_1 & & a_0b_2 & & a_0b_3 & & a_0b_4 \\
& \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & \\
a_1b_0 & & a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & \dots \\
& \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & & & \\
a_2b_0 & & a_2b_1 & & a_2b_2 & & \dots & & \dots \\
& \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & & & & & \\
a_3b_0 & & a_3b_1 & & \dots & & \dots & & \dots \\
& \overset{+}{\swarrow} & & & & & & & \\
a_4b_0 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

d. h. wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\ .$$

Die c_n stellen also gerade die Summe der Produkte in der n-ten Diagonale dar.

Definition 7.19 Es seien $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ Reihen in $\mathbb{K}$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} \right) \left[= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} b_\nu \right) \right]$$

Cauchysche Produktreihe oder kurz *Cauchy-Produkt* von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$.

Es gilt damit

Satz 7.20 *Es seien $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergente Reihen in $\mathbb{K}$. Ist eine der beiden Reihen absolut konvergent, so konvergiert die Cauchysche Produktreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \right) \ .$$

Beweis. 1. Wir zeigen allgemein: Es seien $c_{n\nu} \in \mathbb{K}$ $(\nu = 0, \dots, n;\ n \in \mathbb{N}_0)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle festen $\nu \in \mathbb{N}_0$ konvergiert die Folge $(c_{n\nu})_{n=\nu}^{\infty}$ gegen 0.

(ii) Es existiert ein $M > 0$ so, dass $\sum\limits_{\nu=0}^{n} |c_{n\nu}| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt: Ist (d_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $d_n \to 0$ für $n \to \infty$, so folgt auch

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu} d_\nu \to 0 \qquad (n \to \infty) .$$

Denn: Es sei $m > 0$ so, dass $|d_n| \leq m$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|d_n| < \varepsilon \,(n \geq N)$. Damit ergibt sich für $n \geq N$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu} d_\nu\right| \leq \sum_{\nu=0}^{N-1} |c_{n\nu}| \underbrace{|d_\nu|}_{\leq m} + \sum_{\nu=N}^{n} |c_{n\nu}| \underbrace{|d_\nu|}_{\leq \varepsilon} \leq m \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} |c_{n\nu}| + \varepsilon \cdot M .$$

Nach Voraussetzung gilt $c_{n\nu} \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle festen $\nu = 0, \ldots, N-1$, also auch $\sum\limits_{\nu=0}^{N-1} |c_{n\nu}| \to 0$ $(n \to \infty)$. Folglich existiert ein $N'_\varepsilon \geq N$ so, dass

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} |c_{n\nu}| < \varepsilon \qquad (n \geq N'_\varepsilon) .$$

Also gilt insgesamt

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu} d_\nu\right| < \varepsilon(m + M) \qquad (n \geq N'_\varepsilon) .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt die Behauptung.

2. O. E. sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ konvergent. Es sei $B_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} b_\nu$ und $A := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, $B := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots + (a_0 b_n + \ldots + a_n b_0) \\
&= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0 \\
&= a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + \ldots + a_n(B_0 - B) + B \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu .
\end{aligned}$$

Wegen $B \cdot \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \to A \cdot B$ $(n \to \infty)$ reicht es also zu zeigen

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu}(B_\nu - B) \to 0 \qquad (n \to \infty) .$$

Dazu sei $c_{n\nu} := a_{n-\nu}$ für $\nu = 0, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n} |c_{n\nu}| = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n-\nu}| = \sum_{\mu=0}^{n} |a_\mu| \leq \sum_{\mu=0}^{\infty} |a_\mu| \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

also ist (ii) aus 1. erfüllt. Außerdem gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ nach B. 7.4 und damit auch $c_{n\nu} = a_{n-\nu} \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle ν, d. h. (i) aus 1. ist ebenfalls erfüllt. Da $d_\nu := B_\nu - B \to 0$ gilt, ergibt sich die Behauptung nach 1. □

Beispiel 7.21 1. Für $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ betrachten wir die (absolut) konvergenten geometrischen Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu := \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu = \frac{1}{1-z} .$$

Dann ist die Cauchysche Produktreihe gegeben durch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} z^\nu z^{n-\nu} = z^n \sum_{\nu=0}^{n} 1 = (n+1)z^n .$$

Nach S. 7.20 gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \frac{1}{(1-z)^2} .$$

2. Wir betrachen $a_\nu = b_\nu = (-1)^\nu/\sqrt{\nu+1}$. Dann ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergent nach dem Leibnizkriterium. Für die Cauchysche Produktreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ gilt

$$c_n = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu+1}\sqrt{n-\nu+1}} ,$$

also

$$|c_n| \geq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = 1 .$$

Also ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent nach B. 7.4. Dieses Beispiel zeigt insbesondere, dass auf die Voraussetzung der absoluten Konvergenz einer der beiden Reihen in S. 7.20 nicht verzichtet werden kann!

8 Zwischenwertsatz und elementare Funktionen

Eine wesentliche Konsequenz aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist der Zwischenwertsatz, auf den wir jetzt zu sprechen kommen.

Definition 8.1 Es seien $M \subset \mathbb{K}$ und $f : M \to K$. Ist $x_0 \in M$, so heißt f *(folgen-) stetig* an der Stelle x_0, falls für alle Folgen (x_n) in M mit $x_n \to x_0$ auch

$$f(x_n) \to f(x_0) \qquad (n \to \infty)$$

gilt. Ferner heißt f *stetig* (auf M), falls f stetig an allen Stellen $x_0 \in M$ ist.

Bemerkung 8.2 Es seien M eine beliebige Menge und $f, g : M \to \mathbb{K}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} f \pm g : M \to \mathbb{K},\ (f \pm g)(x) := f(x) + g(x) \\ f \cdot g : M \to \mathbb{K},\ (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

und im Falle $g(x) \neq 0$ für alle $x \in M$

$$f/g : M \to \mathbb{K},\ (f/g)(x) := f(x)/g(x).$$

Aus S. 5.7 ergibt sich unmittelbar: Ist $M \subset \mathbb{K}$ und sind f, g stetig an $x_0 \in M$, so sind auch $f \pm g, f \cdot g$ und f/g stetig an x_0.

Beispiel 8.3 Ein *Polynom* ist eine Funktion $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ der Form

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu x^\nu$$

mit $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{K}$. Ist $a_d \neq 0$, so heißt d der Grad von P.
Jedes Polynom ist stetig.
(Denn: Offensichtlich sind $K \ni x \mapsto 1 \in \mathbb{K}$ und $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ stetig. Durch wiederholte Anwendung von B. 8.2 ergibt sich die Stetigkeit von P.)
Sind P, Q Polynome und ist $Z(Q) := \{x \in \mathbb{K} : Q(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge von Q, so ist auch $P/Q : K \setminus Z(Q) \to \mathbb{K}$ stetig (wieder nach B. 8.2).

Satz 8.4 *(Zwischenwertsatz)*
Es sei $I \neq \emptyset$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf I. Dann gilt

1. *Für alle $\underline{y}, \overline{y} \in W(f)(= f(I))$ mit $\underline{y} \leq \overline{y}$ ist $[\underline{y}, \overline{y}] \subset W(f)$.*

2. *$W(f)$ ist ein Intervall.*

Beweis. 1. Es seien $\underline{y}, \overline{y} \in W(f)$, wobei o. E. $\underline{y} < \overline{y}$. Dann ist zu zeigen: Ist $\eta \in (\underline{y}, \overline{y})$ so existiert ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \eta$.
Zunächst existieren $\underline{x}, \overline{x} \in I$ mit $f(\underline{x}) = \underline{y}$ und $f(\overline{x}) = \overline{y}$. O. E. sei $\underline{x} < \overline{x}$ (sonst betrachte man $-f$). Wir setzen

$$M := \{x \in [\underline{x}, \overline{x}] : f(x) \leq \eta\} .$$

Dann ist $M \neq \emptyset$ (da $\underline{x} \in M$) und beschränkt, also existiert

$$\xi := \sup M \in [\underline{x}, \overline{x}] \subset I .$$

Behauptung: Es gilt $f(\xi) = \eta$.
Denn: Es existiert eine Folge (x_n) in M mit $x_n \to \xi$. Da f stetig an $\xi \in I$ ist, gilt $f(x_n) \to f(\xi)$ also $f(\xi) \leq \eta$. Aus $f(\overline{x}) = \overline{y} > \eta$ folgt $\xi < \overline{x}$. Ist $(\tilde{x}_n)$ eine Folge in $(\xi, \overline{x}]$ mit $\tilde{x}_n \to \xi$, so folgt $\eta < f(\tilde{x}_n) \to f(\xi)\ (n \to \infty)$, also $f(\xi) \geq \eta$ und damit $f(\xi) = \eta$.
2. Man sieht leicht: $J \subset \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn für alle $\underline{y}, \overline{y} \in J$ mit $\underline{y} \leq \overline{y}$ auch $[\underline{y}, \overline{y}] \subset J$ gilt. □

Bemerkung 8.5 Die Aussage von S. 8.4 ist i. A. falsch, falls f unstetig an einer Stelle $x_0 \in I$ ist. Ist etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

so ist $W(f) = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$, also kein Intervall.

Beispiel 8.6 Es sei $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = x^d$, wobei $d \in \mathbb{N}$ fest. Dann gilt $P(0) = 0$ und

$$P(n) = n^d \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Nach S. 8.4 ist $[0, \infty) \subset W(P)$, d. h. die Gleichung $x^d = c$ hat für jedes $c \geq 0$ eine Lösung (vgl. Definition $\sqrt[d]{c}$). Für d gerade ist $W(P) = [0, \infty)$ (da $x^d \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Ist d ungerade, so gilt

$$P(-n) = (-n)^d = -(n^d) \to -\infty \qquad (n \to \infty),$$

also ist $W(P) = \mathbb{R}$ nach S. 8.4. Allgemeiner gilt ([Ü]): Ist $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad d und ist d ungerade, so ist $W(P) = \mathbb{R}$.

Für $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$, die nach B. 7.18 absolut konvergent ist.

Definition 8.7 1. Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\exp(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \qquad (z \in \mathbb{C}) ,$$

heißt *(komplexe) Exponentialfunktion.*
2. Die Funktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\cos(z) := \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) \qquad (z \in \mathbb{C}) ,$$

heißt *(komplexe) Cosinusfunktion.*
3. Die Funktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) \qquad (z \in \mathbb{C}) ,$$

heißt *(komplexe) Sinusfunktion.*

Bemerkung 8.8 1. Aus der Definition ergibt sich sofort $\exp(0) = \cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ sowie

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{und} \quad \sin(-z) = -\sin z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Außerdem sieht man leicht ([Ü]), dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die sog. Eulersche Formel

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{8.2}$$

sowie

$$\cos(z) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu/2} z^\nu}{\nu!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sin(z) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{(\nu-1)/2} z^\nu}{\nu!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(mit absoluter Konvergenz der Reihen) gilt.
2. Ist speziell x reell, so sind auch $\exp(x)$, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ reell und es gilt

$$\cos x = \operatorname{Re}(\exp(ix)) \quad \text{und} \quad \sin x = \operatorname{Im}(\exp(ix)) .$$

Eine der zentralen Eigenschaften der Exponentialfunktion stellt die folgende Funktionalgleichung dar, die zeigt, dass exp aus der Addition eine Multiplikation macht.

Satz 8.9 *Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w) .$$

Beweis. Die Reihen $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{w^\nu}{\nu!}$ konvergieren absolut nach B. 7.18. Also konvergiert nach S. 7.20 das Cauchy-Produkt der beiden Reihen, und es gilt mit der binomischen Formel

$$\begin{aligned}\exp(z)\cdot\exp(w) &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{w^\nu}{\nu!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{z^\nu}{\nu!}\frac{w^{n-\nu}}{(n-\nu)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}z^\nu w^{n-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)\ .\end{aligned}$$

□

Als Folgerung erhalten wir

Satz 8.10 *1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(z) \neq 0$ und es gilt $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.*

2. $\exp$, $\cos$ und $\sin$ sind stetig.

Beweis. 1. Nach D. 8.7 gilt $\exp(0) = 1$. Also folgt aus S. 8.9 auch

$$1 = \exp(z-z) = \exp(z)\cdot\exp(-z)$$

d. h. $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.
2. Zunächst gilt für $|z| < 1$ mit B. 7.13

$$|\exp(z)-1| = \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}\right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|z|^\nu}{\nu!} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty}|z|^\nu = \frac{|z|}{1-|z|}.$$

Ist also (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to 0$, so folgt für n genügend groß

$$|\exp(z_n)-1| \leq \frac{|z_n|}{1-|z_n|} \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

also $\exp(z_n) \to 1 (= \exp(0))$ $(n \to \infty)$.
Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig, so ergibt sich mit S. 8.9 für $(z_n) \in \mathbb{C}$ mit $z_n \to z_0$

$$\exp(z_n) - \exp(z_0) = \exp(z_0)\Big(\exp\underbrace{(z_n - z_0)}_{\to 0 (n\to\infty)} - 1\Big) \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

also $\exp(z_0) \to \exp(z_0)$. Damit ist exp stetig. Durch Anwendung von B. 8.2 ergibt sich aus der Definition auch die Stetigkeit von cos und sin. □

Satz 8.11 *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z) \left(= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}\right)\ .$$

Beweis. Wir setzen

$$s_n := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} \qquad \text{und} \qquad b_n := (1 + z/n)^n \,.$$

Damit genügt es, zu zeigen $s_n - b_n \to 0$. Es gilt (mit der binomischen Formel)

$$b_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{z^\nu}{n^\nu}$$

also

$$\begin{aligned} s_n - b_n &= \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{n^\nu}\right) \frac{z^\nu}{\nu!} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu} \frac{1}{2^\nu} \end{aligned}$$

mit

$$c_{n\nu} := \underbrace{\left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{n^\nu}\right)}_{\leq 1} \frac{(2z)^\nu}{\nu!} .$$

Dabei ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} |c_{n\nu}| \leq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2|z|)^\nu}{\nu!} \leq \exp(2|z|) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

und für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$ fest gilt

$$c_{n\nu} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Nach Beweisschritt 1. zu S. 7.20 gilt $s_n - b_n \to 0$ $(n \to \infty)$. □

Bemerkung 8.12 Aus S. 8.11 ergibt sich insbesondere

$$\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \,.$$

Hieraus folgt aus S. 8.9 und S. 8.10 induktiv auch

$$\exp(n) = e^n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Deshalb schreiben wir in Zukunft auch e^z statt $\exp(z)$ für allgemeines $z \in \mathbb{C}$.

Wir schauen uns nun trigonometrischen Funktionen sin und cos speziell für reelle Argumente, also die Exponentialfunktion für rein imaginäre Argumente an.

Satz 8.13 *1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist*

$$|e^{ix}| = 1$$

also auch $\cos^2 x + \sin^2 x = |e^{ix}|^2 = 1$ und damit insbesondere $-1 \leq \cos x \leq 1$ und $-1 \leq \sin x \leq 1$.

2. Es existiert ein $x \in (0,2)$ mit $e^{ix} = i$.

Beweis. Zunächst gilt für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ und $s_n(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!}$

$$\overline{s_n(z)} = \overline{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!}} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\overline{z}^\nu}{\nu!} = s_n(\overline{z}) \to e^{\overline{z}} \qquad (n \to \infty)\ .$$

Aus $s_n(z) \to e^z \quad (n \to \infty)$ folgt $\overline{s_n(z)} \to \overline{e^z} \quad (n \to \infty)$ ([Ü]). Also ist $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$. Speziell ergibt sich für $z = ix$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = |e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{\overline{ix}} = e^{ix}e^{-ix} \overset{S.8.10}{=} 1\ .$$

2. (i) Zunächst gilt $\sin x \geq 0$ für alle $x \in [0,2]$.
Denn: Ist

$$a_\nu = \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\ ,$$

so gilt für $\nu \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} = \frac{x^2}{(2\nu+1)(2\nu)} \leq \frac{4}{6} < 1$$

also ist $0 \leq a_\nu \downarrow$. Aus dem Leibniz-Kriterium (S. 7.8) ergibt sich

$$\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \geq 0\ .$$

(ii) Unter den Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums gilt auch:

$$s_{2j} = a_0 - \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} \ldots - \underbrace{(a_{2j-1} - a_{2j})}_{\geq 0} \leq a_0,$$

also auch $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu \leq a_0$.
Setzen wir

$$a_\nu = \frac{4^{\nu+2}}{(2\nu+4)!} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0),$$

so gilt

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} = \frac{4}{(2\nu+3)(2\nu+4)} < 1,$$

also $0 \leq a_\nu \downarrow$. Damit ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2^{2k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu 4^{\nu+2}}{(2\nu+4)!} \leq \frac{4^2}{4!} = \frac{2}{3}$$

und folglich

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \leq -1 + \frac{2}{3} < 0.$$

Da cos stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in (0,2)$ mit $\cos x = 0$. Weiter ist $\sin x \geq 0$ nach (i) und $\sin^2 x = 1$ nach 1. Folglich ist $\sin x = 1$ und damit auch $e^{ix} = \cos x + i \sin x = i$.

□

Bemerkung und Definition 8.14 Wir setzen $M := \{x > 0 : e^{ix} = \}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ wie eben gesehen. Wir setzen $x_0 := \inf M$ Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist auch $e^{ix} = i$ (d. h. $x_0 = \min M$). Damit schreiben wir

$$\pi := 2x_0 \ .$$

Nach dieser Definition gilt also

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

und mit $\cos(0) = 1$, dem Zwischenwertsatz und $\cos(x) = \cos(-x)$ folgt $\cos(x) > 0$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ausserdem ist $\sin(\pi/2) = 1$.

Satz 8.15 *(Additionstheoreme)*
Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

1. $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$,
2. $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$.

Beweis. 1. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) &= \frac{1}{4}\big((e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}\big) = \frac{1}{2}\big(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}\big) \\
&= \cos(z + w)
\end{aligned}$$

2. ergibt sich durch eine entsprechende Rechnung. □

Unter Ausnutzung der Additionstheoreme erhält man Periodizitätseigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Satz 8.16 *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

1. $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$, $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$,

2. $\cos(z + \pi) = -\cos z$, $\sin(z + \pi) = -\sin z$,

3. $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2\pi) = \sin z$,

($\cos$ *und* $\sin$ *sind* 2π*-periodisch)*

Beweis. Mit S. 8.15.1 erhalten wir

$$\cos(z + \pi/2) = \cos(z)\cos(\pi/2) - \sin(z)\sin(\pi/2) = -\sin z \, .$$

und

$$\sin(z + \pi/2) = \cos(z)\sin(\pi/2) + \sin(z)\cos(\pi/2) = \cos z \, .$$

Hieraus folgt wiederum

$$\cos(z + \pi) = \cos(z + \pi/2 + \pi/2) = -\sin(z + \pi/2) = -\cos z \, .$$

Die weiteren Behauptungen ergeben sich in ähnlicher Weise ([Ü]). □

Definition 8.17 Es sei $M \subset \mathbb{R}$ und $f : M \to \mathbb{R}$. Dann heißt f

1. *monoton wachsend*, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$,
2. *streng monoton wachsend*, falls $f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$,
3. *(streng) monoton-fallend*, falls $-f$ (streng) monoton wachsend ist.

Wir wollen uns nun mit der Frage der Umkehrbarkeit der reellen Exponentialfunktion und der reellen trigonometrische Funktionen beschäftigen. Zunächst gilt

Satz 8.18 *1. Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $e^x \geq \max(1 + x, 0)$.

2. Für alle $x < 1$ *ist* $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

3. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend mit* $\exp(\mathbb{R}) = W(\exp_{|\mathbb{R}}) = (0, \infty)$.

Beweis. 1. Aus $(1 + x/n)^n \geq 0$ für fast alle n folgt $e^x \geq 0$. Ist $x \geq -1$ so ergibt sich mit der Bernoullischen Ungleichung $(1+x/n)^n \geq 1+x$ für alle n, also auch $e^x \geq 1+x$.
2. Nach 1. gilt für $x < 1$

$$e^{-x} \geq 1 - x \, ,$$

also auch

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} \leq \frac{1}{1-x}\,.$$

3. Für $x_1 < x_2$ ergibt sich $e^{x_2}/e^{x_1} = e^{x_2-x_1} \geq 1 + (x_2 - x_1) > 1$ nach 1. Also ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Weiter folgt aus 1. und 2. auch

$$e^n \to \infty \qquad \text{und} \qquad e^{-n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

und damit ist $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ nach dem Zwischenwertsatz. □

Es gilt

Satz 8.19 *1. $f := \sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$ ist streng monoton wachsend mit $W(f) = [-1, 1]$.*

2. $g := \cos_{|[0,\pi]}$ ist streng monoton fallend mit $W(g) = [-1, 1]$.

Beweis. 1. Aus S. 8.15 folgt für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sin x_2 - \sin x_1 &= \sin\left(\frac{x_2+x_1}{2} + \frac{x_2-x_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{x_2+x_1}{2} - \frac{x_2-x_1}{2}\right)\\ &= 2\cdot\cos\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\,.\end{aligned}$$

Ist $-\pi/2 \leq x_1 < x_2 \leq \pi/2$, so gilt

$$\frac{x_2+x_1}{2} \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{und} \quad \frac{x_2-x_1}{2} \in (0, \pi/2] \subset (0, \pi)$$

und damit $\cos\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right) > 0$ und $\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) > 0$, also $\sin x_1 < \sin x_2$.
Schließlich folgt aus $\sin(0) = 0$ und $\sin(\pi/2) = 1$ sowie $\sin(-x) = -\sin x$ mit dem Zwischenwertsatz $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$.
2. Ergibt sich aus 1. und S. 8.16. □

Wir befassen uns zum Abschluss mit der Umkehrbarkeit der elementaren Funktionen. Dazu beweisen wir zunächst folgendes allgemeine Ergebnis.

Satz 8.20 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend). Dann gilt*

1. *Die Umkehrfunktion f^{-1} existiert auf $J := W(f)$ und f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend). Außerdem ist f^{-1} stetig.*

2. *Ist f zudem stetig, so ist J ein Intervall.*

Beweis. 1. Aus D. 8.17 sieht man leicht, dass $f : I \to J$ bijektiv ist, d. h. $f^{-1} : J \to I$ existiert. Weiter ist $f^{-1} : J \to I$ streng monoton wachsend.
(Denn: Angenommen, es existieren $y_1, y_2 \in J$ mit $y_1 < y_2$ und $x_1 = f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) = x_2$. Dann gilt $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, da f (streng) monoton wachsend ist. Widerspruch!)
Schließlich ist $f^{-1} : J \to I$ stetig.
(Denn: Es sei $y_0 \in J$ und $x_0 := f^{-1}(y_0)$ sowie $\varepsilon > 0$. Ist x_0 nicht der rechte Randpunkt von I, so existiert ein $x_\varepsilon \in I$ mit $x_0 < x_\varepsilon \leq x_0 + \varepsilon$. Wir setzen

$$\delta_\varepsilon^+ := f(x_\varepsilon) - f(x_0) .$$

Dann ist $\delta_\varepsilon^+ > 0$ und für alle $y \in J$ mit $y_0 \leq y < y_0 + \delta_\varepsilon^+ = f(x_\varepsilon)$ folgt

$$0 \leq f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0 + \delta_\varepsilon^+) - f^{-1}(y_0) = x_\varepsilon - x_0 \leq \varepsilon .$$

Ist x_0 nicht der linke Randpunkt von I, so sieht man entsprechend: Es existiert ein $\delta_\varepsilon^- > 0$ so, dass

$$0 \leq f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y) < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in J \text{ mit } y_0 - \delta_\varepsilon^- < y \leq y_0 .$$

Damit ergibt sich $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$ für alle $y \in J$ mit $|y - y_0| < \delta_\varepsilon := \min\{\delta_\varepsilon^+, \delta_\varepsilon^-\}$. Ist (y_n) eine Folge in J mit $y_n \to y_0$, so ist $|y_n - y_0| < \delta_\varepsilon$ für n genügend groß, also auch $|f(y_n) - f(y_0)| < \varepsilon$ für n genügend groß.
2. Ist f stetig, so ist $J = W(f)$ nach S. 8.4 ein Intervall. □

Bemerkung und Definition 8.21 Nach S. 8.18.3 und S. 8.20 existiert die Umkehrfunktion von exp auf dem Intervall $(0, \infty)$ und ist dort stetig und streng monoton wachsend. Diese Funktion nennnen wir *(natürliche) Logarithmusfunktion* und schreiben dafür ln oder auch log. Es gilt also für $x \in (0, \infty)$ und $y \in \mathbb{R}$

$$y = \ln(x) \iff e^y = x .$$

Aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ergibt sich leicht ([Ü]):

1. Für alle $x_1, x_2 > 0$ ist $\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.

2. Für alle $x > 0$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

Weiterhin definieren wir damit allgemeine Potenzen und Logarithmen.

Definition 8.22 Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$a^b := \exp(b \cdot \ln a) = e^{b \cdot \ln a} .$$

Man beachte, dass aufgrund von 2. in B. 8.21 für $b = n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a^n = e^{n \ln a}.$$

Damit stimmt die obige Definition für den Fall $b \in \mathbb{Z}$ mit der alten Definition überein.

Aus den Rechenregeln für ln und exp erhält man weiterhin

Satz 8.23 *(allgemeine Potenzgesetze)*

1. *Für $a > 0$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ gilt $a^{b_1}a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$ und im Falle $b_1 \in \mathbb{R}$ auch $(a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 b_2}$.*

2. *Für $a_1, a_2 > 0$ und $b \in \mathbb{C}$ gilt $a_1^b a_2^b = (a_1 a_2)^b$.*

Beweis. 1. Es gilt

$$a^{b_1}a^{b_2} = e^{b_1 \ln a}e^{b_2 \ln a} = e^{b_1 \ln a + b_2 \ln a} = e^{(b_1+b_2)\ln a} = a^{b_1+b_2} \ .$$

Im Falle $b_1 \in \mathbb{R}$ ist $a^{b_1} > 0$ und damit gilt dann auch

$$(a^{b_1})^{b_2} = e^{b_2 \ln(a^{b_1})} = e^{b_2 \ln(e^{b_1 \ln a})} = e^{b_2 b_1 \ln a} = a^{b_1 b_2} \ .$$

2. [Ü]. □

Bemerkung und Definition 8.24 Wir betrachten ein festes $a > 0, a \neq 1$. Dann gilt für $x > 0$

$$x = a^y = e^{y \ln a} \iff y \ln a = \ln x \iff y = \frac{\ln x}{\ln a} \ .$$

Wir definieren

$$\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (x > 0) \ .$$

Damit gilt also für $x > 0, y \in \mathbb{R}$

$$y = \log_a x \iff a^y = x \ .$$

Bemerkung und Definition 8.25 Die nach S. 8.20 und S. 8.19 auf $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$ existierende (und dort streng monoton wachsende und stetige) Umkehrfunktion von sin heißt arcsin, d. h. $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ erfüllt

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \qquad (x \in [-1, 1],\ y \in [-\pi/2, \pi/2]) \ .$$

Entsprechend bezeichnet man die auf $[-1, 1]$ existierende (und dort streng monoton fallende und stetige) Umkehrfunktion von cos mit arccos, d. h. $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ erfüllt

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \quad (x \in [-1, 1],\ y \in [0, \pi])$$

Satz 8.26 *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt*

1. $e^z = 1$ *genau dann, wenn* $z = 2k\pi i$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$,
2. $\sin z = 0$ *genau dann, wenn* $z = k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$,
3. $\cos z = 0$ *genau dann, wenn* $z = k\pi + \pi/2$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$,

Beweis. 1. [Ü]
2. Es gilt $0 = 2i \sin z = e^{iz} - e^{-iz}$ genau dann, wenn $e^{2iz} - 1 = 0$ ist. Aus 1. ergibt sich damit 2.
3. Mit S. 8.16. □

Bemerkung und Definition 8.27 Wir definieren die Funktionen

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$$

und

$$\cot : \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$$

durch

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}\,, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}\,.$$

Dann sind tan und cot stetig auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen.
Außerdem gilt: tan ist streng monoton wachsend in $(-\pi/2, \pi/2)$ und cot ist streng monoton fallend in $(0, \pi)$ mit $W(\tan_{|(-\pi/2,\pi/2)}) = W(\cot_{|(0,\pi)}) = \mathbb{R}$. Also existieren auf $\mathbb{R}$ die Umkehrfunktionen, genannt arctan bzw. arccot.

Bemerkung 8.28 (Polarkoordinaten)
Wir betrachten $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(r, \varphi) := re^{i\varphi} \qquad (r > 0, \varphi \in \mathbb{R})\,.$$

Dann ergibt sich aus S. 8.26.1

$$f(r, \varphi) = e^{\ln r + i\varphi} = e^{\ln \tilde{r} + i\tilde{\varphi}} = f(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$$

genau dann, wenn $r = \tilde{r}$ und $\varphi = \tilde{\varphi} + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
Damit erhalten wir:
Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $f_\alpha := f_{|(0,\infty)\times[\alpha,\alpha+2\pi)}$ injektiv. Wir zeigen: Für alle $r > 0$ ist

$$f_\alpha(\{r\} \times [\alpha, \alpha + 2\pi)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$$

und damit auch

$$W(f_\alpha) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \,.$$

(Denn: Auf Grund der 2π-Periodizität von $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ reicht es, die Behauptung etwa für $\alpha = -\pi$ zu zeigen. Weiter reicht es nach S. 8.13, „$\supset$“ zu zeigen. Dazu sei $z = x + iy$ mit $|z| = r$ gegeben.
1. Fall: $y > 0$. Dann betrachten wir $\varphi := \arccos(x/r) \in (0, \pi)$. Dafür gilt $x = r \cdot \cos\varphi$ und

$$y^2 = r^2 - x^2 = r^2(1 - \cos^2\varphi) = r^2 \sin^2\varphi \,.$$

Da $\varphi \in (0, \pi)$ ist, ist $\sin\varphi > 0$. Damit ist $y = r \sin\varphi$.
2. Fall: $y \leq 0$. Dann gilt für $\varphi := -\arccos(x/r) \in [-\pi, 0]$ genauso $x = r\cos(-\varphi) = r\cos\varphi$ und

$$y^2 = r^2 \sin^2\varphi \,.$$

Da jetzt $\sin\varphi \leq 0$ ist, folgt wieder $y = r \sin\varphi$.)

Bemerkung und Definition 8.29 Eine wichtige Folgerung aus der Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen ist die Existenz von Wurzeln komplexer Zahlen: Es sei $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ beliebig. Dann existieren $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $c = re^{i\varphi}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$z^n = c$$

genau dann, wenn

$$z = z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi + 2k\pi)/n} \qquad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \,.$$

(Denn: Da $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ 2π-perodisch ist, gilt einerseits

$$z_k^n = r \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)} = re^{i\varphi} = c \qquad (k = 1, \ldots, n) \,,$$

und andererseits folgt für $z = \rho e^{i\psi}$ mit $z^n = c$

$$\rho^n e^{in\psi} = z^n = re^{i\varphi}$$

und damit $\rho = \sqrt[n]{r}$ und $\psi = \psi_k = (\varphi + 2k\pi)/n$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.)
Die Zahlen z_k heißen *n-te (komplexe) Wurzeln* aus c. Man beachte, dass nur n davon paarweise verschieden sind (etwa $z_0, \ldots, z_{n-1}$).
Ist speziell $c = 1$, so heißen die n Zahlen

$$z_k = e^{2k\pi i/n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

n-te Einheitswurzeln. So sind etwa ± 1 die zweiten Einheitswurzeln und $\pm i, \pm 1$ die vierten Einheitswurzeln.

9 Normierte und metrische Räume

Wie wir bereits in den vorhergehenden Abschnitten gesehen haben, besteht ein zentrales Anliegen der Analysis darin, "Grenzwerte" zu untersuchen. Grob gesagt bedeutet "$x_n \to x$", dass x_n für große n "nahe bei" x liegt. Es ist also wesentlich, "Abstände" zwischen Elementen einer Menge bestimmen zu können. Eine Klasse von Räumen mit dieser Eigenschaft wollen wir in diesem Abschnitt definieren, die sog. metrischen Räume. Es wird sich später zeigen, dass diese Räume für viele Fragen der Analysis den geeigneten Rahmen bilden.
Wir betrachten zunächst jedoch eine speziellere Klasse von Räumen, wobei wir damit gleichzeitig erstmals eine Verbindung zur Linearen Algebra herstellen.

Definition 9.1 Es sei $V = (V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ heißt *Norm* (auf V), falls folgende Bedingungen erfüllt sind

(N.1) (Definitheit)
$||0|| = 0$ und $||x|| > 0$ für alle $x \neq 0$.

(N.2) (Homogenität)
Für alle $x \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

(N.3) (Dreiecksungleichung)
Für alle $x, y \in V$ gilt $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Wir nennen dann $(V, ||\cdot||)$ einen *normierten* Raum.

Beispiel 9.2 1. Ist $|\cdot|$ der Betrag in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, so ist $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ (als Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$)
2. Es sei

$$\mathbb{R}^m := \{(x_1, \ldots, x_m) : x_j \in \mathbb{R} \text{ für } j = 1, \ldots, m\}$$

und

$$\mathbb{C}^m := \{(z_1, \ldots, z_m) : z_j \in \mathbb{C} \text{ für } j = 1, \ldots, m\}$$

(mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation; vgl. Lineare Algebra). Wir schreiben in Zukunft auch kurz $\mathbb{K}^m$ für $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{C}^m$. Dann sind durch

$$\begin{aligned} ||x||_1 &:= \sum_{j=1}^m |x_j| \\ ||x||_\infty &:= \max\{|x_j| : j = 1, \ldots, m\} , \end{aligned}$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, Normen auf $\mathbb{K}^m$ gegeben.

Wir wollen weitere Normen auf $\mathbb{K}^n$ definieren. Dazu beweisen wir zunächst (wobei wir $0^b := 0$ für $b > 0$ setzen).

Satz 9.3 *(Hölder-Ungleichung)*
Es seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{m} u_j v_j \leq \Big(\sum_{j=1}^{m} u_j^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{m} v_j^q \Big)^{1/q}.$$

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst: Sind $u, v > 0$, so gilt

$$uv \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q.$$

Denn: Aus S. 8.18.1 folgt (mit $t = e^x$)

$$\ln t \leq t - 1 \qquad (t > 0).$$

Hieraus ergibt sich für $A := \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q$

$$\begin{aligned} \ln(uv) &= \frac{1}{p} \ln(u^p) + \frac{1}{q} \ln(v^q) \\ &\leq \frac{1}{p} \cdot \ln \Big(\frac{u^p}{A} \Big) + \frac{1}{q} \cdot \ln \Big(\frac{v^q}{A} \Big) + \underbrace{\Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Big)}_{=1} \ln A \\ &\leq \frac{1}{p} \Big(\frac{u^p}{A} - 1 \Big) + \frac{1}{q} \Big(\frac{v^q}{A} - 1 \Big) + \ln A = \ln A, \end{aligned}$$

also auch $uv \leq A$.
2. Wir setzen $U := \Big(\sum\limits_{j=1}^{m} u_j^p \Big)^{1/p}, V := \Big(\sum\limits_{j=1}^{m} v_j^q \Big)^{1/p}$.
Ohne Einschränkung können wir $U, V > 0$ annehmen. Aus 1. folgt

$$\frac{1}{U \cdot V} \sum_{j=1}^{m} u_j v_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{u_j}{U} \frac{v_j}{V} \leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{u_j}{U} \Big)^p + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{v_j}{V} \Big)^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Damit erhalten wir

Satz 9.4 *Es sei $p \in (1, \infty)$. Dann ist durch*

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p \Big)^{1/p} \qquad \big(x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m \big)$$

eine Norm auf $\mathbb{K}^m$ gegeben.

Beweis. (N.1) und (N.2) sind klar.
Zu (N.3): Es seien $x, y \in \mathbb{K}^m$. Wir setzen $S := \sum_{j=1}^{m} |x_j + y_j|^p$. Dann gilt für $q := p/(p-1)$ (und damit q so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_{j=1}^{m} \big(|x_j| + |y_j|\big)|x_j + y_j|^{p-1} \\ &\overset{\text{S.9.3}}{\leq} \left[\Big(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{j=1}^{m} |y_j|^p\Big)^{1/p}\right] \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} |x_j + y_j|^{(p-1)q}}_{=S}\Big)^{1/q} \\ &= \big(\|x\|_p + \|y\|_p\big)\, S^{1/q}. \end{aligned}$$

Nach Division durch $S^{1/q}$ (ohne Einschränkung $S > 0$) ergibt sich (da $S^{1/p} = S^{1-1/q}$)

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

(sogenannte *Minkowski-Ungleichung* in $\mathbb{K}^m$). □

Bemerkung 9.5 Besonders wichtig ist der Fall $p = 2$, also

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2} \quad (x \in \mathbb{K}^m)$$

(für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ spricht man von der *euklidschen Länge* von x). Aus

$$|x_{j_0}|^2 \leq \sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{m} |x_j x_k| \leq \Big(\sum_{j=1}^{m} |x_j|\Big)^2$$

für alle $x \in \mathbb{K}^m$ und $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ folgt

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \,.$$

Definition 9.6 Es sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Eine Menge $W \subset V$ heißt *beschränkt*, falls ein $C > 0$ existiert mit $||x|| \leq C$ für alle $x \in W$. Ist M eine Menge, so heißt $f : M \to V$ *beschränkt*, falls $f(M) \subset V$ beschränkt ist.

Beispiel 9.7 Es sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann ist

$$S := \{x \in V : ||x|| = 1\}$$

(die sog. Einheitssphäre in V) beschränkt.

Bemerkung und Definition 9.8 1. Es sei E ein Vektorraum (über $\mathbb{K}$). Ist M eine nichtleere Menge, so sind für $f, g : M \to E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die Funktionen $f + g : M \to E$ und $\lambda f : M \to E$ definert durch

$$(f+g)(t) := f(t) + g(t), \quad (\lambda f)(t) := \lambda \cdot f(t) \quad (t \in M)\ .$$

Damit ist auch $E^M := \{f : M \to E\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ (siehe Lineare Algebra).
2. Es sei nun $(E, |\cdot|_E)$ ein normierter Räum. Wir setzen

$$B(M,E) := \{f : M \to E : f \text{ beschränkt}\}\ .$$

$B(M,E)$ ist ein Unterraum von E^M ([Ü]) und damit selbst ein Vektorraum.
Weiter definieren wir für $f, g \in B(M,E)$

$$||f||_\infty := \sup\{|f(t)|_E : t \in M\}$$

Dann ist $||\cdot||_\infty$ eine Norm auf $B(M,E)$ ([Ü]).

Definition 9.9 Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik (auf X)*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(d.1) (Definitheit)
$d(x,x) = 0$ für alle $x \in X$ und $d(x,y) > 0$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$.
(d.2) (Symmetrie)
Für alle $x, y \in X$ ist $d(x,y) = d(y,x)$.
(d.3) (Dreiecksungleichung)
Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Das Paar (X,d) heißt dann *metrischer Raum.*

Bemerkung 9.10 1. Ist (X,d) ein metrischer Raum und ist $Y \subset X$, so ist auch (Y,d) (d.h. genauer $(Y, d_{|Y \times Y})$) ein metrischer Räum.
2. Es sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Dann ist durch

$$d(x,y) := \delta(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x = y \\ 1, & \text{falls} \quad x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X gegeben (die sog. diskrete Metrik). Dies ergibt sich leicht durch Überprüfen von (d.1)–(d.3).

Satz 9.11 *Ist $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, so ist durch*

$$d(x,y) := d_{||\cdot||}(x,y) := ||x-y|| \qquad (x, y \in V)$$

eine Metrik auf V gegeben.

Beweis. (d.1) ergibt sich unmittelbar aus (N.1).
Zu (d.2): Sind $x, y \in V$, so gilt

$$d(x,y) = ||x-y|| = ||-(y-x)|| \overset{(N.2)}{=} ||y-x|| = d(y,x)\ .$$

Zu (d.3): Sind $x, y, z \in V$, so gilt

$$d(x,y) = ||x-y|| = ||x-z+z-y|| \overset{(N.3)}{\leq} ||x-z|| + ||z-y|| = d(x,z) + d(z,y)$$

□

Beispiel 9.12 Es sei $V = \mathbb{K}^m$. Dann ist nach S. 9.11 durch

$$d(x,y) := d_{|\cdot|}(x,y) := d_{||\cdot||_2}(x,y) := |x-y| \qquad (x, y \in \mathbb{K}^m)$$

eine Metrik auf $\mathbb{K}^m$ gegeben (die sog. *euklidsche Metrik*).
Falls nichts anderes angegeben ist, soll im weiteren Verlauf der Vorlesung $\mathbb{K}^m$ stets mit der Norm $||\cdot||_2$ und der Metrik $d_{||\cdot||_2}$ versehen sein. Wir schreiben hierfür auch kurz

$$|\cdot| := ||\cdot||_2\ .$$

Wir untersuchen nun Folgen in metrischen Räumen

Definition 9.13 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei (x_n) eine Folge in X.

1. (x_n) heißt *konvergent* (in (X, d)) falls ein $x \in X$ so existiert, dass

   $$d(x_n, x) \to 0 \qquad (n \to \infty)\ .$$

   Dann heißt wieder x *Grenzwert* von (x_n) und wir schreiben

   $$x = \lim_{n\to\infty} x_n \qquad \text{oder} \quad x_n \to x \quad (n \to \infty)\ .$$

2. (x_n) heißt *Cauchy-Folge* (in (X, d)), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

   $$d(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad (n, m \geq N_\varepsilon)\ .$$

Ist $(X, d) = (V, d_{||\cdot||})$ so sprechen wir auch von Konvergenz bzw. von einer Cauchy-Folge in V (oder genauer in $(V, ||\cdot||)$).

Beispiel 9.14 Es sei $X = \mathbb{R}$ und $(x_n) = (1/n)$. Dann gilt $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ aber (x_n) konvergiert **nicht** im metrischen Raum $(\mathbb{R}, \delta)$, wobei δ die diskrete Metrik ist. (Im metrischen Raum (X, δ) gilt: $x_n \to X$ genau dann, wenn $x_n = x$ für n genügend groß; [Ü].)
Dieses Beispiel zeigt insbesondere, dass die Konvergenz einer Folge von der zu Grunde liegenden Metrik abhängen kann!

Wie im Fall $(X, d) = (\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$ gilt

Satz 9.15 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum.*

1. *Jede Folge in X hat höchstens einen Grenzwert.*
2. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*
3. *Jede Cauchy-Folge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, ist konvergent.*

Beweis. 1. Es seien $x, \tilde{x}$ Grenzwerte von (x_n). Dann gilt mit (d.2) und (d.3)

$$d(x, \tilde{x}) \leq d(x, x_n) + d(x_n, \tilde{x}) \to 0 \qquad (n \to \infty)\ ,$$

also ist $d(x, \tilde{x}) = 0$. Aufgrund von (d.1) ist $x = \tilde{x}$.
2. Ergibt sich leicht aus der Dreiecksungleichung, also (d.3).
3. Wie im Beweis zum Cauchyschen Konvergenzkriterium (S. 5.24). □

Bemerkung 9.16 Ist (X, d) ein metrischer Raum, und ist (x_n) eine Folge in X, so ist i. A. nicht jede Cauchy-Folge konvergent!
Betrachtet man etwa $(X, d) = (\mathbb{Q}, d_{|\cdot|})$ (also die rationalen Zahlen mit der Betragsmetrik), so ist die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $x_0 = 2$ und

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

eine Folge in $X = \mathbb{Q}$. Betrachtet man (x_n) als Folge in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, so gilt $x_n \to \sqrt{2}$ (vgl. B. 5.14), also ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ und damit auch in $(\mathbb{Q}, d_{|\cdot|})$. Da jedoch $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist, kann die Folge in $(\mathbb{Q}, d_{|\cdot|})$ nicht konvergent sein. (Die Konvergenz in $(\mathbb{Q}, d_{|\cdot|})$ würde auch die Konvergenz in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ implizieren, d. h., ein rationaler Grenzwert würde der Eindeutigkeit des Grenzwertes (B. 5.2) widersprechen.)

Definition 9.17 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. (X, d) heißt *(folgen-) vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergiert.

Beispiel 9.18 1. Nach S. 5.24 sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (mit der Metrik $d_{|\cdot|}$) vollständig.

2. Nach B. 9.16 ist $(\mathbb{Q}, d_{|\cdot|})$ nicht vollständig.

3. Auf $\mathbb{R}$ ist durch

$$d(x,y) := \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right| \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

eine Metrik definiert ([Ü]).
Die Folge (x_n) mit $x_n = n$ ist eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$, die nicht konvergiert.
(Denn: Es gilt für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$

$$d(x_n, x_m) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right| = \frac{n-m}{(1+n)(1+m)} \leq \frac{n}{1+n} \cdot \frac{1}{1+m} \leq \frac{1}{1+m} .$$

Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_ε mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq N_\varepsilon$, d. h. (x_n) ist eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$. Ist jedoch $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so gilt

$$d(n,x) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{x}{1+|x|} \right| \to 1 - \frac{x}{1+|x|} > 0$$

also $d(n,x) \not\to 0$ $(n \to \infty)$. Damit ist (x_n) nicht konvergent und folglich $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig.)
Es zeigt sich (mit 1.), dass die Vollständigkeit eine Eigenschaft ist, die nicht nur von der zugrunde liegenden Menge (hier $\mathbb{R}$), sondern auch von der Metrik abhängt!

Bemerkung 9.19 Es sei $\left(x^{(n)}\right)_n = \left((x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)})\right)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$.
Dann gilt: $(x^{(n)})$ ist konvergent (bzw. eine Cauchy-Folge) in $\mathbb{K}^m$ genau dann, wenn für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ die „Komponentenfolgen“ $(x_j^{(n)})_n$ konvergent (bzw. Cauchy-Folgen) in $\mathbb{K}$ sind. Außerdem gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \big(\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)}, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} \big).$$

(Denn: Zur Konvergenz:
„$\Rightarrow$“ Ist $x = \lim x^{(n)}$, so folgt für $j = 1, \ldots, m$ aus B. 9.5 mit $x := (x_1 \ldots, x_m)$

$$|x_j^{(n)} - x_j| \leq \|x^{(n)} - x\|_\infty \leq \|x^{(n)} - x\|_2 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

„$\Leftarrow$“ Ist $x_j := \lim\limits_{n\to\infty} x_j^{(n)}$ für $j = 1, \ldots, m$, so folgt für $x = (x_1, \ldots, x_m)$ wieder mit B. 9.5

$$\|x^{(n)} - x\|_2 \leq \|x^{(n)} - x\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j^{(n)} - x_j| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Entsprechend ergibt sich die Äquivalenz für Cauchy-Folgen.)

Definition 9.20 Es sei $V = (V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann heißt V *Banachraum*, falls $(V, d_{||\cdot||})$ vollständig ist.

Beispiel 9.21 $\mathbb{K}^m = (\mathbb{K}^m, d_{|\cdot|})$ ist nach B. 9.19 und dem Cauchy-Kriterium in $\mathbb{K}$ (S. 5.24) ein Banachraum.

Definition 9.22 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $M \subset X$ heißt *relativ kompakt*, falls jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt.

Bemerkung 9.23 1. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (S. 5.22) ist jede beschränkte Menge M in $\mathbb{K}$ relativ kompakt.
(Denn: Ist (x_n) eine Folge in M, so ist (x_n) beschränkt. Damit existiert eine konvergente Teilfolge.)
2. Ist $\big(V, \|\cdot\|\big)$ ein normierter Raum, so ist jede relativ kompakte Teilmenge M beschränkt.
(Denn: Zunächst gilt wie in $V = \mathbb{K}$: Ist (x_n) konvergent, so ist (x_n) auch beschränkt, da für $x = \lim x_n$

$$\|x_n\| \leq \|x\| + \|x_n - x\| \leq \|x\| + 1$$

für n genügend groß gilt.
Angenommen, M ist unbeschränkt. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $\|x_n\| > n$. Da jede Teilfolge von (x_n) unbeschränkt ist, hat (x_n) keine konvergente Teilfolge. Widerspruch.)

In $\big(\mathbb{K}^m, |\cdot|\big)$ gilt folgende wichtige Charakterisierung.

Satz 9.24 *(Bolzano-Weierstraß für Mengen)*
Es sei $m \in \mathbb{N}$. Dann sind für $M \subset \mathbb{K}^m$ äquivalent:

a) M ist relativ kompakt,

b) M ist beschränkt.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b): Nach B. 9.23.2.
b) $\Rightarrow$ a): Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach m.
$m = 1$: B. 9.23.1.
$m \to m + 1$: Es sei $M \subset \mathbb{K}^{m+1}$ beschränkt, und es sei $(x^{(n)})_n$ eine Foge in M. Wir schreiben

$$x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)}\right) =: (y^{(n)}, z^{(n)}) \, .$$

wobei $y^{(n)} \in \mathbb{K}^m$. Dann gilt $|y^{(n)}| \leq |x^{(n)}|$ und $|z^{(n)}| \leq |x^{(n)}|$. Insbesondere ist $\{y^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Also besitzt nach Induktionsvoraussetzung $(y^{(n)})$ eine konvergente Teilfolge $(y^{(n_j)})$. Da auch $(z^{(n_j)})$ beschränkt in $\mathbb{K}$ ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(z^{(n_{j_\ell})})$ (S. 5.22). Durch zweimalige Anwendung von B. 9.19 ergibt sich die Konvergenz von $(x^{(n_{j_\ell})}) = (y^{(n_{j_\ell})}, z^{(n_{j_\ell})})$ in $\mathbb{K}^{n+1}$ (beachte: alle Komponentenfolgen von $(y^{(n_{j_\ell})})$ sind konvergent.) $\square$

Definition 9.25 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $x_0 \in X$. Für $\varepsilon > 0$ heißt die Menge

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

ε-Umgebung von x_0.

Beispiel 9.26 1. Ist $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, so ist für $x_0 \in \mathbb{R}$

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\ .$$

2. Ist $(X, d) = (\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, so ist für $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(z_0) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\} = \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}^2(z - z_0) + \operatorname{Im}^2(z - z_0) < \varepsilon^2\} \end{aligned}$$

der Kreis mit Radius ε um z_0.
3. Ist $(X, d) = \left(\mathbb{R}^3, d_{|\cdot|}\right)$ so ist für $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^3$

$$U_\varepsilon\left(x^{(0)}\right) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \left(x_1 - x_1^{(0)}\right)^2 + \left(x_2 - x_2^{(0)}\right)^2 + \left(x_3 - x_3^{(0)}\right)^2 < \varepsilon^2\right\}$$

die Kugel mit Radius ε um $x^{(0)}$.

Definition 9.27 Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Dann heißt M

(i) *offen*, falls für jedes $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subset M$,

(ii) *abgeschlossen*, falls $M^c = X \setminus M$ offen ist,

(iii) *kompakt*, falls M abgeschlossen und relativ kompakt ist.

Beispiel 9.28 1. In jedem metrischen Raum (X, d) sind X und $\emptyset$ offen und abgeschlossen.
2. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann sind die Intervalle (a, b), $(-\infty, b)$ und (a, ∞) offen in $\mathbb{R}$ und die Intervalle $(-\infty, b]$ sowie $[a, \infty)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Der folgende Satz liefert Charakterisierungen der Abgeschlossenheit bzw. der Kompaktheit mittels Folgen.

Satz 9.29 *Sind (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$, so gilt*

1. *M ist abgeschlossen genau dann, wenn für alle konvergenten Folgen in M auch der Grenzwert in M liegt.*
2. *M ist kompakt genau dann, wenn jede Folge in M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.*

Beweis. 1. „$\Rightarrow$“ Ist M abgeschlossen, so ist M^c offen.
Es sei (x_n) eine Folge in M mit $x_n \to x\,(n \to \infty)$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$M \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$$

(da $x_n \in U_\varepsilon(x)$ für n genügend groß). Damit ist $x \notin M^c$, d.h. $x \in M$.
„$\Rightarrow$“ Angenommen, M^c ist nicht offen. Dann existiert ein $x_0 \in M^c$ mit $U_{1/n}(x) \cap M \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Ist $x_n \in U_{1/n}(x) \cap M$, so gilt $x_n \to x_0\,(n \to \infty)$. Widerspruch.
2. „$\Rightarrow$“ Da M relativ kompakt ist, hat jede Folge in M eine konvergente Teilfolge. Nach 1. liegt der Grenzwert jeder solchen Teilfolge in M.
„$\Rightarrow$“ Offenbar ist M relativ kompakt. Ist (x_n) eine Folge in M mit $x_n \to x$, so gilt $x \in M$, da auch jede Teilfolge gegen x konvergiert. □

Ein weiterer zentraler Baustein der Analysis ist

Satz 9.30 *(Heine-Borel)*
Für $M \subset \mathbb{K}^m$ sind äquivalent:

a) M ist kompakt,

b) M ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis. Ergibt sich sofort aus S. 9.24. □

Beispiel 9.31 Sind $a = (a_1, \dots, a_m)$ und $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a_j \leq b_j$ für $1 = 1, \dots, m$, so ist

$$[a, b] := \big\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m : x_j \in [a_j, b_j]\ (j = 1, \dots, m)\big\}$$

kompakt in $\mathbb{R}^m$.
(Denn: Es sei $(x^{(n)})$ eine Folge in $[a,b]$ mit $x^{(n)} \to x$. Dann gilt $x_j^{(n)} \to x_j$ $(n \to \infty)$ für $j = 1, \ldots, m$. Aus $a_j \leq x_j^{(n)} \leq b_j$ folgt $a_j \leq x_j \leq b_n$ für $j = 1, \ldots, m$, also $x \in [a,b]$. Damit ist $[a,b]$ abgeschlossen.
Außerdem ist $[a,b]$ auch beschränkt, da für alle $x \in [a,b]$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{m} \max\big(|a_j|, |b_j|\big)$$

gilt. Nach dem Satz von Heine-Borel ist $[a,b]$ kompakt.)

10 Stetige Funktionen zwischen metrischen Räumen

Eine der wichtigsten Struktureigenschaften von Funktionen zwischen metrischen Räumen ist die Stetigkeit:

Definition 10.1 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und es sei $f : X \to Y$.
1. f heißt *stetig an der Stelle* $x_0 \in X$ (bzgl. d_X, d_Y), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon (= \delta_{\varepsilon,x_0}) > 0$ existiert mit

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \ ,$$

d. h.

$$f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)) \ .$$

2. f heißt *stetig auf der Menge* $M \subset X$, falls f stetig an jeder Stelle $x_0 \in M$ ist. Ist $M = X$, so heißt f kurz *stetig.*

Anschaulich bedeutet die Stetigkeit an einer Stelle x_0, dass die Funktionswerte $f(x)$ für x "nahe bei x_0" auch "nahe bei $f(x_0)$" liegen.
In Abschnitt 8 hatten wir bereits (Folgen-) Stetigkeit für Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, wobei $X \subset \mathbb{K}$ ist, definiert. Der folgende Satz zeigt, dass die beiden Definition harmonieren.

Satz 10.2 *Es seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *metrische Räume und* $f : X \to Y$*. Ist* $x_0 \in X$*, so sind äquivalent:*

a) f *ist stetig an der Stelle* x_0*.*

b) Für alle Folgen (x_n) *in* X *mit* $x_n \to x_0$ *gilt* $f(x_n) \to f(x_0)$*.*

Beweis.
a) $\Rightarrow$ *b)*: Es sei (x_n) eine Folge in X mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f stetig an x_0 ist existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle x mit $d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon$. Aus $x_n \to x_0$ folgt die Existenz eines $N_\varepsilon = N(\delta_\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_n, x_0) < \delta_\varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Also gilt auch $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon \, (n \geq N_\varepsilon)$.
b) $\Rightarrow$ *a)*: Angenommen, f ist unstetig an x_0. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\delta > 0$ ein x existiert mit $d_X(x, x_0) < \delta$ und $d_Y(f(x), y_0) \geq \varepsilon$. Insbesondere existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit $d_X(x_n, x_0) < 1/n$ und $d_Y(f(x_n), y_0) \geq \varepsilon$. Für die Folge (x_n) gilt damit $x_n \to x_0 \, (n \to \infty)$ und $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Widerspruch! □

Beispiel 10.3 1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $f : X \to X$ definiert durch $f(x) := x$ $(x \in X)$ (d. h. $f = \mathrm{id}_X$). Dann ist f stetig (bzgl. der Metriken $d = d_X = d_Y$).
2. Es sei $(X, d_X) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ und es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \in \{1/k : k \in \mathbb{N}\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist f stetig an x_0 genau dann, wenn $x_0 \notin \{1/k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.
(Denn: Es sei $x_0 \neq 0$ und $x_0 \neq 1/k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $\delta (= \delta_{x_0}) > 0$ so, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Insbesondere ist damit f stetig an x_0.
Ist $x_0 = 0$, so gilt für $x_n = 1/n$ einerseits $x_n \to 0$ und andererseits $f(x_n) = 1 \to 1 \neq 0 = f(0)$.
Ist $x_0 = 1/k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt für $x_n = 1/k + \sqrt{2}/n$ einerseits $x_n \to 1/k$ und andererseits $f(x_n) = 0 \to 0 \neq 1 = f(1/k)$.)

Der folgende Satz macht deutlich, wie Stetigkeit und Offenheit bzw. Abgeschlossenheit zusammenhängen.

Satz 10.4 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und es sei $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:*

a) f ist stetig.

b) Für alle offenen Mengen $\mathcal{O} \subset Y$ ist $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen in X.

c) Für alle abgschlossenen Mengen $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $\mathcal{O} \subset Y$ offen, und es sei $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Dann ist $y := f(x) \in \mathcal{O}$. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(y) \subset \mathcal{O}$. Da f stetig an x ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(y)$, also $f(U_\delta(x)) \subset \mathcal{O}$. Dies impliziert wiederum $U_\delta(x) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$ und damit ist $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen.

b) $\Rightarrow$ a): Es sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\mathcal{O} := U_\varepsilon(f(x))$ offen in Y, und damit nach Voraussetzung auch $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen in X. Da $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$, d. h. $f(U_\delta(x)) \subset f(f^{-1}(\mathcal{O})) \subset \mathcal{O}$. Also ist f stetig an x.

Die Äquivalenz von b) und c) ergibt sich durch Komplementbildung (man beachte dabei: für $M \subset Y$ ist $f^{-1}(M^c) = (f^{-1}(M))^c$.) □

Bemerkung 10.5 Für Bildmengen gilt eine S. 10.4 entsprechende Aussage i. A. nicht! Ist etwa $(X, d_X) = (Y, d_Y) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ und $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, so ist für die offene Menge $\mathbb{R}$

$$f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$$

nicht offen. Ist $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$, so ist für die abgeschlossene Menge $\mathbb{R}$

$$g(\mathbb{R}) = (-1, 1) \ ,$$

nicht abgeschlossen.

Anders als Offenheit oder Abgeschlosssenheit überträgt sich Kompaktheit unter stetigen Funktionen auf Bildmengen.

Satz 10.6 *Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Dann gilt: Ist $K \subset X$ kompakt , so ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt.*

Beweis. Es sei (y_n) eine Folge in $f(K)$. Dann existieren $x_n \in K$ mit $y_n = f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Da K kompakt ist, existieren nach S. 9.29.2 ein $x \in K$ und eine Teilfolge (x_{n_j}) von (x_n) mit $x_{n_j} \to x\,(j \to \infty)$.
Da f stetig ist, folgt

$$y_{n_j} = f(x_{n_j}) \to f(x) \in f(K) \qquad (j \to \infty) \ .$$

Wieder nach S. 9.29.2 ist $f(K)$ kompakt. □

Für reellwertige Funktionen hat der Satz eine wichtige Konsequenz. Um diese formulieren zu können, brauchen wir eine Definition.

Definition 10.7 Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, und es sei $f : X \to \mathbb{R}$. Ferner sei $M \subset X$.

1. Man sagt, f hat ein *Maximum* bzgl. M, falls $\max\limits_M f(x) := \max f(M)$ existiert. Ist $x_0 \in M$ so, dass $f(x_0) = \max\limits_M f(x)$ gilt, d. h. ist

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in M \ ,$$

so sagt man, f hat ein Maximum bzgl. M *an* x_0.

2. Man sagt, f hat ein *Minimum* bzgl. M, falls $\min\limits_M f(x) := \min f(M)$ existiert. Ist $x_0 \in M$ so, dass $f(x_0) = \min\limits_M f(x)$ gilt, d. h. ist

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in M \ ,$$

so sagt man, f hat ein Minimum bzgl. M *an* x_0.

Ist $X = M$ so spricht man auch von *absolutem* (oder *globalem*) Maximum bzw. Minimum.

Beispiel 10.8 Es sei $X = \mathbb{R}$. Ist $f(x) := x^2$ ($x \in \mathbb{R}$), so hat f an $x_0 = 0$ ein absolutes Minimum, aber f hat kein absolutes Maximum. Ist $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$), so ist g beschränkt, aber g hat weder ein absolutes Maximum noch ein absolutes Minimum.

Satz 10.9 *Es seien (X, d_X) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $K \subset X$ kompakt, so hat f ein Maximum und ein Minimum bzgl. K, d. h. es existieren $x_1, x_2 \in K$ mit*

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \qquad \text{für alle} \quad x \in K\ .$$

Beweis. Nach S. 10.6 ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also auch beschränkt und abgeschlossen. Damit existieren $\max f(K)$ und $\min f(K)$ ([Ü]). □

Beispiel 10.10 Es sei $X = \mathbb{R}$ und $f(x) := x^2$ ($x \in \mathbb{R}$). Dann ist

$$f(a) = f(-a) = \max_{[-a,a]} f(x)$$

d. h. f hat an a und $-a$ Maxima bzgl. $[-a, a]$.

Bemerkung 10.11 1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Wie in B. 8.2 ergibt sich aus den entsprechenden Grenzwertsätzen für Folgen und S. 10.2: Sind $f, g : X \to \mathbb{K}$ stetig an x_0, so sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und (falls definiert) f/g stetig an x_0.
2. Aus S. 10.2 ergibt sich auch leicht: Sind (X, d_X), (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume, ist $f : X \to Y$ stetig an x_0 und ist $g : Y \to Z$ stetig an $f(x_0)$, so ist auch $g \circ f$ stetig an x_0.

Im Allgemeinen ist die Umkehrfunktion einer stetigen, bijektiven Funktion nicht stetig ([Ü]). Als weitere sehr elegante Anwendung von S. 10.6 erhält man jedoch:

Satz 10.12 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und es sei X* **kompakt**. *Ist $f : X \to Y$ bijektiv und stetig, so ist auch Y kompakt und $f^{-1} : Y \to X$ stetig.*

Beweis. Zunächst ist $Y = f(X)$ nach S. 10.6 kompakt.
Wir beweisen: f^{-1} ist stetig. Dazu sei $A \subset X$ abgeschlossen. Nach S. 10.4 reicht es zu zeigen, dass $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist.

Da Teilmengen relativ kompakter Mengen wieder relativ kompakt sind, und da A abgeschlossen ist, ist A kompakt. Also ist $f(A) \subset Y$ kompakt nach S. 10.6 und damit insbesondere abgeschlossen. □

Eine weitere wichtige Eigenschaft stetiger Funktionen auf kompakten Mengen ist die gleichmäßige Stetigkeit:

Definition 10.13 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und es sei $f : X \to Y$. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ so existiert, dass

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in X \text{ mit } d_X(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon \ .$$

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass jede gleichmäßig stetige Funktion auch stetig ist. Das folgende Beispiel zeigt, dass die Stetigkeit i. A. nicht die gleichmäßige Stetigkeit impliziert.

Beispiel 10.14 Es sei $f : R \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2\,(x \in \mathbb{R})$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig stetig.
(Es sei $\varepsilon = 1$, und es sei $\delta > 0$ beliebig. Wir wählen $x_1 = 1/\delta, x_2 = 1/\delta + \delta/2$. Dann ist $|x_1 - x_2| = \delta/2 < \delta$, aber

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| > 2/\delta \cdot \delta/2 = 1 = \varepsilon \ .$$

Folglich ist f nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.)

Es gilt allgemein

Satz 10.15 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Ist X* **kompakt** *und ist $f : X \to Y$ stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen nicht. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei Punkte $x_n, y_n \in K$ existieren mit

$$d_X(x_n, y_n) < 1/n \qquad \text{und} \quad d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \ .$$

Da X (relativ) kompakt ist, besitzt die Folge (x_n) eine Teilfolge $(x_{n_j})_j$ mit $x_{n_j} \to x$. Damit gilt auch

$$d_X(x, y_{n_j}) \leq d_X(x, x_{n_j}) + d_X(x_{n_j}, y_{n_j}) \to 0 \qquad (n \to \infty) \ .$$

d. h. $y_{n_j} \to x$ $(j \to \infty)$. Also folgt auf Grund der Stetigkeit von f an der Stelle x

$$\varepsilon \leq d_Y(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \leq d_Y(f(x_{n_j}), f(x)) + d_Y(f(x), f(y_{n_j})) \to 0 \quad (j \to \infty) \ .$$

Widerspruch! □

Wir wollen nun das wichtige Konzept des Funktionsgrenzwertes einführen. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff des Häufungspunktes.

Definition 10.16 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *Häufungspunkt* (von X), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$ mit $0 < d(x, x_0) < \varepsilon$ existiert.

Beispiel 10.17 Es sei $X = \{1/k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ und $d = d_{|\cdot|}$. Dann ist 0 Häufungspunkt.

Definition 10.18 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $x_0 \in X$ ein Häufungspunkt. Ferner sei $X_0 := X \setminus \{x_0\}$ und $f : X_0 \to Y$. Wir sagen, *f hat an x_0 einen (Funktions-) Grenzwert*, falls ein $y_0 \in Y$ mit folgender Eigenschaft existiert: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit

$$d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X_0 \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon .$$

In diesem Fall heißt y_0 *(Funktions-)Grenzwert* von f an x_0 und wir schreiben

$$f(x) \to y_0 \qquad (x \to x_0) .$$

Ist $g : X \to Y$, so sagt man, dass g an x_0 den *(Funktions-)Grenzwert* y_0 hat, falls dies für $f := g_{|X_0}$ gilt. Auch in diesm Fall schreiben wir

$$g(x) \to y_0 \qquad (x \to x_0) .$$

(Man beachte, dass der Wert $g(x_0)$ dabei keine Rolle spielt!)

Bemerkung 10.19 1. Man sieht leicht, dass höchstens ein Grenzwert existiert (wichtig: x_0 ist Häufungspunkt). Wir schreiben im Falle der Existenz auch

$$\lim_{x \to x_0} f(x) := y_0 .$$

2. Aus den entsprechenden Definitionen ergibt sich unmittelbar: Sind x_0 und f wie in D. 10.18, so gilt $f(x) \to y_0$ genau dann, wenn die Funktion $f_0 : X \to Y$, definiert durch

$$f_0(x) = \begin{cases} y_0, & \text{falls} \quad x = x_0 \\ f(x), & \text{falls} \quad x \neq x_0, \end{cases}$$

stetig an x_0 ist. Insbesondere gilt für Häufungspunkte x_0 damit: Ist $g : X \to Y$, so ist g stetig an x_0 genau dann, wenn $g(x) \to g(x_0)$ $(x \to x_0)$.
(Aus der Definition der Stetigkeit folgt zudem sofort: Ist x_0 kein Häufungspunkt, so ist g stets stetig an x_0.)

3. Aus 2. ergibt sich in Verbindung mit S. 10.2 auch eine Charakterisierung des Grenzwertes mittels Fogenkonvergenz:
Unter den Bedingungen von D. 10.18 gilt

$$f(x) \to y_0 \quad (x \to x_0)$$

genau dann, wenn für alle Folgen (x_n) in X_0 (wichtig!) mit $x_n \to x_0$ auch $f(x_n) \to y_0$ $(n \to \infty)$ gilt.
Aus den Grenzwertsätzen für Folgen erhalten wir damit auch: Sind $f, g : X_0 \to \mathbb{K}$ so, dass

$$f(x) \to y_0, \quad g(x) \to z_0 \quad (x \to x_0)\ ,$$

so gilt auch

$$(f \pm g)(x) \to y_0 \pm z_0, \quad (fg)(x) \to y_0 z_0 \quad (x \to x_0)$$

und im Falle $g(x) \neq 0$ und $z_0 \neq 0$ auch

$$(f/g)(x) \to y_0/z_0 \quad (x \to x_0)\ .$$

Beispiel 10.20 Es sei $(X, d) = (\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$. 1. Dann gilt

$$\frac{e^z - 1}{z} \to 1 \quad (z \to 0)$$

(Denn: Für $0 < |z| < 1$ ist

$$|\frac{e^z - 1}{z} - 1| = \left|\frac{1}{z}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{z^\mu}{\mu!} - 1\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\nu}{(\nu+1)!}\right| \le \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|z|^\nu}{(\nu+1)!} \le \sum_{\nu=1}^{\infty}|z|^\nu = \frac{|z|}{1-|z|}.$$

Aus B. 10.19.3 ergibt sich zunächst

$$\frac{|z|}{1-|z|} \to 0$$

und damit auch

$$\left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| \to 0\ .)$$

2. Ähnlich (oder als Anwendung von 1.) kann man zeigen ([Ü]):

$$\frac{\sin z}{z} \to 1 \quad \text{und} \quad \frac{1 - \cos z}{z} \to 0 \qquad (x \to 0)\ .$$

Bemerkung und Definition 10.21 Es seien $M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in M$, (Y, d) ein metrischer Raum und $f : M \to Y$ (oder $f : M \setminus \{x_0\} \to Y$).
1. Man sagt, f hat an x_0 einen *linksseitigen Grenzwert*, falls der Grenzwert $y_0^- = \lim\limits_{x \to x_0} f_{|M \cap (-\infty, x_0)}(x)$ existiert. Man schreibt dann auch

$$f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x) := y_0^-\ .$$

Entsprechend hat f an x_0 einen *rechtsseitigen Grenzwert*, falls $y_0^+ = \lim\limits_{x \to x_0} f_{|M\cap(x_0,\infty)}(x)$ existiert. Man schreibt dann auch

$$f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x) := y_0^+ .$$

Es gilt damit: Ist x_0 Häufungspunkt von $M \cap (-\infty, x_0)$ und $M \cap (x_0, \infty)$, so existiert $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ genau dann, wenn $f(x_0^+)$ und $f(x_0^-)$ existieren und

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) = y_0$$

erfüllt ist. Existieren $f(x_0^+)$ und $f(x_0^-)$ und ist $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$, so heißt x_0 *Sprungstelle* von f.
2. Ist M ein nach oben unbeschränkt, so schreiben wir

$$y_0 = \lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{oder} \quad f(x) \to y_0 \quad (x \to \infty)$$

falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $R_\varepsilon > 0$ so existiert, dass

$$d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in M,\ x > R_\varepsilon \ .$$

Entsprechend definiert man $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, falls M nach unten unbeschränkt ist.

Beispiel 10.22 1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad x = 0 \\ -1, & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Dann gilt

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \qquad f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Damit ist x_0 eine Sprungstelle von f und $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht.
2. Es sei $M = [0, \infty)$ und

$$f(x) := \begin{cases} \sin(\pi/x) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Dann existiert $f(0^+)$ nicht.
(Denn: Für $x_n = 1/(n + 1/2)$ gilt $0 < x_n \to 0$, aber $(f(x_n)) = ((-1)^n)$ ist divergent.)
3. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Dann existiert für **kein** x_0 in $\mathbb{R}$ der (rechts- oder linksseitige) Grenzwert!
(Denn: Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ und ist $\delta > 0$, so existieren x_1, x_2 mit $x_0 < x_j < x_0 + \delta$ $(j = 1, 2)$ sowie $f(x_1) = 1$ und $f(x_2) = 0$ (nach B. 4.11 und [Ü]). Hieraus folgt, dass kein rechtsseitiger Grenzwert an x_0 existiert. Entsprechend sieht man, dass kein linksseitiger Grenzwert existiert.)
Insbesondere ist damit f unstetig an allen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$.
4. Es gilt

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} 1/x = 0 \,.$$

Es ist klar, dass i. A. monotone Funktionen nicht überall stetig sind (etwa sign). Tatsächlich können unedlich viele Sprungstellen auftreten (auch auf endlichen Intervallen), wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 10.23 Es sei $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{n} \qquad \text{für } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \text{ und } n \in \mathbb{N}\,.$$

Dann ist f monoton wachsend auf $(0, 1)$ und jede Stelle $x_n = 1/n\,(n \in \mathbb{N})$ ist eine Sprungstelle. Also hat f abzählbar unendlich viele Sprungstellen.

Der folgende Satz zeigt, dass monotone Funktionen an vielen Stellen stetig sind, und dass als Unstetigkeitsstellen nur Sprungstellen in Frage kommen.

Satz 10.24 *Es sei $I \neq \emptyset$ ein offenes Intervall, und es sei $f : I \to \mathbb{R}$ monoton (wachsend oder fallend). Dann ist f stetig bis auf höchstens abzählbar viele Sprungstellen. Außerdem gilt für alle $x_0 \in I$*

$$f(x_0^-) \le f(x_0) \le f(x_0^+) \qquad \textit{falls } f \textit{ monoton wächst}$$

und

$$f(x_0^-) \ge f(x_0) \ge f(x_0^+) \qquad \textit{falls } f \textit{ monoton fällt}\,.$$

Beweis. O. E. sei f monoton wachsend (ansonsten betrachte man $-f$).
1. Wir zeigen: Ist $x_0 \in I$, so existiert $f(x_0^+) \in \mathbb{R}$ und es gilt $f(x_0^+) \ge f(x_0)$:
Da $f(x) \ge f(x_0)$ für alle $x > x_0$ gilt, existiert

$$y_0 := \inf\{f(x) : x \in I,\ x > x_0\}$$

und es gilt $y_0 \ge f(x_0)$. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $x_\varepsilon > x_0$ mit $f(x_\varepsilon) < y_0 + \varepsilon$. Mit $\delta_\varepsilon := x_\varepsilon - x_0$ gilt dann für alle x mit $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon = x_\varepsilon$

$$y_0 \le f(x) \le f(x_\varepsilon) < y_0 + \varepsilon$$

Damit ist $f(x_0^+) = y_0$.
Entsprechend zeigt man die Existenz von $f(x_0^-) \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0^+) \geq f(x_0)$.
2. Nach 1. können als Unstetigkeitsstellen nur Sprungstellen auftreten. Wir zeigen, dass höchstens abzählbar viele solche existieren. Dazu setzen wir

$$S(f) := \{x \in I : x \text{ Sprungstelle von } f\} .$$

Ist $S(f)$ leer, so ist die Behauptung klar. Es sei also $S(f) \neq \emptyset$. Für $x \in S(f)$ setzen wir

$$I(x) := (f(x^-), f(x^+)) .$$

Dann folgt aus der Monotonie von f für $x_1, x_2 \in S(f)$ mit $x_1 < x_2$ (falls existent):

$$I(x_1) \cap I(x_2) = \emptyset$$

(da $f(x_1^+) \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq f(x_2^-)$). Nach B. 4.11 ist $I(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, also können wir ein $\varphi(x) \in I(x) \cap \mathbb{Q}$ wählen. Es gilt dann $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ für $x_1 \neq x_2$. Also ist φ eine bijektive Abbildung von $S(f)$ nach $W(\varphi) \subset \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist auch $W(\varphi)$ und damit auch $S(f)$ abzählbar. □

Bemerkung 10.25 Ist I ein beliebiges Intervall und ist $f : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend (bzw. fallend), so gilt zusätzlich: Ist der rechte Randpunkt b in I, so existiert $f(b^-)$, und es gilt $f(b^-) \leq f(b)$ (bzw. $\geq$); Ist der linke Randpunkt a in I, so existiert $f(a^+)$ und es gilt $f(a^+) \geq f(a)$ (bzw. $\leq$).

Definition 10.26 Sind (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $f : X_0 \to \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$f(x) \to \infty \qquad (\text{bzw. } f(x) \to -\infty) \qquad (x \to x_0),$$

falls für alle $R > 0$ ein $\delta_R > 0$ so existiert, dass

$$f(x) > R \qquad (\text{bzw. } f(x) < -R)$$

für alle $x \in X_0$ mit $d(x, x_0) < \delta_R$.
Gilt Entsprechendes in der Situation von B./D. 10.21, so schreiben wir dann auch

$$f(x) \to \infty \qquad (\text{bzw. } f(x) \to -\infty)$$

für $x \to x_0^\pm$ oder $x \to \pm\infty$.
So gilt etwa

$$\ln x \to -\infty \qquad (x \to 0^+)$$

und

$$e^x \to \infty \qquad (x \to \infty).$$

11 Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Wir haben schon früher gesehen, dass wichtige elementare Funktionen wie die Exponentialfunktion über gewisse Grenzwerte definiert sind. Ziel ist es nun, allgemeine Strukturaussagen über Funktionen zu machen, die sich als Grenzwerte von sog. Funktionenfolgen oder Funktionenreihen ergeben.

Definition 11.1 1. Es sei X eine beliebige Menge, $X \neq \emptyset$, und es sei (Y, d) ein metrischer Raum.

1. Sind $f_n : X \to Y$ Funktionen, so nennt man die Folge $(f_n)_n$ eine *Funktionenfolge*. Die Funktionenfolge (f_n) heißt *punktweise konvergent* auf der Menge $M \subset X$, falls für alle $x \in M$ die Folge $(f_n(x))$ in Y konvergiert. Die Funktion $f : M \to Y$ mit $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ heißt *Grenzfunktion* der Folge (f_n) (auf M).

2. Sind $a_\nu : X \to \mathbb{K}$ (oder auch allgemeiner $a_\nu : X \to E$, wobei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum ist) Funktionen, so heißt die Funktionenfolge (s_n) mit
$$s_n(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) \qquad (x \in X, n \in \mathbb{N}_0)$$
eine *Funktionenreihe*. Wir schreiben wieder $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ (oder $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x)$). Die Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt *punktweise konvergent* auf $M \subset X$ falls (s_n) auf M punktweise konvergiert. Wir verwenden (wie bei Zahlenreihen) das Symbol $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ dann auch wieder für die Grenzfunktion.

Natürlich definiert man entsprechend Funktionenreihen der Form $\sum\limits_{\nu=\nu_0}^{\infty} a_\nu(x)$ auch für allgemeine $\nu_0 \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 11.2 1. Wir betrachten die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f_n(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}) \,.$$
Dann gilt
$$f_n(x) \to \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \; x \in (-1,1) \\ 1 & , \text{ falls } \; x = 1 \end{cases} \,,$$
d. h. (f_n) konvergiert punktweise auf $(-1, 1]$ und die Grenzfunktion $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \in (-1,1) \\ 1 & , \; x = 1 \end{cases} \,.$$

2. Es seien $a_\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$a_\nu(z) = \frac{1}{\nu^z} \qquad (z \in \mathbb{C},\, \nu \in \mathbb{N}) .$$

Dann ist die Funktionenreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z}$$

auf $M = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ punktweise konvergent ([Ü]). Wir definieren $\zeta : M \to \mathbb{C}$ durch

$$\zeta(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z} \qquad (z \in M) .$$

Die Funktion ζ heißt *(Riemann'sche) Zetafunktion.*

Das erste Beispiel zeigt insbesondere, dass die Grenzfunktion unstetig (an $x_0 = 1$) ist, obwohl alle Folgelieder f_n stetige Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ sind. Da wir an Aussagen der Form "f_n stetig ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow f$ stetig" interessiert sind, führen wir einen "strengeren" Konvergenzbegriff ein, mit dessen Hilfe eine solche Aussage möglich wird.

Definition 11.3 1. Es sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, und es sei (Y, d) ein metrischer Raum.

1. Sind $f_n : X \to Y$ Funktionen ($n \in \mathbb{N}$), so heißt die Funktionenfolge (f_n) *gleichmäßig konvergent* auf der Menge $M \subset X$ (gegen die Grenzfunktion $f : M \to Y$), falls

$$\sup_{x \in M} d(f(x), f_n(x)) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

(wobei $\sup A := \infty$, falls A nach oben unbeschränkt ist). Wir schreiben dann

$$f_n \to f \qquad (n \to \infty) \quad \text{gleichmäßig auf } M$$

oder auch

$$f_n(x) \to f(x) \qquad (n \to \infty) \quad \text{gleichmäßig auf } M .$$

2. Eine Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt *gleichmäßig konvergent* auf $M \subset X$, falls die Funktionenfolge (s_n) mit $s_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)$ gleichmäßig auf M konvergiert.

Bemerkung 11.4 Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf M, so gilt insbesondere $f_n(x) \to f(x)\,(n \to \infty)$ für alle $x \in M$, d. h. (f_n) konvergiert auf M auch punktweise gegen f ("gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz").

Gleichmäßige Konvergenz bedeutet, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon \text{ und alle } x \in M \ .$$

Der Unterschied zur punktweisen Konvergenz liegt darin, dass N_ε unabhängig von x gewählt werden kann. Punktweise Konvergenz bedeutet: Für alle $x \in M$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ mit $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_{\varepsilon,x}$.

Beispiel 11.5 Wir betrachten noch einmal $f_n(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$) (vgl. B. 11.2.1). Ist $M = [-1/2, 1/2]$, so gilt

$$\sup_M |f_n(x) - f(x)| = 1/2^n \to 0 \qquad (n \to \infty) \ .$$

Damit gilt

$$x^n \to 0 \qquad \text{gleichmäßig auf} \quad [-1/2, 1/2] \ .$$

Andererseits ist für $M = [0, 1)$

$$\sup_M |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1)} x^n = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Also ist (f_n) nicht gleichmäßig konvergent auf $[0, 1)$.

Wir kommen nun zu dem bereits angedeuteten Ergebnis über die "Vererbung" der Stetigkeit auf die Grenzfunktion.

Satz 11.6 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und es seien $f_n : X \to Y$ Funktionen. Dann gilt: Sind unendlich viele der Funktionen f_n stetig an der Stelle $x_0 \in X$ und existiert ein $r > 0$ so, dass $f_n \to f$ gleichmäßig auf $U_r(x_0)$, so ist auch die Grenzfunktion $f : U_r(x_0) \to Y$ stetig an x_0.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f auf $M := U_r(x_0)$ existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3 \qquad (n \geq N, \ x \in M) \ .$$

Ist $m \geq N$ so, dass f_m stetig an x_0 ist, so existiert ein $\delta_\varepsilon \in (0, r]$ so, dass

$$d_Y(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon/3 \qquad \text{für alle } x \in U_{\delta_\varepsilon}(x_0) \ .$$

Damit ist auch

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x_0)) &\leq d_Y(f(x), f_m(x)) + d_Y(f_m(x), f_m(x_0)) + d_Y(f_m(x_0), f(x_0)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \ . \end{aligned}$$

für alle $x \in U_{\delta_\varepsilon}(x_0)$. □

Es stellt sich die Frage, wie man gleichmäßige Konvergenz ggfs. nachweisen kann. Aus dem Weierstrass-Kriterium (S. 7.11) ergibt sich unmittelbar

Satz 11.7 *(Weierstraßsches Majorantenkriterium für Funktionenreihen)*
Es seien $M \neq \emptyset$ eine Menge und $a_\nu : M \to \mathbb{K}$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$. Ferner seien $b_\nu \geq 0$ so, dass $||a_\nu||_\infty = \sup\limits_{x \in M} |a_\nu(x)| \leq b_\nu$ für ν genügend groß. Dann gilt: Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu < \infty$, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ gleichmäßig auf M.

Beweis. Nach S. 7.11 ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x)$ für alle $x \in M$ konvergent und es gilt für n genügend groß (mit $s(x) := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x)$)

$$\sup_{x \in M} |s(x) - s_n(x)| = \sup_{x \in M} \Big| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu(x) \Big| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu \to 0 \quad (n \to \infty) .$$

□

Beispiel 11.8 (Vgl. B. 11.2.2) Für $\alpha > 1$ sei

$$M := M_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \alpha\} .$$

Dann ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu^z$ gleichmäßig konvergent auf M.
(Denn: Für alle $z \in M$ und alle $\nu \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_\nu(z)| = \frac{1}{\nu^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{\nu^\alpha}$$

und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu^\alpha$ ist konvergent. Also ergibt sich die Behauptung aus S. 11.7.)
Da $z \to 1/\nu^z$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ stetig auf $\mathbb{C}$ ist, folgt aus S. 11.6 die Stetigkeit der Zetafunktion auf

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\} .$$

(Man beachte: Ist $\operatorname{Re}(z_0) > 1$, so gilt für $r := (\operatorname{Re}(z_0) - 1)/2$

$$U_r(z_0) \subset M_{1+r} .)$$

Wir untersuchen jetzt eine Klasse besonders wichtiger Funktionenreihen, sog. Potenzreihen. Hier sind die Teilsummen s_n Polynome vom Grad $\leq n$, also von besonders einfacher Struktur.

Definition 11.9 1. Es sei $z_0 \in \mathbb{K}$ und es sei $(a_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann heißt die Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ (also die Funktionenfolge (s_n) gegeben durch

$s_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu(z-z_0)^\nu$) auf $\mathbb{K}$ eine *Potenzreihe* (mit der *Entwicklungsmitte* z_0 und der *Koeffizientenfolge* (a_ν)).

2. Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ eine Potenzreihe, so heißt

$$R := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}} \in [0, \infty]$$

Konvergenzradius der Potenzreihe (wobei $1/\infty := 0$ und $1/0 := \infty$ gesetzt ist). Im Falle $R > 0$ heißt weiterhin $U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < R\}$ *Konvergenzkreis* (im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ meist *Konvergenzintervall*) der Potenzreihe (wobei $U_\infty(z_0) = \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < \infty\} = \mathbb{K}$ ist).

Beispiel 11.10 1. Für die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ (also die geometrische Reihe) gilt $z_0 = 0$ und $a_\nu \equiv 1$ ($\nu \in \mathbb{N}_0$), also ist $R = 1$. Hier konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ absolut im Konvergenzkreis $U_1(0) = \{z : |z| < 1\}$ und divergiert für alle z mit $|z| > 1$. Ferner gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1) .$$

2. Für die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ ist $z_0 = 0$ und $a_\nu = \frac{1}{\nu!}$ ($\nu \in \mathbb{N}_0$). Hier ist $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}|a_\nu|^{1/\nu} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu!}} = 0$ (warum?), d. h. $R = \infty$. Bekanntlich konvergiert die Potenzreihe absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} = e^z .$$

Über das Konvergenzverhalten allgemeiner Potenzreihen gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 11.11 *(Cauchy-Hadamard)*
Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R. *Dann gilt:*

1. *Ist* $R = \infty$, *so konvergiert die Potenzreihe absolut für alle* $z \in \mathbb{K} = U_\infty(z_0)$.
2. *Ist* $0 < R < \infty$, *so konvergiert die Potenzreihe absolut für alle* $z \in U_R(z_0)$ *und divergiert für alle* $z \in \mathbb{K}$ *mit* $|z - z_0| > R$.
3. *Ist* $R = 0$, *so divergiert die Potenzreihe für alle* $z \in \mathbb{K} \setminus \{z_0\}$.

Beweis. Es gilt für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$ und $z \neq z_0$

$$|a_\nu(z-z_0)^\nu|^{1/\nu} = |a_\nu|^{1/\nu} \cdot |z-z_0| \,,$$

also ist im Falle $R > 0$

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} |a_\nu(z-z_0)^\nu|^{1/\nu} = \frac{1}{R}|z-z_0| \,.$$

Damit ergeben sich 1. und 2. sofort aus dem Wurzelkriterium (S. 7.15).
Ist $R = 0$ (d.h. $(|a_\nu|^{1/\nu})$ ist unbeschränkt), so ist auch $(|a_\nu(z-z_0)^\nu|^{1/\nu})$ unbeschränkt und folglich ist $(a_\nu(z-z_0)^\nu)_\nu$ insbesondere keine Nullfolge. Damit ergibt sich auch 3.
□

Bemerkung 11.12 Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge des Konvergenzkreises $U_R(z_0)$.
(Denn: Ist $K \subset U_R(z_0)$ kompakt, so existiert hat die stetige Funktion $z \mapsto |z-z_0|$ nach S. 10.9 ein Maximum auf K, d. h. es gibt ein $z_1 \in K$ mit $|z_1 - z_0| = \sup\limits_{z\in K} |z-z_0|$.
Damit gilt für alle ν

$$\sup_{z\in K} |a_\nu(z-z_0)^\nu| = |a_\nu| \cdot |z_1 - z_0|^\nu =: b_\nu \,.$$

Da nach S. 11.11 die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergiert, folgt die gleichmäßige Konvergenz auf K aus dem Weierstraßschen Majorantenkriterium.)
Ist $A : U_R(z_0) \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$A(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu \,,$$

so ist A stetig.
(Denn: Es ein $z_1 \in U_R(z_0)$. Wir betrachten

$$K := \{z \in \mathbb{K} : |z - z_1| \leq (R - |z_1 - z_0|)/2\}$$

im Falle $R < \infty$ bzw. $K := \{z \in \mathbb{K} : |z - z_1| \leq 1\}$ im Falle $R = \infty$. Dann ist $K \subset U_R(z_0)$ kompakt. Also ist die Potenzreihe gleichmäßig konvergent auf K. Da alle Teilsummen (als Polynome) stetig auf $\mathbb{K}$ sind, ist auch A nach S. 11.6 stetig an der Stelle z_1.)
I. A. liegt jedoch keine gleichmäßige Konvergenz auf $U_R(z_0)$ vor: Wir betrachten dazu noch einmal die geometrische Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$. Es gilt für alle n

$$\sup_{|z|<1} \left|\frac{1}{1-z} - s_n(z)\right| \geq \sup_{0<x<1} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} x^\nu = \sup_{0<x<1} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty \,.$$

Am Rande ihres Konvergenzkreises können Potenzreihen ein sehr kompliziertes Verhalten zeigen. Da ist es schon sehr beruhigend, ggfs. auf folgendes Resultat zurückgreifen zu können. (Die Beschränkung auf die Entwicklungsmitte $z_0 = 0$ und den Konvergenzradius 1 ist dabei unwesentlich.)

Satz 11.13 *(Abelscher Grenzwertsatz)*
Es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* 1*. Ferner sei die Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *konvergent. Ist*

$$A(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad (|z| < 1)\ ,$$

so gilt

$$\lim_{x\to 1^-} A(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\ .$$

Beweis. Wir setzen

$$s := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\ , \quad s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\ .$$

Da (nach S. 11.11) für $|z| < 1$ die Potenzreihen

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$$

beide absolut konvergieren, gilt nach S. 7.20

$$\begin{aligned} A(z)\cdot\frac{1}{1-z} &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu\ , \end{aligned}$$

d. h.

$$A(z) = (1-z)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu\ .$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Wegen $1 = (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$ erhalten wir für $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} |A(x) - s| &= |(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty}(s_\nu - s)x^\nu| \leq \\ &\leq (1-x)\sum_{\nu=0}^{N-1}|s_\nu - s|x^\nu + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{\nu=N}^{\infty} x^\nu \\ &\leq (1-x)\sum_{\nu=0}^{N-1}|s_\nu - s|x^\nu + \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Weiter existiert ein $\delta = \delta(N_\varepsilon) > 0$ so, dass

$$(1-x)\sum_{\nu=0}^{N-1} |s_\nu - s| < \varepsilon/2$$

für alle x mit $1-\delta < x < 1$. Also gilt

$$|A(x) - s| < \varepsilon \qquad \text{für} \qquad 1-\delta < x < 1\ .$$

□

Zum Abschluss kommen wir noch einmal zu allgemeinen Funktionenfolgen zurück. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für gleichmäßige Konvergenz liefert

Satz 11.14 *(Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)*
Es seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f_n : X \to Y$ Funktionen ($n \in \mathbb{N}$). Ist $M \subset X$, so ist (f_n) gleichmäßig konvergent auf M genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so existiert, dass

$$d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \qquad \textit{für alle } n, m \geq N_\varepsilon,\ x \in M\ .$$

(sog. gleichmäßige Cauchy-Bedingung).

Beweis. 1. Es gelte $f_n \to f$ gleichmäßig auf M. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{x\in M} d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geq N_\varepsilon)\ .$$

Für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ und $x \in M$ folgt dann

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq \sup_M d(f_n(x), f(x)) + \sup_M d(f(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Also ist die Cauchy-Bedingung erfüllt.

2. Es gelte die Cauchy-Bedingung. Dann ergibt sich insbesondere, dass für jedes feste $x \in M$ die Folge $(f_n(x))_n$ in (Y, d) eine Cauchy-Folge ist, Da (Y, d) vollständig ist, ist $(f_n(x))_n$ konvergent, d. h. es existiert ein $y \in Y$ mit $f_n(x) \to y\,(n \to \infty)$. Wir definieren $f : M \to Y$ durch $f(x) := y\,(x \in M)$ und zeigen: $f_n \to f$ gleichmäßig auf M.
Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$d(f_m(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n, m \geq N_\varepsilon,\ x \in M)\ .$$

Hieraus folgt für festes $n \geq N_\varepsilon$ und $x \in M$

$$d(f(x), f_n(x)) = \lim_{m\to\infty} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

(Man beachte: Es gilt für $z \in Y$ und (y_m) in Y mit $y_m \to y$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|d(y_m, z) - d(y, z)| \leq d(y_m, y) \to 0 \quad (m \to \infty) ,$$

also $d(y_m, z) \to d(y, z)$ für $m \to \infty$.)
Damit ist für alle $n \geq N_\varepsilon$

$$\sup_{x \in M} d(f(x), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

□

Bemerkung 11.15 Ist $M \neq \emptyset$ eine Menge und ist $(E, |\cdot|_E)$ ein normierter Raum, so gilt für zwei Funktionen $f, g \in B(M, E)$ (vgl. B. 9.8)

$$||f - g||_\infty = \sup_M |f(x) - g(x)|_E = \sup_M d_{|\cdot|_E}(f(x), g(x)) .$$

Also bedeutet gleichmäßige Konvergenz in diesem Fall Konvergenz bezüglich der sup-Norm $||\cdot||_\infty$, d. h. der Metrik $d_{||\cdot||_\infty}$).
Ist E ein Banachraum (also $(E, |\cdot|_E)$ vollständig), so ergibt sich aus S. 11.14, dass der Raum $(B(M, E), ||\cdot||_\infty)$ auch ein Banachraum ist.
(Denn: Es sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $B(M, E)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_M |f_n(x) - f_m(x)|_E = ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon \quad (n, m \geq N_\varepsilon) .$$

Nach S. 11.14 existiert eine Funktion $f : M \to E$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf M, d. h. $||f - f_n||_\infty \to 0$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $f \in B(M, E)$ d. h. f beschränkt ist. Dazu wählen wir zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$||f - f_N||_\infty < 1 .$$

Dann gilt für alle $x \in M$

$$|f(x)|_E \leq |f(x) - f_N(x)|_E + |f_N(x)|_E \leq 1 + ||f_N||_\infty$$

und damit ist f beschränkt.)

12 Differenzialrechnung von Funktionen einer Variablen

Um die feinere Struktur solcher Funktionen untersuchen zu können, brauchen wir einen über die Stetigkeit hinausgehenden “Glattheitsbegriff”. Grob gesagt wollen wir Funktionen definieren, deren Graph keine “Ecken” hat; d. h. Funktionen, die Tangenten an den Graph besitzen. Diese Tangenten spiegeln das Veränderungsverhalten der Funktion wider.

Die **Idee** ist folgende: Wir betrachten eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, und für Punkte $x_0, \in M$ und h so, dass $x_0 + h \in M$ die Sekanten S_h durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ in $\mathbb{R}^2$. Diese Sekanten sind festgelegt durch $(x_0, f(x_0))$ und ihre Steigung

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Für $h \to 0$ wird die Grenzgerade T, falls existent, als Tangente an den Graph im Punkt $(x_0, f(x_0))$ angesehen. Die Steigung von T ist ein Maß für die Änderung der Funktionswerte in der Nähe von x_0.

Dies fassen wir in eine exakte Definition, wobei wir allgemeinere Definitionsbereiche in $\mathbb{C}$ und komplexwertige Funktionen zulassen.

Definition 12.1 Es seien $M \subset \mathbb{K}$ und $f : M \to \mathbb{K}$. Weiter sei $x_0 \in M$ ein Häufungspunkt von M.

1. f heißt *differenzierbar* an der Stelle x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

   existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert als *Ableitung* von f an der Stelle x_0 und schreiben dafür $f'(x_0)$ (oder auch $\frac{df}{dx}(x_0)$).

2. f heißt *differenzierbar auf* $M_1 \subset M$ falls f in jedem Punkt $x \in M_1$ differenzierbar ist. Die Funktion $f' : M_1 \to \mathbb{K}$ heißt dann *Ableitung* von f (*auf* M_1).

3. *Höhere Ableitungen* von f werden rekursiv definiert: Ist $f^{(1)} := f'$ differenzierbar auf $M_2 \subset M_1$, so schreiben wir $f^{(2)} := f'' := (f')' : M_2 \to \mathbb{K}$. Ist f'' differenzierbar auf $M_3 \subset M_2$, so ist $f^{(3)} := f''' = (f'')' : M_3 \to \mathbb{K}$ u. s. w. Wir schreiben für die höheren Ableitungen stets $f^{(n)}$.

Beispiel 12.2 1. Ist $f(x) \equiv c$ $(x \in \mathbb{K})$ für eine Konstante $c \in \mathbb{K}$, so ist f differenzierbar auf $\mathbb{K}$ und es gilt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 0 \qquad (x \in \mathbb{K}) .$$

2. Für $f(x) := cx$ ($x \in \mathbb{K}$), wobei $c \in \mathbb{K}$ eine Konstante ist, gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ch}{h} = c \qquad (x \in \mathbb{C}) \ .$$

3. Für $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{K}$) gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x \qquad (x \in \mathbb{K}) \ .$$

4. (Wichtig !!) Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar auf $\mathbb{C}$ mit

$$\exp' = \exp \ .$$

(Denn. Nach B. 10.20 gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

und damit für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to e^z \qquad (h \to 0) \ .)$$

5. Die Funktion $f(x) := |x|$ ($x \in \mathbb{R}$) ist nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$, denn ist $h > 0$, so gilt

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1 \to 1 \qquad (h \to 0^+)$$

und ist $h < 0$, so gilt

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \to -1 \qquad (h \to 0^-) \ .$$

Also existiert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

nicht!

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Stetigkeit an einer Stelle i. A. **nicht** die Differenzierbarkeit an dieser Stelle impliziert. Umgekehrt implizert Differenzierbarkeit jedoch Stetigkeit, wie der zweite Teil des folgenden Satzes zeigt. Der erste Teil liefert eine wichtige Charakterisierung der Differenzierbarkeit.

Satz 12.3 *Es seien $M \subset \mathbb{K}$ und $f : M \to \mathbb{K}$. Ferner sei $x_0 \in M$ ein Häufungspunkt.*

1. *(Zerlegungsformel)*

   f ist differenzierbar an x_0 **genau dann**, *wenn gilt: Es existieren ein $c \in \mathbb{K}$ und eine Funktion $\varepsilon(= \varepsilon_{x_0,f}) : M_0 \to \mathbb{K}$ (wobei $M_0 := \{x - x_0 : x \in M\} \setminus \{0\}$) so, dass*

   $$f(x_0 + h) = f(x_0) + c \cdot h + |h|\varepsilon(h) \qquad (h \in M_0)$$

   und $\varepsilon(h) \to 0$ für $h \to 0$.

   Außerdem ist in diesem Fall $f'(x_0) = c$.

2. *Ist f differenzierbar an x_0, so ist f auch stetig an x_0.*

Beweis. 1. "$\Rightarrow$": Wir setzen für $h \in M_0$

$$\varepsilon(h) := \frac{h}{|h|} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0).$$

Dann ist

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varepsilon(h)|h|$$

(also $c = f'(x_0)$) und es gilt

$$\varepsilon(h) \to 0 \qquad (h \to 0)$$

auf Grund der Differenzierbarkeit von f an x_0.

"$\Leftarrow$": Es gilt für $x \in M,\ x \neq x_0$

$$\varepsilon(h) \cdot \frac{|h|}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - c\,.$$

Aus $\varepsilon(h) \to 0$ $(h \to 0)$ folgt

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to c \qquad (h \to 0)\,,$$

also ist f differenzierbar an x_0 mit $f'(x_0) = c$.
2. Folgt aus 1. und $c \cdot h + |h|\varepsilon(h) \to 0$ für $h \to 0$. □

Wir stellen wichtige Rechenregeln für die Differenziation zusammen.

Satz 12.4 *(Summen-, Produkt- und Quotientenregel)*
Es sei $M \subset \mathbb{K}$ und es seien $f, g : M \to \mathbb{K}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in M$. Dann gilt

1. *Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ist $\alpha f + \beta g$ differenzierbar an x_0, und es gilt*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0)\,.$$

2. *$f \cdot g$ ist differenzierbar an x_0, und es gilt*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)\,.$$

3. *Ist $g(x) \neq 0$ für $x \in M$, so ist auch f/g differenzierbar an x_0, und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.$$

Beweis. 1. Klar nach Definition der Ableitung (oder nach der Zerlegungsformel).
2. Da g differenzierbar an x_0 ist, ist g auch stetig an x_0 (S. 12.3). Damit gilt für $h \in M_0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left((fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)\right) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &\to f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\ .\end{aligned}$$

3. Es sei $h \in M_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{(1/g)\,(x_0+h)-(1/g)\,(x_0)}{h} &= \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}\left(\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h}\right) \\ &\to \frac{1}{g^2(x_0)}(-g'(x_0)) \qquad (h\to 0)\ .\end{aligned}$$

Damit ist 3. für $f \equiv 1$ bewiesen. Die Aussage für allgemeines f folgt hieraus mit der Produktregel. □

Beispiel 12.5 1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ mit $f(x) = x^n$ differenzierbar auf $\mathbb{K}$ mit

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(Denn: Für $n = 1$ gilt die Behauptung nach B. 12.2.2 (mit $0^0 := 1$).
Es gelte $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit der Produktregel (S. 12.4.2)

$$(x^{k+1})' = (xx^k)' = 1 \cdot x^k + xkx^{k-1} = (k+1)x^k \qquad (x \in \mathbb{K})\ .)$$

2. Ist $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ein Polynom, d. h. $P(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ für gewisse $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, so gilt

$$P'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu \cdot a_\nu x^{\nu-1} \qquad (x \in \mathbb{K})$$

(Folgt aus 1. und mehrfacher Anwendung von S. 12.4 1.)

Satz 12.6 *(Kettenregel)*
Es seien $M, L \subset \mathbb{K}$ und es sei $f : M \to L$. Ferner sei $g : L \to \mathbb{K}$. Ist f differenzierbar an $x_0 \in M$ und ist g differenzierbar an $y_0 := f(x_0) \in L$, so ist $g \circ f$ differenzierbar an x_0 mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)\ .$$

Beweis. Es sei $L_0 := \{y - y_0 : y \in L\}$. Nach S. 12.3 existieren Funktionen $\varepsilon_f : M_0 \to \mathbb{K}$ und $\varepsilon_g : L_0 \to \mathbb{K}$ (wobei $\varepsilon_g(0) := 0$) mit

$$\begin{aligned}f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0)h+\varepsilon_f(h)|h| \\ g(y_0+u) &= g(y_0)+g'(y_0)u+\varepsilon_g(u)|u|\end{aligned}$$

und so, dass $\varepsilon_f(h) \to 0$ $(h \to 0)$ und $\varepsilon_g(u) \to 0$ $(u \to 0)$. Hieraus folgt mit

$$u := u(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + |h|\varepsilon_f(h)$$

für $h \in M_0$

$$\begin{aligned} g\Big(f(x_0+h)\Big) - g\Big(f(x_0)\Big) &= g(y_0 + u(h)) - g(y_0) = g'(y_0)u(h) + |u(h)|\varepsilon_g(u(h)) \\ &= g'(y_0)f'(x_0)h + g'(y_0)|h|\varepsilon_f(h) + |u(h)|\varepsilon_g(u(h)) \end{aligned}$$

Da $u(h)/h \to f'(x_0)$ (und damit auch $u(h) \to 0$) für $h \to 0$, ergibt sich

$$\varepsilon(h) := g'(y_0)\varepsilon_f(h) + \varepsilon_g(u(h))|u(h)|/|h| \to 0 \qquad (h \to 0) .$$

Aus S. 12.3 folgt die Differenzierbarkeit von $g \circ f$ an x_0 sowie

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) .$$

□

Beispiel 12.7 Es sei $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$P(x) = (x^3 + 2x + 1)^5 .$$

Dann gilt $P = g \circ f$ mit $f(x) = x^3 + 2x + 1$ und $g(y) = y^5$. Also ergibt sich aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} P'(x) = g'(f(x))f'(x) &= 5(x^3 + 2x + 1)^4 \cdot (x^3 + 2x + 1)' = \\ &= 5(x^3 + 2x + 1)^4(3x^2 + 2) . \end{aligned}$$

1. Es gilt auf $\mathbb{C}$

$$\cos' = -\sin \qquad \text{und} \qquad \sin' = \cos .$$

(Denn: Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\cos'(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})' = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z$$

und für sin entsprechend.)

2. Aus 1. und der Quotientenregel folgt

$$\begin{aligned} \tan'(z) &= \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z \qquad (z \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}) \\ \cot'(z) &= -\frac{1}{\sin^2 z} = -1 - \cot^2 z \qquad (z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

3. Ist $a > 0$ fest, so gilt

$$(a^z)' = a^z \ln a \qquad (z \in \mathbb{C}) .$$

(Denn: $(a^z)' = (e^{z \cdot \ln a})' = \ln a \cdot e^{z \ln a} = \ln a \cdot a^z$.)

Satz 12.8 *(Umkehrregel)*
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei streng monoton (wachsend oder fallend) auf I. Ist f differenzierbar an $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to I$ differenzierbar an $y_0 = f(x_0)$ mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \ .$$

Beweis. Zunächst ist y_0 ein Häufungspunkt von $W(f) = D(f^{-1})$ (warum?). Für $J_0 := \{y - y_0 : y \in W(f)\} \setminus \{0\}$ und

$$h(u) := f^{-1}(y_0 + u) - f^{-1}(y_0) \qquad (u \in J_0)$$

gilt $0 \neq h(u) \to 0$ $(u \to 0)$, da f^{-1} stetig (an y_0) nach S. 8.20. Also erhalten wir

$$\frac{f^{-1}(y_0 + u) - f^{-1}(y_0)}{u} = \frac{h(u)}{f(x_0 + h(u)) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (u \to 0) \ .$$

□

Beispiel 12.9 1. Für festes $a > 0, a \neq 1$, gilt

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \qquad (x > 0) \ .$$

(Denn: Es sei $f(x) = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann ist $f^{-1}(y) = \log_a y$ $(x > 0)$. Also gilt nach der Umkehrregel und 1. mit $x = \log_a y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\ln a} \qquad (y > 0) \ .)$$

2. Es gilt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ , \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (x \in (-1, 1))$$

(Denn: Mit der Umkehrregel und 1. gilt für $x \in (-1, 1)$ mit $x = \arcsin y$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad (y \in (-1, 1)) \ .$$

Entsprechend für $\arccos x$.)
3. Es gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

([Ü])
4. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ fest gilt

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (x > 0)$$

(Denn: $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = \alpha e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.)

Wir beschäftigen uns nun mit der geometrischen Interpretation der Ableitung. Dazu definieren wir zunächst, was wir unter lokalen Extrema verstehen.

Definition 12.10 Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$. Ferner sei $x_0 \in X$.

1. Man sagt, f habe an x_0 ein *lokales* (oder auch *relatives*) *Maximum*, falls ein $\delta > 0$ existiert mit
$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in U_\delta(x_0)$$
2. Man sagt, f habe an x_0 ein *lokales* (oder auch *relatives*) *Minimum*, falls ein $\delta > 0$ existiert mit
$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in U_\delta(x_0) .$$

Eine Stelle x_0, an der ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum vorliegt, bezeichnet man als *Extremstelle* (oder *Extremum*) von f.

Es gilt folgendes einfache **notwendige** Kriterium für Extrema differenzierbarer Funktionen.

Satz 12.11 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein* **offenes** *Intervall und die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf I. Dann gilt: Ist x_0 eine Extremstelle von f, so ist*

$$f'(x_0) = 0 .$$

Beweis. O. E. liege an x_0 ein lokales Minimum vor. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Da f differenzierbar an x_0 ist, gilt

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

und

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 ,$$

d. h. $f'(x_0) = 0$. □

Bemerkung 12.12 1. Punkte x_0, an denen $f'(x_0) = 0$ ist, nennt man auch *kritische Punkte* von f.
2. Wie bereits erwähnt, liefert S. 12.11 lediglich eine notwendige Bedingung für das Auftreten lokaler Maxima oder Minima. So hat etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ an $x_0 = 0$ einen kritischen Punkt, aber an $x_0 = 0$ liegt kein lokales Extremum vor.
3. Für nicht offene Intervalle I ist die Aussage von S. 12.11 i. A. falsch. So hat etwa $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ an ± 1 (sogar globale) Maxima, aber die Ableitung ist dort $\neq 0$.

Über das Auftreten kritischer Punkte gibt foldender Satz Auskunft

Satz 12.13 *(Rolle)*
Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I und differenzierbar auf (a, b). Gilt $f(a) = f(b)$ so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Ist $f(x) \equiv f(a)$ so ist $f'(x) \equiv 0$ auf $[a, b]$.
Es sei also $f \not\equiv f(a)(= f(b))$. Nach S. 10.9 hat f absolute Maxima und Minima auf $[a, b]$. Mindestens eines davon liegt in (a, b). Nach S. 12.11 liegt dort ein kritischer Punkt vor. □

Als Folgerung erhalten wir

Satz 12.14 *(erweiterterter Mittelwertsatz)*
Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, und $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien stetig auf I und differenzierbar auf (a, b). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = (f(b) - f(a))g'(\xi) \ .$$

Insbesondere ergibt sich für $g(x) = x$ die Existenz eines $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

(klassischer Mittelwertsatz)

Beweis. Man wende den Satz von Rolle auf die Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) := f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big)g(x) \qquad (x \in I)$$

an! (Beachte: es gilt $\varphi(b) = \varphi(a) = f(a)g(b)$.) □

Wir ziehen verschiedene Folgerungen aus dem Mittelwertsatz. Dazu sei für ein Intervall I stets I^0 das Intervall I ohne die Randpunkte.

Satz 12.15 *Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf I^0.*
1. Ist $f'(x) \geq 0$ (bzw. > 0) für alle $x \in I^0$, so ist f monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend) auf I.

2. Ist $f'(x) \leq 0$ (bzw. < 0) für alle $x \in I^0$, so ist f monoton fallend (bzw. streng monoton fallend) auf I.

Beweis. 1. Es seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes für das Intervall $[x_1, x_2]$ ergibt sich mit einem $\xi \in (x_1, x_2)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0 \, ,$$

also $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ist dabei $f'(\xi) > 0$, so ist $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Entsprechend. □

Beispiel 12.16 Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad (x > 0) \, .$$

Dann ist f streng monoton wachsend.
(Denn: Es genügt zu zeigen: $g(x) := \ln f(x) = x \cdot \ln(1 + 1/x)$ ist streng monoton wachsend. Es gilt

$$g'(x) = \ln(1 + 1/x) + x \cdot \frac{1}{1 + 1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} = \ln(1 + 1/x) - \frac{1}{1 + x} > 0$$

nach S. 8.18.2, angewandt mit $1/(1 + x)$ anstelle von x.)

Bemerkung 12.17 Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{K}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf I^0. Dann ist f genau dann konstant, wenn $f'(x) \equiv 0$ auf I^0 gilt.
(Denn:
"$\Rightarrow$" Ist $f(x) \equiv c$ auf I, so gilt natürlich $f'(x) \equiv 0$ auf I^0.
"$\Leftarrow$" Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist f nach S. 12.15 monoton wachsend und monoton fallend. Also ist f konstant. In Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ergibt sich die Behauptung durch Anwendung der entsprechenden Aussagen auf $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$.)

Der folgende Satz gibt ein **hinreichendes** Kriterien für Extremstellen.

Satz 12.18 *(Vorzeichenwechsel-Kriterium)*
Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf dem Intervall I und differenzierbar auf I^0. Ferner sei $x_0 \in I$.

1. Existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$f'(x) \begin{cases} \leq 0 & \textit{für} \quad x \in I,\, x_0 < x < x_0 + \delta \\ \geq 0 & \textit{für} \quad x \in I,\, x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases} ,$$

so hat f an x_0 ein lokales Maximun.

2. Existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$f'(x) \begin{cases} \geq 0 & \textit{für} \quad x \in I,\, x_0 < x < x_0 + \delta \\ \leq 0 & \textit{für} \quad x \in I,\, x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases} ,$$

So hat f an x_0 ein lokales Minimum.

Beweis.
1. Nach S. 12.15 ist f monoton fallend auf $I \cap [x_0, x_0 + \delta)$ und monoton wachsend auf $I \cap (x_0 - \delta, x_0]$. Damit hat f an x_0 ein lokales Maximum.
2. Analog. □

Beispiel 12.19 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 .$$

Dann gilt

$$f'(x) = 6x(x+1) \begin{cases} > 0 & , \quad x \in (-\infty, -1) \\ < 0 & , \quad x \in (-1, 0) \\ > 0 & , \quad x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$\text{Also ist } f \text{ streng monoton} \left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \\ \text{wachsend} \end{array} \right\} \text{auf} \left\{ \begin{array}{l} (-\infty, -1] \\ [-1, 0] \\ [0, \infty) \end{array} \right. .$$

Anwendung von S. 12.18 zeigt, dass an 0 ein lokales Minimum und and -1 ein lokales Maximum vorliegt.

Bemerkung 12.20 Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ so, dass f'' auf I existiert. Ferner sei $x_0 \in I$ so, dass f'' stetig an x_0 ist mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt: Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f an x_0 ein lokales Minimum, und ist $f''(x_0) < 0$, so hat f an x_0 ein lokales Maximum.
(Denn: Es sei $f''(x_0) > 0$. Da f'' stetig an x_0 ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $f''(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Damit ist f' nach S. 12.15 streng monoton wachsend und $U_\delta(x_0)$. Mit $f'(x_0) = 0$ folgt

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \\ < 0 & \text{für} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases} .$$

Nach dem Vorzeichenwechsel-Kriterium hat f an x_0 ein lokales Minimum.
Entsprechendes gilt, falls $f''(x_0) < 0$ ist.)

Zum Abschluss dieses Abschnitts beschäftigen wir uns mit einer eleganten Methode um gewisse Grenzwerte auszurechnen. Damit beweisen wir

Satz 12.21 *(Regeln von de l'Hospital)*
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und die Funktionen $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq x_0$. Ferner gelte

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ *(Fall "$\frac{0}{0}$")*

oder

2. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ *(oder $-\infty$).*

Dann gilt: Aus

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to c \qquad (x \to x_0)$$

folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \qquad (x \to x_0) .$$

Beweis. 1. Es gelte 1. Durch $g(x_0) := f(x_0) := 0$ können f und g stetig nach I fortgesetzt werden. Für $u, v \in \mathbb{R}$ seien $I[u, v]$ das abgeschlossene und $I(u, v)$ das offene Intervall zwischen u und v.
Ist $x \in I$, $x \neq x_0$, so existiert nach S. 12.14 ein $\xi(x) \in I(x, x_0)$ mit

$$\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Da $\lim\limits_{x \to x_0} \xi(x) = x_0$ gilt, ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = c\,.$$

2. Es gelte o.E. $g(x) \to \infty$.
Weiter sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta_0 > 0$ mit

$$|f'(t)/g'(t) - c| < \varepsilon \quad \text{und} \quad g(t) > 0 \quad (t \in U_{\delta_0}(x_0), t \neq x_0)\,.$$

Es sei $s \in U_{\delta_0}(x_0), s \neq x_0$. Dann existiert ein $\delta \in (0, \delta_0]$ so, dass

$$|f(s)|/g(y) < \varepsilon \quad \text{und} \quad g(s)/g(y) < \varepsilon \quad (y \in U_\delta(x_0), y \neq x_0)\,.$$

Ist nun $x \in U_\delta(x_0), x \neq x_0$ gegeben, so existiert nach dem erweiterten Mittelwertsatz ein $\xi \in I(x,s)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(s) - f(x)}{g(s) - g(x)}\,.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(\frac{g(s)}{g(x)} - 1 \right) = \frac{f(s) - f(x)}{g(x)},$$

also

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(s)}{g(x)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(1 - \frac{g(s)}{g(x)} \right)\,.$$

Damit erhalten wir

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| \leq \left| \frac{f(s)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - c \right| + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{g(s)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon + \varepsilon + (|c| + \varepsilon)\varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 12.22 Die Aussage des Satzes von de l'Hospital gilt auch im Falle $c = \pm\infty$ und für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$. Die Beweise verlaufen ähnlich.

Beispiel 12.23 1. Für $f(x) = \sqrt{x} - 1$ und $g(x) = \sqrt{x-1}$ $(x > 1)$ gilt

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = 0$$

sowie

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 0\,.$$

Also ist auch
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} = 0 \,.$$
2. Es gilt für jedes feste $\alpha > 0$:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \,,$$
d. h. die Logarithmusfunktion wächst langsamer als jede (noch so kleine) positive Potenz von x.
(Denn: Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$ und
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$
also folgt die Behauptung mit S. 12.21.2.)

3. Für jedes $a > 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty \,,$$
d. h. exponentielles Wachstum ist schneller als polynomiales Wachstum.
(Denn: Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$ und damit ergibt sich durch wiederholte Anwendung von S. 12.21.2
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x (\ln a)^2}{n(n-1)x^{n-2}} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x (\ln a)^n}{n!} = \infty \,.)$$

Wir zeigen nun, dass Funktionen, die durch Potenzereihen definiert sind, stets besonders gute Glattheitseigenschaften haben.

Satz 12.24 *Es sei* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$*, und es sei* $A(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$*. Dann existieren die Ableitungen* $A^{(k)}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *im Konvergenzkreis* $U_R(z_0)$ *und es gilt*
$$A^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k) a_{\nu+k} (z-z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0)) \,.$$
Insbesondere ist
$$k! a_k = A^{(k)}(z_0) \qquad (k \in \mathbb{N}_0) \,,$$
also
$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z-z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0)) \,.$$

Beweis. 1. Wir zeigen: A ist differenzierbar auf $U_R(z_0)$ und

$$A'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu (z-z_0)^{\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) a_{\nu+1} (z-z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0)).$$

O. E. können wir $z_0 = 0$ annehmen.
Es sei $z_1 \in U_R(0)$ fest. Für $z \in U_R(0)$ gilt

$$A(z) - A(z_1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z^\nu - z_1^\nu) = (z - z_1) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \underbrace{\sum_{k=0}^{\nu-1} z_1^k z^{\nu-1-k}}_{=:\,\phi_\nu(z)}.$$

Wir wählen ein $r \in (|z_1|, R)$ und setzen $\delta := r - |z_1|$. Ist $|z - z_1| < \delta$, so ist $|z| < r$ (und $|z_1| < r$), also $|\phi_\nu(z)| \le \nu r^{\nu-1}$. Aus $\nu^{1/\nu} \to 1$ $(\nu \to \infty)$ folgt, dass auch die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu z^\nu$ den Konvergenzradius R hat. Insbesondere konvergiert damit $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu| r^{\nu-1}$ nach dem Satz von Cauchy-Hadamard. Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (S. 11.7) konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \phi_\nu(z)$ gleichmäßig auf $U_\delta(z_1)$. Folglich ist $\phi(z) := \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \phi_\nu(z)$ stetig an z_1 (S. 11.6), d. h. es gilt

$$\lim_{z \to z_1} \frac{A(z) - A(z_1)}{z - z_1} = \lim_{z \to z_1} \phi(z) = \phi(z_1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu z_1^{\nu-1}.$$

2. Durch Anwendung der gleichen Argumentation auf A' sieht man: A' ist differenzierbar auf $U_R(z_0)$ und

$$A''(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\nu+2) a_{\nu+2} (z-z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0)).$$

Induktiv erhält man: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $A^{(k-1)}$ differenzierbar auf $U_R(z_0)$ und

$$A^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+k) a_{\nu+k} (z-z_0)^\nu.$$

Die Zusatzbehauptung $k! a_k = A^{(k)}(z_0)$ ergibt sich für $z = z_0$. $\square$

Beispiel 12.25 Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & , \; z \neq 0 \\ 1 & , \; z = 0 \end{cases}$$

ist beliebg oft differenzierbar auf $\mathbb{C}$. Insbesondere folgt damit die Stetigkeit an der Stelle 0, d.h.

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

(Denn: Es gilt für $z \neq 0$

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)\nu z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{2\nu}}{(2\nu+1)!}$$

und für $z = 0$

$$f(0) = 1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} 0^{2\nu}}{(2\nu+1)!}$$

Also ist nach S. 12.24 f beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{C}$.)

13 Integralrechnung von Funktionen einer reellen Veränderlichen

Die Integralrechnung entstand ursprünglich aus der Frage nach Berechnung von Flächeninhalten. Ähnlich wie bei der Differenzialrechnung werden wir Integrale über einen gewissen Grenzprozess definieren. Dazu betrachten wir zunächst besonders einfache Funktionen, für die wir die "Fläche unter den Graphen" sehr leicht definieren können.

Definition 13.1 Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

1. Sind $I_1, \ldots, I_m \subset [a, b]$ Intervalle, so heißt

   $$Z = \{I_1, \ldots, I_m\}$$

   eine Zerlegung von $[a, b]$, falls die I_j paarweise disjunkt sind und $\bigcup\limits_{j=1}^{m} I_j = [a, b]$ gilt.

2. Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn eine Zerlegung Z von $[a, b]$ und $c_I \in \mathbb{K}$ existieren mit

   $$\varphi_{|I^0} = c_I \quad (I \in Z) \ . \tag{13.1}$$

   (Die Funktionswerte an den Intervallenden spielen keine Rolle). Eine Zerlegung Z so, dass Konstanten c_I wie in (13.1) existieren, heißt *zulässig* für φ.

Definition 13.2 Ist $\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}$ eine Treppenfunktion wie in D. 13.1.2, so setzen wir

$$\int\limits_a^b \varphi := \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx := \sum_{I \in Z} c_I \lambda(I) \ ,$$

wobei $\lambda(I)$ die Länge von I bezeichnet. Die Zahl $\int_a^b \varphi(x)dx$ heißt *Integral* von φ (auf $[a, b]$).

!! Wichtig bei dieser Definition: Für eine Treppenfunktion φ gibt es verschiedene zulässige Zerlegungen. Damit $\int_a^b \varphi$ wohldefiniert ist, muss die Summe $\sum\limits_{I \in Z} c_I \lambda(I)$ von der Wahl der Zerlegung unabhängig sein. Man kann sich überlegen, dass dies der Fall ist ([Ü]). Ist etwa

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le x \le 1/2 \\ 1 & , \quad 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

so ist $Z = \{I_1, I_2\} = \{[0, 1/2), [1/2, 1]\}$ eine zulässige Zerlegung mit $c_{I_1} = 0$, $c_{I_2} = 1$, und es gilt

$$\int_0^1 \varphi = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 1/2 \,.$$

Eine weitere zulässige Zerlegung ist $Z = \{I_1, I_2, I_3\} = \{[0, 1/2], (1/2, 3/4], (3/4, 1]\}$ mit $c_{I_1} = 0$, $c_{I_2} = c_{I_3} = 1$. Hierfür gilt auch

$$\int_0^1 \varphi = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \,.$$

Satz 13.3 *Es seien $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{K}$ Treppenfunktionen. Dann gilt:*

1. *Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, so ist $\alpha\varphi + \beta\psi$ eine Treppenfunktion und es gilt*

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_a^b \varphi + \beta \int_a^b \psi$$

.

2. *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\varphi \leq \psi$ (d. h. $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$), so ist*

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi \,.$$

3. *$|\varphi|$ ist eine Treppenfunkton und es gilt*

$$\left| \int_a^b \varphi \right| \leq \int_a^b |\varphi| \leq (b - a)||\varphi|| \,.$$

(Dabei ist $||\varphi|| := ||\varphi||_\infty = \sup \{|\varphi(x)| : x \in [a, b]\}$.)

Beweis. 1. Es seien Z_1 bzw. Z_2 zulässige Zerlegungen für φ bzw. ψ. Dann ist $Z := \{I_1 \cap I_2 : I_1 \in Z_1, I_2 \in Z_2\}$ sowohl für φ als auch für ψ zulässig. Sind $c_I \in \mathbb{K}$ bzw. $d_I \in \mathbb{K}$ wie in (13.1) für φ bzw. ψ, so gilt $\alpha\varphi + \beta\psi_{|I^0} = \alpha c_I + \beta d_I$ und damit

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha\varphi + \beta\psi &= \sum_{I \in Z} [(\alpha c_I + \beta d_I)\lambda(I)] = \\ &= \alpha \sum_{I \in Z} c_I \lambda(I) + \beta \sum_{I \in Z} d_I \lambda(I) = \alpha \int_a^b \varphi + \beta \int_a^b \psi \,. \end{aligned}$$

Die Aussagen 2. und 3. ergeben sich ähnlich aus einfachen Eigenschaften von Summen.
□

Wir werden nun allgemeinere Funktionen betrachten, die sich in geeigneter Weise durch Treppenfunktionen annähern lassen. Für diese Funktionen können wir dann das Integral (als "Fläche unter dem Graphen") über die Integrale dieser Treppenfunktionen definieren.

Definition 13.4 Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und es sei $f \in B([a, b], \mathbb{K})$. Dann heißt f *Regelfunktion*, falls eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen existiert mit

$$||\varphi_n - f|| \to 0$$

(d. h. $\varphi_n \to f$ gleichmässig auf $[a, b]$; vgl. B 11.15). Weiter setzen wir

$$R[a, b] := R([a, b], \mathbb{K}) := \{f : [a, b] \to \mathbb{K} : f \text{ Regelfunktion}\} .$$

Wir zeigen, dass insbesondere stetige Funktionen Regelfunktionen sind.

Satz 13.5 *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ stetig. Mit $x_j^{(n)} := a + j(b - a)/n$ $(j = 0, \ldots, n)$ und $I_j^{(n)} := [x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)})$ $(j = 1, \ldots, n - 1)$, $I_n^{(n)} := [x_{n-1}^{(n)}, b]$ ist durch*

$$\varphi_n(x) := f(x_{j-1}^{(n)}) \qquad (x \in I_j^{(n)},\, j = 1, \ldots, n)$$

eine Folge von Treppenfunktionen φ_n definiert mit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig auf $[a, b]$. Insbesondere ist also $f \in R[a, b]$.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$ ist, existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit $|f(x) - f(\tilde{x}| < \varepsilon$ für alle $x, \tilde{x}$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta_\varepsilon$. Weiter existiert ein N_ε so, dass $(b - a)/n < \delta_\varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$.
Ist also $n \geq N\varepsilon$ und $x \in [a, b)$, so gilt für $j = j_n(x)$ so dass $x \in I_j^{(n)}$

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - f(x_{j-1}^{(n)})| < \varepsilon$$

(beachte: $0 \leq x - x_{j-1}^{(n)} < \delta_\varepsilon$). Da x beliebig war, folgt

$$||f - \varphi_n||_\infty \leq \varepsilon \quad (n \geq N_\varepsilon) .$$

□

Bemerkung und Definition 13.6 1. Ist $f \in R[a,b]$ und ist $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ so, dass $f(x) = g(x)$ bis auf endlich viele x, so ist auch $g \in R[a,b]$.

2. Ist Z eine Zerlegung von $[a,b]$, so ist $f \in R[a,b]$ genau dann, wenn $f \in R(\bar{I})$ für alle $I \in Z$ (hierbei ist $\bar{I}$ das Intervall I mit den Randpunkten).

3. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ nennen wir *stückweise stetig*, falls eine Zerlegung Z von $[a,b]$ so existiert, dass $f_{|I^0}$ für alle $I \in Z$ stetig fortsetzbar nach $\bar{I}$ ist (d. h. $f_{|I^0}$ ist stetig und an den Randpunkten existieren die einseitigen Grenzwerte). Dann ist f eine Regelfunktion.
(Denn: Nach S. 13.5 und 1. ist $f \in R(\bar{I})$ für alle $I \in Z$. Mit 2. ergibt sich die Behauptung.)

2. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton (wachsend oder fallend), so ist f eine Regelfunktion ([Ü]).

Bemerkung und Definition 13.7 Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ eine Regelfunktion, und es sei (φ_n) eine Folge von Treppenfunktionen mit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Wir setzen

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx \; .$$

Dann heisst $\int_a^b f$ das *Integral* von f auf $[a,b]$.
!! Damit dies eine sinnvolle Definition ist, müssen zwei Dinge sichergestellt werden:

1. Der Grenzwert muss existieren.
2. Er hängt nicht von der Wahl der approximierenden Fuktionen (φ_n) ab.

Beides ist erfüllt:
Zu 1.: Es gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ nach S. 13.3.3

$$\left| \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \varphi_m \right| \le (b-a)||\varphi_n - \varphi_m|| \; .$$

Da (φ_n) eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf $[a,b]$ ist, ist auch $(\int_a^b \varphi_n)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$, also konvergent.
Zu 2.: Ist (ψ_n) eine weitere Folge von Treppenfunktionen mit $\psi_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$, so gilt

$$\left| \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \psi_n \right| \le (b-a)||\varphi_n - \psi_n|| \le (b-a)[||\varphi_n - f|| + ||f - \psi_n||] \to 0 \; .$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n \ .$$

Beispiel 13.8 Wir betrachen $f(x) = x$ auf $[0,1]$. Dann ist nach S. 13.5 durch

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \frac{j-1}{n} & , \quad x \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}),\ j = 1, \ldots, n \\ \frac{n-1}{n} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

eine Folge von Treppenfunktionen auf $[0,1]$ gegeben mit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Es gilt

$$\int_0^1 \varphi_n = \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty) \ ,$$

also ist

$$\int_0^1 f(x)dx = 1/2.$$

Wir stellen einige Rechenregeln zusammen, die sich mehr oder weniger unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen ergeben.

Satz 13.9 *Es seien $f, g \in R[a,b]$. Dann gilt*

1. *Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, so ist auch $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ und es gilt*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

2. *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $f \leq g$ auf $[a,b]$, so ist*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \ .$$

3. *$|f|$ ist eine Regelfunktion und*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a)||f||$$

Beweis. Es seien (φ_n) und (ψ_n) Folgen von Treppenfunktionen mit $\varphi_n \to f$, $\psi_n \to g$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Dann gilt

$$||\alpha f + \beta g - (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)|| \leq |\alpha| \cdot ||f - \varphi_n|| + |\beta| \cdot ||g - \psi_n|| \to 0 \quad (n \to \infty) ,$$

also $\alpha\varphi_n + \beta\psi_n \to \alpha f + \beta g$ gleichmäßig auf $[a,b]$ und deshalb

$$\int_b^a \alpha f + \beta g = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g .$$

2. Hier sind φ_n und ψ_n reellwertig. Wir setzen

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n^- & := & \varphi_n - ||f - \varphi_n|| \\ \psi_n^+ & := & \psi_n + ||g - \psi_n|| \end{array} .$$

Dann sind φ_n^-, ψ_n^+ Treppenfunktionen mit $\varphi_n^- \leq f \leq g \leq \psi_n^+$ sowie

$$||f - \varphi_n^-|| \to 0 \qquad \text{und} \qquad ||g - \psi_n^+|| \to 0 .$$

Also folgt mit S. 13.3.2

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n^- \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n^+ = \int_a^b g .$$

3. Aus $||f(x)| - |\varphi_n(x)|| \leq |f(x) - \varphi_n(x)|$ folgt, dass auch $|f|$ eine Regelfunktion ist und dass $|\varphi| \to |f|$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gilt. Damit ergibt sich mit S. 13.3.3 und mit 2. (beachte: $|f(x)| \leq ||f||$)

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\int_a^b \varphi_n(x)dx\right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b |\varphi_n(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)||f|| .$$

$\square$

Bemerkung und Definition 13.10 Es sei I ein (beliebiges) Intervall. Wir setzen

$$R(I) := R(I,\mathbb{K}) := \{f : I \to \mathbb{K} : f_{|J} \in R(J,\mathbb{K}) \text{ für alle kompakten Intervalle } J \subset I\} .$$

Ist $f \in R(I)$, so definieren wir noch für $x, y \in I$ mit $x < y$

$$\int_x^x f := 0 \qquad \text{und} \qquad \int_y^x f := -\int_x^y f$$

Damit gilt ([Ü]) für $x, y, z \in [a, b]$

$$\int_x^y f + \int_y^z f = \int_x^z f$$

und

$$\left| \int_x^y f \right| \leq ||f||_{I[x,y]} |y - x|$$

wobei $|| \cdot ||_M$ die Supremumsnorm auf M bezeichnet.

Wir kommen zu einem der zentralen Sätze der Analysis, der die Beziehung zwischen der Differenzial- und der Integralrechnung herstellt.

Satz 13.11 *(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Teil 1)*
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f \in R(I)$. Die Funktion $F : I \to \mathbb{K}$ sei definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in I)$$

Dann gilt:

1. *F ist stetig auf I.*
2. *Ist f stetig an der Stelle $x_0 \in I$, so ist F differenzierbar an x_0 mit*

$$F'(x_0) = f(x_0) \ .$$

Beweis.
1. Es sei $x_0 \in I$ beliebig. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$J := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap I$$

kompakt ist. Also ist f beschränkt auf J (da $f \in R(J)$). Damit gilt für $x \in I$ mit $|x - x_0| \leq \delta$

$$\begin{aligned} \big|F(x) - F(x_0)\big| &= \Big| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \Big| = \Big| \int_{x_0}^x f \Big| \leq \|f\|_{I[x_0,x]} |x - x_0| \\ &\leq \|f\|_J \cdot |x - x_0| \to 0 \qquad (x \to x_0). \end{aligned}$$

2 Es sei f stetig an x_0. Dann gilt für $x \in I$

$$\big\|f - f(x_0)\big\|_{I[x_0,x]} \to 0 \qquad (x \to x_0)$$

und folglich für $x \neq x_0$

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x}\big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\right| \\ &\leq \frac{|x-x_0|}{|x-x_0|}\left\|f-f(x_0)\right\|_{I[x_0,x]} \to 0 \qquad (x \to x_0).\end{aligned}$$

□

Wir wollen nun verschiedene Techniken zur Berechnung von Integralen herleiten. Wichtig ist dabei der Begriff der Stammfunktion.

Definition 13.12 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und es sei $f : I \to \mathbb{K}$. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{K}$ heißt (*verallgemeinerte*) *Stammfunktion* von f (auf $[a,b]$), falls F stetig ist und falls gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ bis auf endlich viele in kompakten Teilmengen (d. h. es existiert eine Menge $A \subset I$ so, dass $A \cap J$ endlich ist für alle kompakten Intervalle $J \subset I$ und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I \setminus A$ gilt).
Wichtig ist dabei: Sind F und G Stammfunktionen zu f, so existiert ein $c \in \mathbb{K}$ mit $F(x) = G(x) + c$ für alle $x \in [a,b]$, d. h. zwei Stammfunktionen unterscheiden sich lediglich durch eine additive Konstante ([Ü]).
Wir schreiben auch

$$x \mapsto \int f(x)dx$$

(*unbestimmtes Integral*) für eine Stammfunktion (oder auch die Gesamtheit aller Stammfunktionen) von f.

Der nun folgende zweite Teil des Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung zeigt, dass Integrale – unter geeigneten Voraussetzungen – durch Bestimmung einer Stammfunktion berechnet werden können:

Satz 13.13 *(HDI, Teil 2)*
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ stückweise stetig, so hat f eine Stammfunktion auf $[a,b]$. Außerdem gilt dann: Ist Φ eine beliebige Stammfunktion zu f, so ist

$$\int\limits_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) \quad \left(=: \Phi(x)\big|_a^b =: \Phi\big|_a^b\right). \tag{13.2}$$

Beweis. 1. Nach S. 13.11 ist F (wie dort definiert) eine Stammfunktion zu f.

Es sei Φ eine beliebige Stammfunktion zu f. Dann gilt $\Phi(x) = F(x) + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{K}$. Damit ist

$$\int_a^b f = F(b) = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) .$$

□

Beispiel 13.14 1. Es sei $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$. Dann gilt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} = f(x) \qquad (x > 0) .$$

Also ist

$$\ln x = \int \frac{1}{x}\, dx \qquad (x > 0) .$$

Nach dem HDI gilt für $0 < a < b < \infty$:

$$\int_a^b f = \int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \ln x|_a^b = \ln(b) - \ln(a) \quad \left(= \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) .$$

Ist $f(x) = x^\alpha$ $(x > 0)$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ fest ist, so gilt

$$\left(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha = f(x) \qquad (x > 0) .$$

Also ist

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad (x > 0)$$

und folglich für $0 < a < b < \infty$

$$\int_a^b x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}|_a^b = \frac{1}{\alpha+1}\left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) .$$

Im Falle $\alpha \geq 0$ gilt dies auch für $a = 0$.
2. Ist $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ auf $I = \mathbb{R}$, so ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = |x|$ eine (verallgemeinerte) Stammfunktion zu f (denn F ist stetig auf $\mathbb{R}$ und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$)

Bemerkung 13.15 Durch Übertragung der Produkt- und der Kettenregel ergeben sich wichtige Techniken zur möglichen Berechnung von Stammfunktionen.
1. Sind $f, g : I \to \mathbb{K}$ und sind F bzw. G Stammfunktionen zu f bzw. g auf I, so folgt aus der Produktregel, dass FG eine Stammfunktion zu $fG + Fg$ auf I ist. Als Konsequenz erhalten wir auf I

$$\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\, dx .$$

(unbestimmte partielle Integration)
2. Mit Hilfe der Kettenregel sieht man: Ist $t : I \to J$ differenzierbar, und ist F differenzierbar auf J mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in J$, so ist nach der Kettenregel $F \circ t$ eine Stammfunktion zu $f \circ t \cdot t'$, also

$$\int f(t(x))t'(x)dx = F(t(x)) = \int f(t)dt_{|t=t(x)}$$

(Substitutionsregel; unbestimmt)

Beispiel 13.16 1. Für $\alpha \neq -1$ und $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\int x^\alpha \ln x \, dx &= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha \, dx = \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right)\end{aligned}$$

2. Es gilt auf $(-1,1)$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int 1\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\,dx\,,\end{aligned}$$

also (übrigens auch auf $[-1,1]$)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$$

Damit folgt insbesondere mit dem HDI, Teil 2,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

(Fläche der oberen Hälfte des Einheitskreises).
3. Es gilt auf $(-1,1)$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{t=x^2}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t}}_{|t=x^2} = -2\sqrt{1-t}_{|t=x^2} = -2\sqrt{1-x^2}\,.$$

4. Es gilt auf $I = (0,\pi)$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &\overset{S.8.15}{=} \int \frac{dx}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \\ &= \int \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\frac{1}{2\cos^2(x/2)}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\tan(x/2)}\frac{1}{2\cos^2(x/2)}\,dx \\ &\overset{t(x)=\tan(x/2)}{=} \int \frac{dt}{t}_{|t=\tan(x/2)} = \ln(\tan(x/2))\end{aligned}$$

Zum Abschluss befassen wir uns noch kurz mit der Vertauschung von "lim" und Integration für Funktionenfolgen und Funktionenreihen.

Satz 13.17 *Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$.*

1. *Sind $f_n \in R[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ und konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen die Grenzfunktion f, so ist $f \in R[a,b]$ und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx\,.$$

2. *Sind $g_\nu \in R[a,b]$ und konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$, so gilt*

$$\int_a^b \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x)\right\} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_a^b g_\nu(x)\, dx\,.$$

Beweis. 1. Da f_n eine Regelfunktion ist, existiert eine Treppenfunktion φ_n mit

$$||f_n - \varphi_n|| < 1/n\ .$$

Hieraus folgt

$$||f - \varphi_n|| \le ||f - f_n|| + ||f_n - \varphi_n|| \to 0 \qquad (n \to \infty)\ .$$

Damit ist $f \in R[a,b]$. Außerdem ergibt sich aus S. 13.9.3

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| \le (b-a)||f - f_n||_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty)\ .$$

2. Die 2. Behauptung ergibt sich unmittelbar aus 1. durch Anwendung auf die Teilsummenfolge. □

Bemerkung 13.18 Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x-x_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ und ist

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x-x_0)^\nu \qquad (x_0 - r < x < x_0 + r),$$

so gilt für $x_0 - r < x < x_0 + r$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1}\,(x-x_0)^{\nu+1}\ \Big(= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu-1}}{\nu}\,(x-x_0)^\nu\Big).$$

(Denn: Für $x \in U_r(x_0)$ ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-x_0)^\nu$ gleichmäßig konvergent auf $I[x_0, x]$. Also folgt aus S. 13.17 (auch falls $x < x_0$)

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^\nu \, dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{(x-x_0)^{\nu+1}}{\nu+1} \text{ .)}$$

Beispiel 13.19 1. Für

$$f(x) := e^{-x^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{\nu!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gilt

$$\int\limits_{0}^{x} e^{-t^2} dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(2\nu+1)} x^{2\nu+1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Für

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^\nu \qquad \big(x \in (-1,1)\big)$$

ist

$$\ln(1+x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{dt}{1+t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} x^{\nu+1} \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

Nach dem Abelschen Grenzwertsatz und dem Leibniz-Kriterium gilt damit

$$\ln(2) = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} \quad \left(= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \right)$$

14 Uneigentliche Integrale

Wir haben bisher nur Integrale auf kompakten Intervallen betrachtet. Wir wollen jetzt auch Integrale auf nichtkompakten Intervallen erklären.

Definition 14.1 Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Ist $f \in R(I)$, wobei $I^o = (a,b), c \in I$ und $F : I \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$F(x) = \int_c^x f \qquad (x \in I),$$

so heißt f (*uneigentlich*) *integrierbar* auf I, falls $F(a^+)$ und $F(b^-)$ existieren. In diesem Fall heißt

$$\int_{a^+}^{b^-} f := \int_{a^+}^{b^-} f(x)dx := F(b^-) - F(a^+)$$

(*uneigentliches*) *Integral* von f auf I.

Bemerkung 14.2 1. Sind $\widetilde{c} \in (a,b)$ und $\widetilde{F}(x) = \int_{\widetilde{c}}^x f$, so unterscheiden sich F und $\widetilde{F}$ nur durch eine additive Konstante. Daher ist die Definition unabängig von der Wahl von c.
2. Ist $f \in R[a,b]$, so ist F stetig auf $[a,b]$ nach dem HDI, Teil 1, und damit

$$\int_{a^+}^{b^-} f = F(b^-) - F(a^+) = F(b) - F(a) = \int_a^b f,$$

d.h. „eigentliches" und uneigentliches Integral stimmen überein. Wir schreiben daher auch kurz $\int_a^b f$ statt $\int_{a^+}^{b^-} f$.
3. (uneigentlicher HDI, Teil 2) Es sei $f : I \to \mathbb{K}$ stückweise stetig (d. h. stückweise stetig auf jedem kompakten Teilintervall). Nach dem HDI, Teil 1, ist F aus D. 14.1 eine Stammfunktion von f auf I. Ist Φ eine (beliebige) Stammfunktion von f auf I, so ist f genau dann integrierbar, wenn $\Phi(b^-)$ und $\Phi(a^+)$ existieren. Außerdem ist dann

$$\int_{a^+}^{b^-} f = \Phi(b^-) - \Phi(a^+) =: \Phi|_a^b.$$

(Denn: Φ und F unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante. Damit ergibt sich die Behauptung wie im Beweis zum HDI, Teil 2.)

Beispiel 14.3 1. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha(x) := 1/x^\alpha$ auf $I = (0, \infty)$. Ist $\Phi_\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & , \quad \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & , \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

so gilt $\Phi'_\alpha = f_\alpha$. Außerdem erhalten wir für $x \to \infty$

$$\Phi_\alpha(x) \to \begin{cases} 0 & , \quad \alpha > 1 \\ \infty & , \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

und für $x \to 0^+$

$$\Phi_\alpha(x) \to \begin{cases} 0 & , \quad \alpha < 1 \\ \infty & , \quad \alpha \geq 1 \end{cases} .$$

Also existiert nach B. 14.2.3 das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist und in diesem Falle ist

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \Phi_\alpha(x)\big|_1^\infty = 0 - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} .$$

Entsprechend existiert $\int\limits_{0^+}^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ genau dann, wenn $\alpha < 1$ ist, und dann gilt

$$\int\limits_{0^+}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \Phi_\alpha(x)\big|_0^1 = \frac{1}{1-\alpha} .$$

Hieraus folgt auch, dass für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int\limits_{0^+}^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ existiert (denn anderenfalls müssten beide uneigentlichen Integrale $\int\limits_{0^+}^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ und $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ existieren).

2. Wir betrachten $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ auf $I = (-1, 1)$. Es gilt $\arcsin' = f$ auf $(-1, 1)$ und arcsin ist stetig auf $[-1, 1]$. Nach B. 14.2.3 existiert $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ und es ist

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)\big|_{-1}^1 = \pi .$$

Satz 14.4 *Es sei I ein Intervall, und es seien $f, g \in R(I)$. Dann gilt:*

1. *Sind f und g integrierbar auf I, so ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ auch $\alpha f + \beta g$ integrierbar mit*
$$\int_{a^+}^{b^-} \alpha f + \beta g = \alpha \int_{a^+}^{b^-} f + \beta \int_{a^+}^{b^-} g\,.$$
2. *Sind f, g (reellwertig und) integrierbar mit $f \leq g$ auf I, so ist*
$$\int_{a^+}^{b^-} f \leq \int_{a^+}^{b^-} g\,.$$
3. *(Majorantenkriterium für Integrale) Ist g integrierbar auf I und gilt $|f| \leq g$, so ist auch f integrierbar auf I mit*
$$|\int_{a^+}^{b^-} f| \leq \int_{a^+}^{b^-} g\,.$$

Beweis. Es seien $F(x) := \int_c^x f$ und $G(x) := \int_c^x g$ für $x \in I$.

1. Klar nach S. 13.9 und D. 14.1.
2. Für $x \geq c$ gilt mit S. 13.9.2
$$F(x) = \int_c^x f \leq \int_c^x g = G(x),$$
also auch $F(b^-) \leq G(b^-)$. Entsprechend gilt für $x \leq c$
$$F(x) = -\int_x^c f \geq -\int_x^c g = G(x),$$
also $F(a^+) \geq G(a^+)$. Damit ist $F(b^-) - F(a^+) \leq G(b^-) - G(a^+)$.
3. (i) Wir zeigen: $F(b^-)$ existiert.
Denn: Es reicht zu zeigen ([Ü]): Für alle Folgen (x_n) in I^0 mit $x_n \to b$ ist $\big(F(x_n)\big)$ eine Cauchy-Folge. Es sei also (x_n) eine solche Folge. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass
$$\Big|\int_{x_m}^{x_n} g\Big| = \big|G(x_n) - G(x_m)\big| < \varepsilon \qquad (n, m \geq N_\varepsilon).$$

Also folgt mit S. 13.9.2 und 3. (wobei ohne Einschränkung $x_n \geq x_m$)

$$\left|F(x_n) - F(x_m)\right| = \Big|\int\limits_{x_m}^{x_n} f\Big| \leq \int\limits_{x_m}^{x_n} g < \varepsilon.$$

Genauso sieht man, dass $F(a^+)$ existiert.

(ii) Es sei $\alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| = 1$ so, dass $|\int\limits_{a^+}^{b^-} f| = \alpha \int\limits_{a^+}^{b^-} f$. Dann folgt mit 2. (beachte: $\operatorname{Re} \alpha f \leq |\alpha f| = |f| \leq g$)

$$\Big|\int\limits_{a^+}^{b^-} f\Big| = \int\limits_{a^+}^{b^-} (\alpha f) = \operatorname{Re} \int\limits_{a^+}^{b^-} (\alpha f) + i \operatorname{Im} \int\limits_{a^+}^{b^-} (\alpha f) = \operatorname{Re} \int\limits_{a^+}^{b^-} (\alpha f) = \int\limits_{a^+}^{b^-} \operatorname{Re}(\alpha f) \leq \int\limits_{a^+}^{b^-} g.$$

□

Bemerkung 14.5 Insbesondere ergibt sich aus S. 14.4.3 (mit $g := |f|$):
Ist $f \in R(I)$ (und damit auch $|f| \in R(I)$), so folgt aus der Integrierbarkeit von $|f|$ auch die von f. Wir sprechen dann auch von *absoluter Integrierbarkeit* von f. Wie bei Reihen gilt also: Ist f absolut integrierbar, so ist f integrierbar. Außerdem gilt dann:

$$\Big|\int\limits_{a^+}^{b^-} f\Big| \leq \int\limits_{a^+}^{b^-} |f| \,.$$

Beispiel 14.6 1. Wir betrachten für $\alpha > 1$ das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx$.

Es gilt

$$\frac{|\cos x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \qquad (x \geq 1) \,.$$

Da $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ existiert, folgt die Existenz von $\int\limits_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^\alpha}\, dx$ aus S. 14.4.3. Nach B. 14.5 existiert auch $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx$. Entsprechendes gilt für das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$.

Satz 14.7 *(Uneigentliche partielle Integration)*
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{K}$ stückweise stetig. Sind F, G zugehörige

Stammfunktionen und existieren $(FG)(b^-)$ sowie $(FG)(a^+)$, so gilt: fG ist genau dann integrierbar auf I, wenn Fg integrierbar auf I ist, und in diesem Fall ist

$$\int_{a^+}^{b^-} fG = FG\big|_a^b - \int_{a^+}^{b^-} Fg.$$

Beweis. Da F, G stetig auf I sind, ist $fG + Fg$ stückweise stetig. Außerdem ist FG eine Stammfunktion zu $fG + Fg$. Nach B. 14.2.3 ist $fG + Fg$ integrierbar mit

$$\int_{a^+}^{b^-} (fG + Fg) = FG\big|_a^b.$$

Ist nun etwa fG integrierbar, so ist auch Fg integrierbar nach S. 14.4.1, und es gilt

$$\int_{a^+}^{b^-} fG = FG\big|_a^b - \int_{a^+}^{b^-} Fg.$$

Entsprechendes gilt, falls Fg integrierbar ist. □

Beispiel 14.8 Es sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{K}$ stückweise stetig. Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: Ist F beschränkt, so existiert $\int_1^\infty f(x)/x\,dx$.

(Denn: Da F beschränkt (und stetig) ist, existiert das Integral $\int_1^\infty F(x)/x^2\,dx$ nach dem Majorantenkriterium. Mit $G(x) = 1/x$ und $g(x) = -1/x^2$ ergibt sich die Behauptung aus S. 14.7 (beachte: es gilt $F(x)G(x) = F(x)/x \to 0$ für $x \to \infty$).)

Wir betrachten $f(x) = \sin x$. Hier ist $F(x) = -\cos x$ beschränkt auf $[1, \infty)$. Also existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. Man kann zeigen ([Ü]): Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ existiert nicht! Also: Für uneigentliche Integrale folgt aus der Existenz von $\int_{a^+}^{b^-} f$ i. A. noch nicht die Existenz von $\int_{a^+}^{b^-} |f|$.

Im folgenden Satz wird ein Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Reihen und der Konvergenz uneigentlicher Integrale hergestellt:

Satz 14.9 *(Integralkriterium für Reihen)*
Es sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *monoton fallend und es gelte* $f(x) \geq 0$ $(x \geq 1)$*. Dann existiert* $g := \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} f(\nu) - \int_1^{n+1} f \right)$ *und es gilt*

$$0 \leq g \leq f(1)\ .$$

Beweis. Zunächst folgt aus $f(\nu) \geq f(x) \geq f(\nu+1)$ in $[\nu, \nu+1]$

$$f(\nu) \geq \int\limits_{\nu}^{\nu+1} f(x)\,dx \geq f(\nu+1)\ .$$

Hieraus ergibt sich mit $a_\nu := f(\nu)$

$$0 \leq a_\nu - \int\limits_{\nu}^{\nu+1} f \leq a_\nu - a_{\nu+1}$$

und damit ist die Folge (s_n) mit

$$s_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \int\limits_{1}^{n+1} f = \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu - \int\limits_{\nu}^{\nu+1} f \right)$$

monoton wachsend mit $0 \leq s_n \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1)$. Also ergibt sich die Behauptung mit dem Hauptsatz über monotone Folgen. □

Beispiel 14.10 Wir betrachten $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ für $\alpha > 0$. Dann ist f monoton fallend auf $[1,\infty)$ und $f(x) \geq 0$. Also existiert

$$g = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^\alpha} - \int\limits_{1}^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \right)\ .$$

Ist $\alpha > 1$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{1}^{n+1} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$ und $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu^\alpha}$. Nach S. 14.9 ist

$$0 \leq \zeta(\alpha) - \frac{1}{\alpha-1} \leq 1 \qquad (\alpha > 1)\ .$$

Ist $\alpha = 1$, so ergibt sich die Konvergenz von

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \int\limits_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \ln(n+1)\ .$$

Ist schließlich $0 < \alpha < 1$, so ergibt sich die Konvergenz von

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^\alpha} - \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^\alpha} - \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} .$$

Beispiel 14.11 Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ existiert für jedes $x > 0$.
(Denn: Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0 .$$

Also existiert eine Konstante $M = M_x > 0$ so, dass für alle $t \in [1, \infty)$ gilt

$$e^{-t} t^{x-1} \le \frac{M}{t^2}$$

(warum?). Aus der Existenz von $\int_1^\infty 1/t^2 \, dt$ ergibt sich mit dem Majorantenkriterium auch die Existenz von $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$.
Weiter gilt

$$e^{-t} t^{x-1} \le t^{x-1} \qquad (t \in (0, 1]) .$$

Aus der Existenz von $\int_0^1 t^{x-1} dt$ (siehe B. 14.3.1) folgt wieder mit dem Majorantenkriterium die Existenz von $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$. Insgesamt ergibt sich damit die Existenz von $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$.)
Die Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\Gamma(x) := \int_{0+}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \qquad (x > 0)$$

heißt (*Euler'sche*) *Gammafunktion.* Durch uneigentliche partielle Integration erhält man unmittelbar die folgende Funktionalgleichung für Γ:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad (x > 0) . \tag{14.1}$$

Speziell gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\big|_0^\infty = 1 ,$$

woraus sich wiederum mit (14.1) induktiv

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ergibt. Die Gammafunktion "interpoliert" also die Fakultäten; man kann $\Gamma(x)$ als "verallgemeinerte Fakultät" auffassen.

Zum Abschluss wollen wir noch eine Formel herleiten, die das Wachstum von $n!$ für $n \to \infty$ sehr genau beschreibt, die sog. Stirling'sche Formel. Dazu beweisen wir zunächst

Satz 14.12 *(Euler'sche Summenformel)*
Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *und es sei* $f : [1, n] \to \mathbb{K}$ *stetig differenzierbar (d. h.* f *ist differenzerbar auf* $[1, n]$ *mit stetiger Ableitung). Dann gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = \int_{1}^{n} f + \frac{1}{2}\Big(f(1) + f(n)\Big) + \int_{1}^{n} b(x) f'(x)\, dx$$

mit

$$b(x) := x - [x] - 1/2 \quad \text{und} \quad [x] := \max\{\nu \in \mathbb{Z} : \nu \leq x\}$$

Beweis. Es gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{n} b(x) f'(x)\, dx &= \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{\nu}^{\nu+1} (x - \nu - 1/2) f'(x)\, dx = \\
&= \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[(x - \nu - 1/2) f(x) \Big|_{\nu}^{\nu+1} - \int_{\nu}^{\nu+1} f(x)\, dx \right] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n-1} \Big(f(\nu + 1) + f(\nu) \Big) - \int_{1}^{n} f(x)\, dx \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) - \frac{1}{2}\Big(f(1) + f(n)\Big) - \int_{1}^{n} f(x)\, dx\,.
\end{aligned}$$

□

Für zwei Folgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{K}$ mit $y_n \neq 0$ schreiben wir

$$x_n \sim y_n \qquad (n \to \infty)$$

falls $x_n / y_n \to 1\, (n \to \infty)$ gilt.

Satz 14.13 *(Stirling'sche Formel)*
Es ist

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \qquad (n \to \infty)\,. \tag{14.2}$$

Beweis. 1. Für $f(x) = \ln(x)$ gilt

$$\int_{1}^{n} \log(x)\, dx = x\Big(\log(x) - 1\Big)\Big|_{1}^{n} = n \log n - n + 1$$

und damit mit S. 14.12

$$\sum_{\nu=1}^{n} \log \nu = n \log n - n + 1 + \frac{1}{2} \log n + \int_{1}^{n} \frac{b(x)}{x}\, dx\,.$$

Dabei existiert $\int\limits_1^\infty \frac{b(x)}{x}\,dx$ nach B. 14.8.

(Denn: Für die Stammfunktion $B : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ von b, definiert durch $B(y) := \int_1^y b(x)\,dx$ $(y \geq 1)$, gilt

$$|B(y)| = \left|\int\limits_1^y b(x)\,dx\right| \leq \Big|\sum_{\nu=1}^{[y]-1} \underbrace{\int\limits_\nu^{\nu+1} b(x)dx}_{=0}\Big| + \int\limits_{[y]}^y \underbrace{|b(x)|}_{\leq 1/2}\,dx \leq 1/2\ .)$$

2. Nun betrachten wir

$$a_n := \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$$

und zeigen: $a_n \to \sqrt{2\pi}$ $(n \to \infty)$. Dies ist äquivalent zur Behauptung. Es gilt nach 1.

$$\log a_n = \sum_{\nu=1}^n \log \nu - n \log n + n - \frac{1}{2}\log n = 1 + \int\limits_1^n \frac{b(x)}{x}\,dx\ ,$$

also ist $(\log a_n)$ konvergent nach 1. und damit konvergiert auch (a_n). Wir setzen $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann ist $a > 0$ und es gilt unter Verwendung Wallis-Produktes für $\pi/2$ (siehe [Ü])

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi/2} &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\dots\cdot\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}\right]^{1/2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{2^{2n}(a_n n^n e^{-n}\sqrt{n})^2}{a_{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{a_n^2}{a_{2n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

d. h. $a = \sqrt{2\pi}$.

□

Unter Ausnutzung des Wallis-Produktes erhält man auch

Satz 14.14 *Es ist*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}\ .$$

Beweis. Nach S. 8.18.2 ist $e^t \le \frac{1}{1-t}$ $(t < 1)$, also

$$e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und damit auch

$$e^{-nx^2} \le \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \qquad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) .$$

Entsprechend folgt aus $1 + t \le e^t$

$$(1-x^2)^n \le e^{-nx^2} \qquad (0 \le x \le 1) .$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx &\overset{t(x)=\cos x}{=} \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \le \int_0^1 e^{-nt^2} \, dt \\
&\le \int_0^\infty e^{-nt^2} \, dt \Big(= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-u^2} \, du \Big) \le \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n} \\
&\overset{t(x)=\cot x}{=} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} x \, dx
\end{aligned}$$

d. h.

$$\sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx \le \int_0^\infty e^{-u^2} \, du \le \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} x \, dx .$$

Mit

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \, dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}$$

und

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t \, dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-3}{2n-2}$$

(siehe [Ü]) ergibt sich durch Quadrieren

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2n+1} \left[\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}\right] &\le \left(\int_0^\infty e^{-u^2} \, du\right)^2 \\
&\le \frac{n}{2n-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{\left[\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(2n-2)(2n-2)}{(2n-3)(2n-1)}\right]}
\end{aligned}$$

Nun gilt (Wallis-Produkt; [Ü])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

also erhalten wir für $n \to \infty$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \, du \right)^2 = \left(2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-u^2} \, du \right)^2 = \pi \ .$$

□

15 Differenzialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen

In Abschnitt 12 haben wir Ableitungen von Funktionen einer Variablen untersucht. Wir studieren jetzt für $d, m \in \mathbb{N}$ Funktionen $f : M \to \mathbb{K}^m$, wobei $M \subset \mathbb{R}^d$ ist. Die Räume $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{K}^m$ seien im Folgenden stets mit der euklidschen Metrik versehen. Damit stehen uns die Begriffe und Ergebnisse aus den Abschnitten 9 und 10 auch hier zur Verfügung.
Bei vielen Untersuchungen kann man sich auf den Fall $m = 1$, d. h. auf den Fall reell- oder komplexwertiger Funktionen, beschränken. Betrachten wir also zunächst Funktionen $f : M \to \mathbb{K}$.
Bevor wir zum eigentlichen Begriff der Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher kommen, werden wir noch kurz auf weitere Grundbegiffe und Ergebnisse aus der Topologie eingehen..

Satz 15.1 *Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M_\alpha \subset X$ für $\alpha \in I$.*

1. Ist $M_\alpha \left\{ \begin{array}{l} \text{offen} \\ \text{abgeschlossen} \end{array} \right\}$ für alle $\alpha \in I$, so ist $\left\{ \begin{array}{l} \bigcup\limits_{\alpha \in I} M_\alpha \text{ offen} \\ \bigcap\limits_{\alpha \in I} M_\alpha \text{ abgeschlossen} \end{array} \right.$

2. Ist I endlich und $M_\alpha \left\{ \begin{array}{l} \text{offen} \\ \text{abgeschlossen} \end{array} \right\}$ für alle $\alpha \in I$, so ist $\left\{ \begin{array}{l} \bigcap\limits_{\alpha \in I} M_\alpha \text{ offen} \\ \bigcup\limits_{\alpha \in I} M_\alpha \text{ abgeschlossen} \end{array} \right.$.

Beweis.

1. Es seien M_α offen $(\alpha \in I)$. Ist $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$, so existiert ein $\alpha \in I$ mit $x \in M_\alpha$. Da M_α offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset M_\alpha$. Damit ist $U_\varepsilon(x) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$.
   Ist M_α abgeschlossen $(\alpha \in I)$, so ist M_α^c offen $(\alpha \in I)$, also auch
   $$\Big(\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha^c \quad \text{offen.}$$
2. Es seien $M_\alpha\,(\alpha \in I)$ offen und $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$. Da M_α offen ist, existiert ein $\varepsilon_\alpha > 0$ mit $U_{\varepsilon_\alpha}(x) \subset M_\alpha$. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_\alpha : \alpha \in I\}$ gilt dann $U_\varepsilon(x) \subset M_\alpha$ für alle $\alpha \in I$, also $U\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$.
   Die Behauptung für abgeschlossene Mengen ergibt sich wieder durch Komplementbildung.

□

Bemerkung 15.2 Die Aussagen von 15.1.2 sind im Allgemeinen falsch für unendliche Indexmengen I. Ist etwa $(X, d) = (R, d_{|\cdot|})$, so ist für die offene Mengen

$$M_n := \big(- 1/n, 1/n\big) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

der abzählbare Schnitt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n = \{0\}$$

nicht mehr offen. Durch Komplementbildung sieht man, dass auch unendliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen im Allgemeinen nicht mehr abgeschlossen sind.

Definition 15.3 Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$.

1. Die Menge

   $$M^0 := \bigcup_{\substack{0\subset M\\ 0 \text{ offen}}} \mathcal{O}$$

   heißt *innerer Kern* (oder *Inneres*) von M.

   Jedes $x \in M^0$ heißt *innerer Punkt* von M.

2. Die Menge

   $$\overline{M} := \bigcap_{\substack{A\supset M\\ A \text{ abgeschlossen}}} A$$

   heißt *abgeschlossene Hülle* (oder *Abschluss*) von M.

3. Die Menge $\partial M := \overline{M} \setminus M^0$ heißt *Rand* von M.

4. M heißt *dicht* (in X), falls $\overline{M} = X$ gilt.

Bemerkung 15.4 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Aus S. 15.1 ergibt sich sofort, dass für jede Menge $M \subset X$ das Innere M^0 offen und der Abschluss $\overline{M}$ abgeschlossen sind. Außerdem folgt aus $\partial M = \overline{M} \cap (M^0)^c$ auch, dass ∂M abgeschlossen ist. Weiter ist M genau dann offen, wenn $M = M^0$ gilt, und genau dann abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$ gilt ([Ü]). Schließlich gilt (auch [Ü])

$$M^0 = \{x \in M : \exists\, \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset M\}$$

und

$$\overline{M} = \{x \in X : \exists\, (x_n) \text{ in } M : x_n \to x\, (n \to \infty)\}$$

Beispiel 15.5 1. Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_{|\cdot|}) = (\mathbb{R}^d, d_{\|\cdot\|_2})$. Ist

$$M := \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = |x|^2 < 1, x_1 > 0\big\},$$

so ist

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1, x_1 \ge 0\big\} \\ M^0 &= \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_1 > 0\big\} \end{aligned}$$

und

$$\partial M = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 > 0\big\} \cup \big(\{0\} \times [-1,1]\big).$$

2. Ist $(X,d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, so gilt

$$\mathbb{Q}^0 = \emptyset, \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \qquad \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.

Definition 15.6 Ein Vektor $\zeta \in \mathbb{R}^d$ mit $|\zeta| = 1$ heißt *Richtung* in $\mathbb{R}^d$. Weiter setzen wir für $A \subset \mathbb{K}^d$, $x \in \mathbb{K}^d$ und $B \subset \mathbb{K}$

$$A \pm x := \{a \pm x : a \in A\}, \quad x \pm A := \{x \pm a : a \in A\}, \quad B \cdot x := \{tx : t \in B\}\ .$$

Damit ist für eine Richtung ζ in $\mathbb{R}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$ durch $x + \mathbb{R} \cdot \zeta$ die Gerade durch x in Richtung ζ gegeben. Ist speziell $\zeta = e^{(k)}$ der k-te Einheitsvektor, so ist $x + \mathbb{R} \cdot e^{(k)}$ die Gerade durch x parallel zur k-ten Koordinatenachse.

Definition 15.7 Es seien $M \subset \mathbb{R}^d$ und $f : M \to \mathbb{K}$. Ferner sei $x^{(0)} \in M$.

1. Ist $x^{(0)}$ Häufungspunkt von M, so heißt f *differenzierbar* an der Stelle $x^{(0)}$, falls ein Vektor $c \in \mathbb{K}^d$ und eine Funktion $\varepsilon : M_0 := (M - x^{(0)}) \setminus \{0\} \to \mathbb{K}$ existieren mit
$$f(x^{(0)} + h) = f(x^{(0)}) + c^T h + |h|\varepsilon(h)$$
und $\varepsilon(h) \to 0$ für $h \to 0$.

2. Ist ζ eine Richtung in $\mathbb{R}^d$, so heißt f *differenzierbar* an $x^{(0)}$ *in Richtung* ζ, falls $f_{|M\cap(x^{(0)}+\mathbb{R}\cdot\zeta)}$ an $x^{(0)}$ differenzierbar ist. Ist speziell $\zeta = e^{(k)}$, so sagt man auch, f sei *partiell differenzierbar* an $x^{(0)}$ *nach der k-ten Variablen.*

Bemerkung 15.8 Man sieht leicht: f ist genau dann differenzierbar an $x^{(0)}$ in Richtung ζ, falls die Funktion $g = g_{x^{(0)},\zeta} : \{t \in \mathbb{R} : x^{(0)} + t\zeta \in M\} \to \mathbb{K}$, definiert durch

$$g(t) := f(x^{(0)} + t\zeta),$$

differenzierbar an 0 (im Sinne von D. 12.1) ist. Außerdem gilt in diesem Fall $c^T\zeta = g'(0)$. Wir nennen dann

$$\partial_\zeta f(x^{(0)}) := \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x^{(0)}) := g'(0)$$

die *Richtungsableitung* von f an $x^{(0)}$ *in Richtung* ζ.
Ist wieder speziell $\zeta = e^{(k)}$, so schreiben wir auch $\partial_k f(x^{(0)})$ statt $\partial_{e^{(k)}} f(x^{(0)})$ und sprechen von der *partiellen Ableitung* von f an $x^{(0)}$ *nach der* k*-ten Variablen.*
Dies zeigt, dass Richtungs- und partielle Ableitungen nicht anderes als Ableitungen von Funktionen einer (reellen) Variablen sind. Folglich stehen auch alle Rechenregeln und Ergebnisse aus Abschnitt 12 hier zur Verfügung.
Besonders einfach ist die Situation für partielle Ableitungen: Ist $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_d^{(0)}) \in \mathbb{R}^d$, so ist für $k = 1, \ldots, d$

$$\begin{aligned}\partial_k f(x^{(0)}) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^{(0)} + t\cdot e^{(k)}) - f(x^{(0)})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)} + t, x_{k+1}^{(0)}, \ldots, x_d^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t} .\end{aligned}$$

Man sieht, dass $\partial_k f(x^{(0)})$ sich darstellt als die Ableitung der Funktion

$$x_k \mapsto f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_d)$$

bei festgehaltenen Variablen $x_1, \ldots, x_{k-1}$ und $x_{k+1}, \ldots, x_d$ (diese werden sozusagen als Parameter aufgefasst).

Im Falle $d = 2$ schreibt man meist "$f(x, y)$" statt "$f(x_1, x_2)$". In diesem Falle sprechen wir auch von den partiellen Ableitungen nach x bzw. y und schreiben für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ auch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{bzw.} \qquad f_x(x_0, y_0)$$

sowie

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \text{bzw.} \qquad f_y(x_0, y_0) .$$

Entsprechend schreiben wir im Falle $d = 3$ oft "$f(x, y, z)$" statt "$f(x_1, x_2, x_3)$" und

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \qquad \text{bzw.} \qquad f_x, f_y, f_z .$$

Beispiel 15.9 1. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^2 + y$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Dann gilt für $\zeta = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ und $x^{(0)} = (0, 0)$

$$g(t) = f\Big((0,0) + t(\cos\varphi, \sin\varphi)\Big) = t^2\cos^2\varphi + t\sin\varphi \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

Damit erhalten wir

$$\partial_\zeta f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}(0,0) = f_\zeta(0,0)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\cos^2\varphi + t\sin\varphi}{t} = \sin\varphi .$$

Weiter gilt für allgemeines $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_1 f(x_0, y_0) \left(= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\right) = 2x_0$$

und

$$\partial_2 f(x_0, y_0) \left(= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)\right) = 1$$

2. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}) .$$

Dann gilt für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x, y, z) \quad & \Big(= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \;=\; f_x(x, y, z)\Big) \;=\; y^2z^3 \\
\partial_2 f(x, y, z) \quad & \Big(= \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \;=\; f_y(x, y, z)\Big) \;=\; 2xyz^3 \\
\partial_3 f(x, y, z) \quad & \Big(= \tfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \;=\; f_2(x, y, z)\Big) \;=\; 3xy^2z^2 .
\end{aligned}$$

Bemerkung und Definition 15.10 1. Ist ζ eine Richtung so, dass $x^{(0)}$ Häufungspunkt von $M \cap (x^{(0)} + \mathbb{R}\zeta)$ ist, so folgt aus der Differenzierbarkeit von f an $x^{(0)}$ insbesondere die Differenzierbarkeit in Richtung ζ (unmittelbar aus der Definition), und es gilt $c^T\zeta = \partial_\zeta f(x^{(0)})$ für jedes c wie in der Definition. Insbesondere ist also im Falle, dass $x^{(0)}$ ein innerer Punkt von M ist (d. h. $x^{(0)} \in M^0$) dies für alle Richtungen ζ der Fall.
2. Ist $x^{(0)}$ Häufungspunkt von $M \cap (x^{(0)} + \mathbb{R}e^{(k)})$ für $k = 1, \ldots, d$, und ist f differenzierbar an $x^{(0)}$, so existieren nach 1. die partiellen Ableitungen $\partial_k f(x^{(0)})$ für $k = 1, \ldots, d$, und in diesem Falle gilt

$$c^T = (c_1, \ldots, c_d) = (c^Te^{(1)}, \ldots, c^Te^{(d)}) = \big(\partial_1 f(x^{(0)}), \ldots, \partial_d f(x^{(0)})\big)$$

(also ist c aus D. 15.7 insbesondere eindeutig bestimmt!).
Der Vektor c heißt dann *Gradient* von f an $x^{(0)}$ und wir schreiben

$$\mathrm{grad} f(x^{(0)}) := \nabla f(x^{(0)}) := c.$$

Schließlich nennt man die lineare Abbildung $h \mapsto c^Th$ (oder auch kurz den Vektor c) *Ableitung* von f an $x^{(0)}$.

Satz 15.11 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ und $x^{(0)} \in M$. Ferner sei $f : M \to \mathbb{K}$ differenzierbar an $x^{(0)}$. Dann gilt:*
1. f ist stetig an $x^{(0)}$.
2. Ist $x^{(0)} \in M^0$, so existiert $\partial_\zeta f(x^{(0)})$ für alle Richtungen ζ, und es gilt

$$\partial_\zeta f(x^{(0)}) = \mathrm{grad}^T f(x^{(0)}) \cdot \zeta. \tag{15.1}$$

Beweis. 1. Folgt aus $c^T h + |h|\varepsilon(h) \to 0$ für $h \to 0$.
2. Da $x^{(0)}$ innerer Punkt von M ist, existiert $\partial_\zeta f(x^{(0)})$ für alle Richtungen ζ. Außerdem ist nach B. 15.8 und B. 15.10.2

$$\partial_\zeta f(x^{(0)}) = c^T \zeta = \operatorname{grad}^T f(x^{(0)}) \cdot \zeta.$$

□

Beispiel 15.12 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dann gilt für $(x_0, y_0) \neq (0,0)$:

$$\partial_1 f(x_0,y_0) = \frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} - \frac{2x_0^2 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}$$

und

$$\partial_2 f(x_0,y_0) = \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} - \frac{2x_0 y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} \ .$$

Für $(x_0,y_0) = (0,0)$ gilt

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

und

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

Also existieren die partiellen Ableitungen in allen Punkten (x_0, y_0).
Die Funktion f ist allerdings nicht stetig (und damit auch nicht differenzierbar) an der Stelle $(0,0)$, denn für $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ gilt

$$f(x_n,y_n) = \frac{1/n^2}{1/n^2+1/n^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \qquad (n\to\infty) \ .$$

Bemerkung 15.13 Es seien $M \subset \mathbb{R}^d$, $x \in M$ und ζ eine Richtung. Ist $f : M \to \mathbb{K}$ differenzierbar auf M in Richtung ζ und ist $I \subset \mathbb{R}$ so, dass $x + I\zeta \subset M$, so ist $g : I \to \mathbb{K}$ mit

$$g(t) := f(x+t\zeta) \qquad (t \in I)$$

differenzierbar auf I mit $g'(t) = \partial_\zeta f(x+t\zeta)$.
(Denn: Für $h_t : I - t \to \mathbb{K}$,

$$h_t(s) := f(x+t\zeta+s\zeta) \qquad (s \in I-t)$$

gilt $h_t'(0) = \partial_\zeta f(x+t\zeta)$ nach Definition der Richtungsableitung. Weiter ist $g(\cdot+t) = h_t$, also $g'(t) = h_t'(0)$.)

Wir setzen für $x, y \in \mathbb{K}^d$

$$I[x,y] := \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\}$$

und

$$I(x,y) := I[x,y] \setminus \{x,y\}.$$

Unter Verwendung von (15.1) erhalten wir damit

Satz 15.14 *(Mittelwertsatz)*
Es seien $M \subset \mathbb{R}^d$ und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig auf M. Ferner seien $x, y \in M, x \neq y$ und ζ eine Richtung.
1. Ist f differenzierbar auf M^0 in Richtung ζ und ist I ein Intervall mit $x + I\zeta \subset M$ sowie $x + I^0\zeta \subset M^0$, so existiert zu jedem $0 \neq t \in I$ ein $\xi \in I(x, x+t\zeta)$ mit

$$f(x+t\zeta) - f(x) = \partial_\zeta f(\xi)t.$$

2. Ist f differenzierbar auf M^0, so existiert ein $\xi \in I(x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = \operatorname{grad}^T f(\xi)(y-x).$$

Beweis. 1. Ist $g : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(t) := f(x+t\zeta) \qquad (t \in I),$$

so ist g stetig auf I und nach B. 15.13 differenzierbar auf I^0 mit $g'(t) = \partial_\zeta f(x+t\zeta)$. Nach dem Mittelwertsatz für Funktionen einer Variablen existiert zu jedem $t \in I$ ein $\tau \in I(0,t)$ mit

$$f(x+t\zeta) - f(x) = g(t) - g(0) = g'(\tau)t = \partial_\zeta f(x+\tau\zeta)t.$$

Für $\xi := x + \tau\zeta \in I(x, x+t\zeta)$ ergibt sich die Behauptung.
2. Ist f sogar differenzierbar auf M^0, so folgt aus 1. mit $t = |y-x|$, $I := [0, |y-x|]$ und

$$\zeta := (y-x)/|y-x|$$

in Verbindung mit (15.1) zudem

$$f(y) - f(x) = \partial_\zeta f(\xi)|y-x| = \operatorname{grad}^T f(\xi)(y-x).$$

□

B. 15.12 zeigt, dass die Existenz der partiellen Ableitungen i. A. (anders als im Fall $d = 1$) noch nicht die Stetigkeit impliziert. Man beachte allerdings, dass dort die partiellen Ableitungen in der Nähe von $(0,0)$ unbeschränkt und damit insbesondere unstetig sind (für $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ ist

$$\partial_1 f(0, y_0) = 1/y_0\ , \qquad \partial_2 f(x_0, 0) = 1/x_0\ ).$$

Es gilt jedoch

Satz 15.15 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^d$ und $f : M \to \mathbb{K}$. Ist $x^{(0)} \in M^0$ so, das für ein $R > 0$ die partiellen Ableitungen $\partial_k f$ für $k = 1, \ldots, d$ auf $U_R(x^{(0)})$ existieren und stetig an $x^{(0)}$ sind, so ist f differenzierbar an $x^{(0)}$.*

Beweis. Wir können uns auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränken (ansonsten: $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ betrachten). Außerdem sei ohne Einschränkung $x^{(0)} = 0$.
Wir zeigen

$$\frac{1}{|h|}\big(f(h) - f(0) - \operatorname{grad}^T f(0) \cdot h\big) \to 0 \qquad (h \to 0),$$

was äquivalent zur Differenzierbarkeit an 0 ist.
Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$\big|\partial_k f(y) - \partial_k f(0)\big| < \frac{\varepsilon}{d}$$

für alle $y \in U_\delta(0)$ und $k = 1, \ldots, d$ gilt.
Ist $h \in U_\delta(0), h \neq 0$, so setzen wir

$$v^{(m)} := \sum_{k=1}^{m} h_k e^{(k)} \qquad (m = 0, \ldots, d)$$

(dann ist $v^{(0)} = 0$ und $v^{(d)} = \sum\limits_{k=1}^{d} h_k e^{(k)} = (h_1, \ldots, h_d) = h$). Also gilt (Teleskopsumme)

$$f(h) - f(0) = \sum_{k=1}^{d} \big(f(v^{(k)}) - f(v^{(k-1)})\big).$$

Wegen $|v^{(k)}| \leq |h| < \delta$ ist $v^{(k)} \in U_\delta(0)$ für $k = 0, \ldots, d$.
Außerdem ist $v^{(k)} = v^{(k-1)} + h_k e^{(k)}$, also folgt aus dem Mittelwertsatz die Existenz eines $\xi^{(k)} \in U_\delta(0)$ mit

$$f(v^{(k)}) - f(v^{(k-1)}) = \partial_k f(\xi^{(k)}) \cdot h_k\,.$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|h|}\big|f(h) - f(0) - \operatorname{grad}^T f(0) \cdot h\big| \leq \\
&\leq \frac{1}{|h|} \sum_{k=1}^{d} \big|f(v^{(k)}) - f(v^{(k-1)}) - \partial_k f(0) \cdot h_k\big| \\
&= \frac{1}{|h|} \sum_{k=1}^{d} \big|\big(\partial_k f(\xi^{(k)}) - \partial_k f(0)\big) h_k\big| \leq \frac{1}{|h|} \frac{\varepsilon}{d} \sum_{k=1}^{d} |h_k| \leq \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 15.16 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = e^{xy^2} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

Dann sind die partiellen Ableitungen

$$\partial_1 f(x, y) = y^2 e^{xy^2} \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x, y) = 2xye^{xy^2}$$

stetig auf $\mathbb{R}^2$. Also ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ nach S. 15.15.

Wir wollen zum Schluss des Abschnitts noch einmal kurz auf die geometrische Bedeutung der Ableitung im Mehrdimensionalen eingehen.

Bemerkung 15.17 Ist $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x \in M^0$ mit $\text{grad} f(x) \neq 0$, so gilt für jede Richtung ζ nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|\partial_\zeta f(x)| = |\text{grad}^T f(x) \cdot \zeta| \leq |\text{grad} f(x)| \cdot |\zeta| = |\text{grad} f(x)| \ .$$

Speziell ist dabei für $\zeta^* = \text{grad} f(x)/|\text{grad}\, f(x)|$ (die sog. Gradientenrichtung)

$$\partial_{\zeta^*} f(x) = \text{grad}^T\, f(x) \cdot \zeta^* = \frac{1}{|\text{grad}\, f(x)|} \text{grad}^T f(x) \cdot \text{grad}\, f(x) = |\text{grad}\, f(x)|$$

und entsprechend

$$\partial_{-\zeta^*} f(x) = -|\text{grad}\, f(x)| \ .$$

Angesichts des Mittelwertsatzes kann man also die Gradientenrichtung als die "Richtung des steilsten Anstiegs" von f und die negative Gradientenrichtung ist die "Richtung des steilsten Abstiegs" von f ansehen.
Außerdem gilt für $\zeta^{(0)} \perp \ \text{grad}\, f(x)$

$$\partial_{\zeta^{(0)}} f(x) = \ \text{grad}^T f(x) \cdot \zeta^{(0)} = 0\, .$$

d. h. die Richtungsableitungen der zur Gradientenrichtung senkrechten Richtungen verschwinden.
Diese Erkenntnisse werden sich als grundlegend für die mehrdimensionale Optimierung erweisen.

Beispiel 15.18 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \ .$$

Dann gilt

$$\text{grad}\, f(x, y) = (2x, 2y)^T \ .$$

Betrachtet man etwa $(1, 1)$, so ist für $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)^T$ mit $|\zeta| = 1$

$$\partial_\zeta f(1, 1) = \text{grad}^T\, f(1, 1) \cdot \zeta = (2, 2) \cdot \zeta = 2\zeta_1 + 2\zeta_2 \ .$$

Für $\zeta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ ist $\partial_{\zeta^*} f(1, 1) = 2\sqrt{2} = |\text{grad}\, f(1, 1)|$, und für $\zeta^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$ ist $\partial_{\zeta^{(0)}} f(1, 1) = 0$.

16 Taylorsatz und Extremstellen von Funktionen mehrerer Variablen

Wir beschäftigen uns zunächst mit Ableitungen höherer Ordnung.

Definition 16.1 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ und $f : M \to \mathbb{K}$. Ferner sei $x^{(0)} \in M$.
1. Sind $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots$ Richtungen in $\mathbb{R}^d$, so definieren wir induktiv für $\ell \geq 2$ (soweit existent!)

$$(\partial_{\zeta^{(\ell)}} \ldots \partial_{\zeta^{(1)}} f)(x^{(0)}) := \partial_{\zeta^{(\ell)}}(\partial_{\zeta^{(\ell-1)}} \ldots \partial_{\zeta^{(1)}} f)(x^{(0)})$$

(*Richtungsableitungen der Ordnung* ℓ). Für $\zeta^{(1)} = \ldots = \zeta^{(\ell)} =: \zeta$ schreiben wir kurz $\partial_\zeta^\ell f(x^{(0)})$.

2. Sind Speziell $\zeta^{(1)} = e^{(k_1)}, \ldots, \zeta^{(\ell)} = e^{(k_\ell)}$, so schreibt man wieder

$$(\partial_{k_\ell} \ldots \partial_{k_1} f)(x^{(0)}) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^\ell f}{\partial x_{k_\ell} \ldots \partial x_{k_1}}(x^{(0)})$$

an Stelle von $(\partial_{\zeta^{(\ell)}} \ldots \partial_{\zeta^{(1)}} f)(x^{(0)})$ (*partielle Ableitungen der Ordnung* ℓ). Für $k_1 = \ldots = k_\ell =: k$ schreibt man kurz $\partial_k^\ell f(x^{(0)})$ bzw. $\frac{\partial^\ell f}{\partial x_k^\ell}(x^{(0)})$.

(Bei zwei Variablen schreibt man meist (x, y) statt (x_1, x_2) und bei drei Variablen meist (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3).)

3. Schließlich setzen wir noch $\partial_\zeta^0 f := f$ und $\partial_k^0 f := f$ (d.h. die Richtungs- bzw. partiellen Ableitungen der Ordung 0 sind f selbst).

Beispiel 16.2 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x^2 y \qquad (x, y \in \mathbb{R}) .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \\
\partial_2 f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 \\
\partial_1^2 f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y \\
\partial_2 \partial_1 f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2x \\
\partial_1 \partial_2 f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x \\
\partial_2^2 f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 .
\end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass $\partial_2\partial_1 f = \partial_1\partial_2 f$ gilt.
Weiter erhalten wir etwa

$$\begin{aligned}\partial_1\partial_2\partial_1 f(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y) = 2\\ \partial_2\partial_1^2 f(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y) = 2\end{aligned}$$

also ist $\partial_1\partial_2\partial_1 f = \partial_2\partial_1^2 f$. Man sieht, dass die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen gebildet werden, vertauscht werden kann.

Wir beweisen ganz allgemein für partielle Ableitungen der Ordnung 2:

Satz 16.3 *(Schwarz)*
Es seien $M \subset \mathbb{R}^d$ sowie $x^{(0)} \in M^0$, und es seien $p, q \in \{1, \dots, d\}$. Ferner sei $f : M \to \mathbb{K}$ so, dass $\partial_p f$, $\partial_q f$ und $\partial_q\partial_p f$ auf $U_R(x^{(0)})$ für ein $R > 0$ existieren. Ist $\partial_q\partial_p f$ stetig an $x^{(0)}$, so existiert auch $\partial_p\partial_q f(x^{(0)})$ und es gilt

$$\partial_p\partial_q f(x^{(0)}) = \partial_q\partial_p f(x^{(0)}) \ .$$

Beweis. O. E. können wir $d = 2$ sowie $p = 1, q = 2$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen. Außerdem sei o. E. $x^{(0)} = 0$.
Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 < R^2$. Wir setzen

$$\Delta(x,y) := f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0) = g(x,y) - g(0,y)$$

mit $g(x,y) := f(x,y) - f(x,0)$.
Zwei Anwendungen des Mittelwertsatzes zeigen, dass ein $\xi = \xi(x,y) \in I[0,x]$ und ein $\eta = \eta(x,y) \in I[0,y]$ existieren mit

$$\Delta(x,y) = \partial_1 g(\xi,y)\cdot x = [\partial_1 f(\xi,y) - \partial_1 f(\xi,0)]\cdot x = \partial_2\partial_1 f(\xi,\eta)\cdot x\cdot y$$

Nun geben wir $\varepsilon > 0$ vor. Da $\partial_2\partial_1 f$ stetig an $(0,0)$ ist, existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle x, y mit $|x| < \delta$ und $|y| < \delta$

$$|\partial_2\partial_1 f(\xi,\eta) - \partial_2\partial_1 f(0,0)| < \varepsilon$$

gilt. Also erhalten wir für $0 < |x|, |y| < \delta$

$$\left|\frac{\Delta(x,y)}{x\cdot y} - \partial_2\partial_1 f(0,0)\right| < \varepsilon \ .$$

Beachtet man, dass bei festem x

$$\lim_{y\to 0}\frac{\Delta(x,y)}{xy} = \frac{\partial_2 f(x,0) - \partial_2 f(0,0)}{x}$$

ist, so erhält man auch

$$\left| \frac{\partial_2 f(x,0) - \partial_2 f(0,0)}{x} - \partial_2\partial_1 f(0,0) \right| \le \varepsilon$$

für alle x mit $0 < |x| < \delta$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, existiert $\partial_1\partial_2 f(x_0, y_0)$ und es gilt

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) = \partial_2\partial_1 f(0,0) \ .$$

□

Bemerkung und Definition 16.4 1. Ist $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und ist $n \in \mathbb{N}_0$, so bezeichnen wir mit $C^n(U) := C^n(U, \mathbb{K})$ die Menge aller Funktionen $f : U \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass die partiellen Ableitungen der Ordnung $(\le)\, n$ auf U existieren und dort stetig sind. Außerdem setzen wir

$$C^\infty(U) := C^\infty(U, \mathbb{K}) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C^n(U, \mathbb{K}) \ .$$

Durch mehrfache Anwendung von S. 16.3 sieht man: Ist $f \in C^n(U)$ und sind $k_1, \ldots, k_n \in \{1, \ldots, d\}$, so gilt für jede Permutation $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$:

$$\partial_{k_n} \ldots \partial_{k_1} f(x) = \partial_{k_{p(n)}} \ldots \partial_{k_{p(1)}} f(x) \qquad (x \in U) \ ,$$

d. h. die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen $\partial_{k_1}, \ldots, \partial_{k_n}$ gebildet werden, spielt keine Rolle.

2. Die Aussage von 1. wird i. A. falsch, wenn man auf die Voraussetzung der Stetigkeit der partiellen Ableitungen der Ordnung n verzichtet. So kann man etwa für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

zeigen ([Ü]): Alle partiellen Ableitungen der Ordnung 2 existieren auf $\mathbb{R}^2$ und sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, aber es gilt

$$\partial_2\partial_1 f(0,0) = -1 \ , \quad \partial_1\partial_2 f(0,0) = 1 \ .$$

Wir wollen uns nun einem weiteren zentalen Ergebnis der Analysis zuwenden, dem Taylor-Satz. Wir beweisen zunächst eine Richtungsversion. Dazu setzen wir für eine Richtung ζ

$$C^n_\zeta(U) := \{ f : U \to \mathbb{K} : \partial^n_\zeta f \text{ existiert auf } U \text{ und ist stetig} \} \ .$$

Satz 16.5 *(Taylor für Richtungen)*
Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, und es seien $n \in \mathbb{N}_0$ sowie ζ eine Richtung. Ferner seien $f \in C_\zeta^{n+1}(U)$ und $x \in U$. Ist I ein Intervall mit $x + I\zeta \subset U$, so gilt für alle $t \in I$

$$f(x+t\zeta) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\partial_\zeta^\nu f(x)}{\nu!} t^\nu + \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n \partial_\zeta^{n+1} f(x+s\zeta)\, ds\ .$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach n.
1. Induktionsanfang $n = 0$: Aus $f \in C_\zeta^1(U)$ folgt nach dem HDI, Teil 2 (angwandt auf $s \mapsto f(x+s\zeta)$)

$$f(x+t\zeta) - f(x) = \int_0^t \partial_\zeta f(x+s\zeta)\, ds\ .$$

2. Induktionsschritt $n-1 \to n$: Es sei $f \in C_\zeta^{n+1}(U)$. Ist $g(s) := \partial_\zeta^n f(x+s\zeta)$ für $s \in I[0,t]$, so ist $g'(s) = \partial_\zeta^{n+1} f(x+s\zeta)$. Also gilt nach Induktionsannahme und mit partieller Integration

$$\begin{aligned} f(x+t\zeta) \quad &- \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\partial_\zeta^\nu f(x)}{\nu!} t^\nu = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \partial_\zeta^n f(x+s\zeta)\, ds \\ &= \quad \frac{1}{(n-1)!} \left[-\frac{(t-s)^n}{n} \partial_\zeta^n f(x+s\zeta)\Big|_0^t + \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n} \partial_\zeta^{n+1} f(x+s\zeta)\, ds \right] \\ &= \quad \frac{t^n}{n!} \partial_\zeta^n f(x) + \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n \partial_\zeta^{n+1} f(x+s\zeta)\, ds\ . \end{aligned}$$

□

Bemerkung 16.6 Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so existiert (unter den Bedingungen des Taylor-Satzes) ein $\xi = \xi_{x,t} \in I[x, x+t\zeta]$ so, dass

$$\frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n \partial_\zeta^{n+1} f(x+s\zeta)\, ds = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \partial_\zeta^{n+1} f(\xi)\ .$$

(Denn: Man kann zeigen ([Ü]), dass folgende Variante eines (eindimensionalen) Mittelwertsatzes gilt: Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und sind $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sowie $g \in R[a,b]$ mit $g \geq 0$ auf $[a,b]$ (oder $g \leq 0$ auf $[a,b]$), so existiert ein $\tau \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b hg = h(\tau) \int_a^b g$$

Wendet man dies auf $g(s) := (t-s)^n/n!$ und $h(s) := \partial_\zeta^{n+1} f(x+s\zeta)$ mit $[a,b] := I[0,t]$ an, und beachtet man, dass

$$\frac{1}{n!}\int_0^t (t-s)^n \, ds = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

gilt, so ergibt sich die Existenz eines $\tau \in I[0,t]$ mit

$$\frac{1}{n!}\int_0^t (t-s)^n \partial_\zeta^{n+1} f(x+s\zeta)\, ds = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\partial_\zeta^{n+1} f(x+\tau\zeta)\ .$$

Für $\xi := x + \tau\zeta$ ergibt sich die Behauptung.)

Wir wollen uns in einer zweiten Version von der Vorgabe einer bestimmten Richtung befreien. Dazu setzen wir zur Abkürzung für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^d \alpha_j, \qquad \alpha! = \prod_{j=1}^d (\alpha_j!), \qquad \partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}$$

und für $h = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{R}^d$

$$h^\alpha := \prod_{j=1}^d h_j^{\alpha_j}.$$

In Verallgemeinerung von (15.1) beweisen wir zunächst

Satz 16.7 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und es sei $f \in C^n(U)$. Dann ist $f \in C_\zeta^n(U)$ für alle Richtungen ζ und es gilt mit $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$*

$$\partial_\zeta^n f(x) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\{1,\ldots,d\}^n} (\partial_{k_n} \ldots \partial_{k_1} f)(x) \cdot \zeta_{k_1} \cdots \zeta_{k_n} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,\, |\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x)\zeta^\alpha. \tag{16.1}$$

Beweis. 1. Wir beweisen die erste Gleichung per Induktion nach n.
$n = 1$: Ist $f \in C^1(U)$, so folgt aus S. 15.15, dass f differenzierbar auf U ist. Aus (15.1) erhalten wir

$$\partial_\zeta^1 f(x) = \partial_\zeta f(x) = \operatorname{grad}^T f(x) \cdot \zeta = \sum_{k_1=1}^d \partial_{k_1} f(x) \cdot \zeta_{k_1}\ .$$

$n \to n+1$: Da $f \in C^{n+1}(U)$ ist, folgt $\partial_\zeta^n f \in C^1(U)$ mit der Induktionsvoraussetzung (man beachte: $x \mapsto \partial_\zeta^n f(x)$ ist eine Linearkombination von partiellen Ableitungen der Ordnung n). Also ergibt sich wie oben beim Induktionsanfang

$$\begin{aligned}\partial_\zeta^{n+1} f(x) &= \partial_\zeta(\partial_\zeta^n f)(x) = \operatorname{grad}^T (\partial_\zeta^n f)(x) \cdot \zeta \\ &= \sum_{k_{n+1}=1}^d \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^d \partial_{k_{n+1}}(\partial_{k_n} \ldots \partial_{k_1} f)(x)\zeta_{k_1} \cdots \zeta_{k_n} \cdot \zeta_{k_{n+1}}\ ,\end{aligned}$$

woraus die Behauptung für $n+1$ folgt.
2. Nach B. 16.4 kann man die Reihenfolgen der partiellen Ableitungen in der ersten Summe beliebig permutieren. Da $\frac{n!}{\alpha_1!\ldots\alpha_d!}$ Tupel $(k_1,\ldots,k_n) \in \{1,\ldots,d\}^n$ existieren, bei denen die Zahl $j \in \{1,\ldots,d\}$ genau α_j-mal vorkommt, ergibt sich auch die zweite Gleichung, also

$$\partial_\zeta^n f(x) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\mathbb{N}_0^d,\ \sum\limits_{j=1}^{d}\alpha_j=n} \frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_d!}(\partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_d^{\alpha_d} f)(x){\zeta_1}^{\alpha_1}\cdots{\zeta_d}^{\alpha_d}\ .$$

□

Beispiel 16.8 Wir werden nun sehr bescheiden und betrachten speziell die Fälle $n=0$ und $n=1$ im Taylor-Satz.
Ist $f \in C^1(U) = C^1(U,\mathbb{R})$, so ergibt sich für $h \in U-x$, $h \neq 0$ mit $\zeta := h/|h|$ und $t=|h|$ die Existenz eines $\xi \in I[x,x+h]$ so, dass

$$f(x+h) = f(x) + \partial_\zeta f(\xi)|h| = f(x) + \text{ grad}^T f(\xi) h$$

also wieder die Aussage des Mittelwertsatzes.
Ist sogar $f \in C^2(U)$, so gilt für $y \in U$ nach S. 16.7

$$\partial_\zeta^2 f(y) = \sum_{j,k=1}^{d} \partial_k\partial_j f(y)\zeta_j\zeta_k = \zeta^T Hf(y)\zeta\ ,$$

wobei

$$Hf(y) := \big(\partial_k\partial_j f(y)\big)_{j,k=1,\ldots,d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

die sog. *Hesse-Matrix* von f an der Stelle y bezeichnet. Damit erhalten wir mit einem $\xi \in I[x,x+h]$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \partial_\zeta f(x)|h| + \frac{1}{2}\partial_\zeta^2 f(\xi)|h|^2 \\ &= f(x^{(0)}) + \text{ grad}^T f(x)\zeta\cdot|h| + \frac{1}{2}\zeta^T Hf(\xi)\zeta\cdot|h|^2 \\ &= f(x) + \text{ grad}^T f(x)\cdot h + \frac{1}{2}h^T Hf(\xi)h\ . \end{aligned}$$

Man sieht also, dass die Richtung ζ am Ende nicht mehr auftaucht.

Satz 16.9 *(Taylor)*
Es seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^{n+1}(U,\mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.
Ist $x \in U$ und ist $h \in U-x$ so, dass $I[x,x+h] \subset U$ gilt, so existiert ein $\xi \in I[x,x+h]$ so, dass

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|\le n} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}h^\alpha + \sum_{|\alpha|=n+1}\frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!}h^\alpha.$$

Beweis. Ist $\zeta := h/|h|$ (ohne Einschränkung $h \neq 0$) und $I := I[0, |h|]$, so ergibt sich aus dem Taylor-Satz für Richtungen und (16.1) für ξ wie in B.16.6

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x+|h|\zeta) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} \zeta^\alpha |h|^\nu + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!} \zeta^\alpha |h|^{n+1} \\ &= \sum_{|\alpha|\leq n} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!} h^\alpha . \end{aligned}$$

□

Bemerkung 16.10 Der erste Summand $T_{n,x}(h) := \sum\limits_{|\alpha|\leq n} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha$ ist bei festem x ein Polynom der d Variablen $h_1, \ldots, h_d$ (vom Grad $\leq n$). Dieses Polynom heißt n-tes *Taylor-Polynom* von f bezüglich der Entwicklungsmitte x. Ist speziell $d = 1$, so ist

$$T_{n,x}(h) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} h^\nu \qquad (h \in \mathbb{R})$$

ein Polynom einer Variablen.
Der zweite Summand $\sum\limits_{|\alpha|=n+1} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!} h^\alpha$ heißt Restglied in *Lagrange-Form.*

Als wesentliche Anwendung des Taylor-Satzes werden wir nun ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema herleiten. Zunächst gilt folgendes wichtige **notwendige** Kriterium für Extremstellen.

Satz 16.11 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und es sei $f : U \to \mathbb{R}$. Ferner sei $x^{(0)} \in U$ so, dass* $\operatorname{grad} f(x^{(0)})$ *existiert. Hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Extremum, so ist $x^{(0)}$ ein kritischer Punkt, d. h.*

$$\operatorname{grad} f(x^{(0)}) = 0 .$$

Beweis. Es sei I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und so, dass $x^{(0)} + Ie^{(k)} \subset U$ für alle k gilt. Hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Extremum, so haben auch alle Funktionen $g_k : I \to \mathbb{R}$ mit

$$g_k(t) := f(x^{(0)} + te^{(k)}) \qquad (t \in I)$$

ein lokales Extremum an $t_0 = 0$. Also gilt nach S. 12.11

$$0 = g_k'(0) = \partial_k f(x^{(0)}) \qquad (k = 1, \ldots, d) .$$

□

Beispiel 16.12 1. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R}) .$$

Dann hat f an $(0,0)$ offenbar ein (sogar globales) Minimum. Es gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 2y)$, also tatsächlich $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$.
2. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R}) .$$

Dann gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -2y)$, also $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$. Trotzdem hat f an $(x_0, y_0) = (0,0)$ offenbar kein lokales Extremum, d. h. wie im Eindimensionalen ist die Bedingung "$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$" i. A. **nicht hinreichend** für das Vorliegen einer Extremstelle.

Satz 16.13 *Für $A \in \mathbb{K}^{m\times d}$ sei*

$$\|A\| := \sup\left\{|Ax| : x \in \mathbb{K}^d, |x| \leq 1\right\}.$$

Dann gilt:

1. *$\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $\mathbb{K}^{m\times d}$ (die sog. Operatornorm).*
2. *Für alle $x \in \mathbb{K}^d$ ist $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$.*
3. *Ist $A = (a_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,m\\ k=1,\ldots,d}}$, so ist*
$$\max_{j,k} |a_{jk}| \leq \|A\| \leq d\sqrt{m} \max_{j,k} |a_{jk}|.$$
4. *Ist $B \in \mathbb{K}^{p\times m}$, so ist $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$.*

Beweis.
1. Leicht.
2. Ohne Einschränkung sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$|Ax| = \left|A\Big(|x| \frac{x}{|x|}\Big)\right| = |x| \left|A\Big(\frac{x}{|x|}\Big)\right| \leq \|A\| \cdot |x|.$$

3.([Ü])
4. Für $x \in \mathbb{K}^d, |x| \leq 1$ gilt mit 2.

$$|BAx| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\|.$$

□

Ist $f \in C^2(U)$ für eine offene Menge U in $\mathbb{R}^d$, so ist die Hesse-Matrix

$$Hf(x) = \big(\partial_k \partial_j f(x)\big)_{j,k=1,\ldots,d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

nach dem Satz von Schwarz (S. 16.3) für alle $x \in U$ symmetrisch. Wir gehen daher kurz auf symmetrische Matrizen ein.

Definition 16.14 Wir setzen

$$S^{d-1} := \{\zeta \in \mathbb{R}^d : |\zeta| = 1\} \; (= \{\zeta : \zeta \text{ Richtung in } \mathbb{R}^d\}).$$

Ist $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch, so heißt A

1. *positiv definit*, falls $\zeta^T A\zeta > 0$ für alle $\zeta \in S^{d-1}$ gilt,
2. *positiv semidefinit*, falls $\zeta^T A\zeta \geq 0$ für alle $\zeta \in S^{d-1}$ gilt,
3. *negativ (semi-) definit*, falls $-A$ positiv (semi-) definit ist,
4. *indefinit*, falls A weder positiv noch negativ semidefinit ist.

Bemerkung 16.15 1. Da $Q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $Q(x) := x^T Ax$ homogen vom Grad 2 ist (d. h. $Q(tx) = t^2 Q(x)$ für alle $t > 0$ und alle x), gelten die Bedingungen in obiger Definition genau dann für alle $\zeta \in S^{d-1}$, wenn sie für alle $x \neq 0$ gelten.
2. Für Charakterisierungen der Definitheitsbegriffe aus D. 16.14 verweisen wir auf die Lineare Algebra. Erwähnt werden soll hier nur folgendes: Ist $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$ die Menge der Eigenwerte von A (das sog. Spektrum von A), so ist

$$\min_{\zeta \in S^{d-1}} \zeta^T A\zeta = \min \sigma(A) \quad \text{und} \max_{\zeta \in S^{d-1}} \zeta^T A\zeta = \max \sigma(A) \; .$$

Insbesodere folgt daraus

$$A \left\{ \begin{array}{l} \text{positiv definit} \\ \text{positiv semidefinit} \\ \text{negativ definit} \\ \text{negativ semidefinit} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \ldots, \lambda_d > 0 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_d \geq 0 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_d < 0 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_d \leq 0 \end{array} \right\} .$$

Weiter ergibt sich im Falle $d = 2$:
$A = (a_{jk})$ ist genau dann positiv definit (bzw. semidefinit), wenn $\det(A) > 0$ (bzw. ≥ 0) und $a_{11} > 0$ (bzw. $a_{11}, a_{22} \geq 0$) gilt. Entsprechend ist A ist genau dann negativ definit (bzw. semidefinit), wenn $\det(A) > 0$ (bzw. ≥ 0) und $a_{11} < 0$ (bzw. $a_{11}, a_{22} \leq 0$) gilt.

Es gilt nun folgendes für die mehrdimensionale Optimierung zentrale Resultat

Satz 16.16 *Es seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^2(U)$. Ferner sei $x^{(0)} \in U$ ein kritischer Punkt (d. h.* $\operatorname{grad} f(x^{(0)}) = 0$*). Dann gilt:*

1. *Ist $Hf(x^{(0)})$ positiv definit, so hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Minimum.*
2. *Ist $Hf(x^{(0)})$ negativ definit, so hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Maximum.*

3. *Hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Minimum, so ist $Hf(x^{(0)})$ positiv semidefinit.*

4. *Hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Maximum, so ist $Hf(x^{(0)})$ negativ semidefinit.*

Beweis. Es genügt, die Behauptungen 1. und 3. zu beweisen. Die Aussagen 2. und 4. ergeben sich dann durch Betrachtung von $-f$.
Dazu bemerken wir zunächst: Die Funktion $Hf : (U, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^{d\times d}, ||\cdot||)$ ist nach S. 16.13.3 stetig (man beachte: nach Voraussetzung ist $\partial_k\partial_j f$ stetig auf U für alle j,k).
1. Es sei $A := Hf(x^{(0)})$ positiv definit. Da die Funktion $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto x^T Ax \in \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}^d$ ist, und da S^{d-1} beschränkt und abgeschlossen, also kompakt ist, existiert

$$\min_{\zeta\in S^{d-1}} \zeta^T A\zeta =: \varepsilon > 0 \ .$$

Weiter existiert nach der Vorbemerkung ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ mit $||Hf(y) - A|| < \varepsilon$ für alle $y \in U_\delta(x^{(0)})$.
Es sei $x \in U_\delta(x^{(0)})$, $x \neq x^{(0)}$. Wir setzen

$$\zeta := \frac{x - x^{(0)}}{|x - x^{(0)}|}, \qquad t := |x - x^{(0)}|.$$

Nach dem Taylor-Satz für Richtungen und B. 16.6 (vgl. auch B. 16.8) existiert ein $\xi \in I[x, x^{(0)}] \subset U_\delta(x^{(0)})$ mit

$$\frac{f(x) - f(x^{(0)})}{t^2} = \frac{1}{2}\zeta^T Hf(\xi)\zeta = \frac{1}{2}\zeta^T (Hf(\xi) - A)\zeta + \frac{1}{2}\zeta^T A\zeta \ .$$

Weiter folgt mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung für beliebige Matrizen $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und Richtungen ζ

$$|\zeta^T B\zeta| \leq |\zeta| \cdot |B\zeta| \leq ||B|| \ .$$

Also ergibt sich

$$|\zeta^T (Hf(\xi) - A)\zeta \leq ||Hf(\xi) - A|| < \varepsilon$$

und folglich $f(x) > f(x^{(0)})$. Damit liegt an $x^{(0)}$ ein (sogar striktes) lokales Minimum vor.
2. Die Funktion f habe an $x^{(0)}$ ein lokales Minimum. Ferner sei ζ eine Richtung. Dann gilt für $|t|$ genügend klein

$$f(x^{(0)} + t\zeta) - f(x^{(0)}) \geq 0 \ .$$

Wieder nach dem Taylor-Satz für Richtungen und B. 16.6 existiert (für $t \neq 0$) ein $\xi_t \in I[x^{(0)}, x^{(0)} + t\zeta]$ mit

$$0 \leq \frac{f(x^{(0)} + t\zeta) - f(x^{(0)})}{t^2} = \frac{1}{2}\zeta^T Hf(\xi_t)\zeta$$

Aus $\xi_t \to x^{(0)}$ für $t \to 0$ folgt $||Hf(\xi_t) - A|| \to 0$ und damit (siehe 1.) auch $\zeta^T Hf(\xi_t)\zeta \to \zeta^T A\zeta$ für $t \to 0$. Also ist auch $\zeta^T A\zeta \geq 0$. □

Beispiel 16.17 1. Ist $f(x,y) = x^2 + y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$ (vgl. B. 16.12.1), so gilt

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

also ist Hf stets positiv definit. Insbesondere liegt am kritischen Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum vor.

2. Ist $f(x,y) = x^2 - y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$ (vgl. B. 16.12.2) so gilt

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Hier ist Hf stets indefinit. Also hat f nach S. 16.16.3./4. keine lokalen Extrema.

3. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (6(x^2 - x)\ ,\ 6(y^2 + y)) = (0,0)$$

genau dann, wenn $x \in \{0,1\}$ und $y \in \{0,-1\}$. Also haben wir die kritischen Stellen

$$(0,0)\ ,\ (0,-1)\ ,\ (1,0)\ ,\ (1,-1)\ .$$

Weiter gilt

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x - 6 & 0 \\ 0 & 12y + 6 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\begin{aligned} Hf(0,0) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit} \\ Hf(0,-1) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{negativ definit} \\ Hf(1,0) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{positiv definit} \end{aligned}$$

und

$$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit}$$

Damit ist f an $(0,-1)$ ein lokales Maximum, an $(1,0)$ ein lokales Minimum und ansonsten keine Extremstellen.

17 Hauptsätze der mehrdimensionalen Analysis

Wir werden uns in diesem Abschnitt mit zentralen Ergebnissen der mehrdimensionalen Analysis beschäftigen. Dazu starten wir mit einem sehr allgemeinen Hilfsresultat.

Satz 17.1 *(Banachscher Fixpunktsatz)*
Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und es sei $\varphi : X \to X$. Ferner existiere ein $\alpha < 1$ so, dass

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \alpha d(x, y) \qquad (x, y \in X)$$

*(eine Abbildung mit dieser Eigenschaft heißt α-*Kontraktion*). Dann existiert genau ein $x^* \in X$ mit $x^* = \varphi(x^*)$, also genau ein Fixpunkt von φ. Außerdem konvergiert für alle $x_0 \in X$ die Folge (x_n) mit*

$$x_{n+1} := \varphi(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

gegen x^* und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$d(x_n, x^*) \leq \alpha^n d(x_0, x^*) \left(\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \right) .$$

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \leq \alpha \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \alpha^n \cdot d(x_1, x_0) .$$

Also ist für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k d(x_1, x_0) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) . \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$, so existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon \qquad (n \geq N_\varepsilon) ,$$

also auch

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad (m > n \geq N_\varepsilon) .$$

Folglich ist (x_n) eine Cauchy-Folge in X. Da X vollständig ist, existiert ein $x^* \in X$ mit $x_n \to x^*$ $(n \to \infty)$. Da φ nach Voraussetzung insbesondere stetig auf X ist, gilt damit

$$x^* \leftarrow x_{n+1} = \varphi(x_n) \to \varphi(x^*) \qquad (n \to \infty)$$

d. h. $x^* = \varphi(x^*)$. Außerdem erhalten wir

$$d(x_n, x^*) = d(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x^*)) \leq \alpha d(x_{n-1}, x^*) \leq \ldots \leq \alpha^n d(x_0, x^*)$$

und zudem

$$d(x_0, x^*) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x^*) \leq d(x_0, x_1) + \alpha d(x_0, x^*) \ ,$$

also

$$(1 - \alpha) d(x_0, x^*) \leq d(x_0, x_1) \ .$$

Ist schließlich $\tilde{x}$ ein weiterer Fixpunkt von φ, so ist

$$d(\tilde{x}, x^*) = d(\varphi(\tilde{x}), \varphi(x^*)) \leq \alpha d(\tilde{x}, x^*) \ ,$$

also $d(\tilde{x}, x^*) = 0$. □

Definition 17.2 Es seien $M \subset \mathbb{R}^d$ und $f : M \to \mathbb{K}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Ist $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$ mit $f_j : M \to \mathbb{K}$, so heißtf *differenzierbar* an der Stelle $x^{(0)} \in M$, falls $f_1, \ldots, f_m$ differenzierbar an $x^{(0)}$ sind.

Bemerkung 17.3 1. Nach D.15.7 gilt: $f = (f_1, \ldots, f_m)$ ist genau dann differenzierbar an $x^{(0)}$, wenn eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{m \times d}$ und eine Funktion $\varepsilon : (M - x^{(0)}) \setminus \{0\} \to \mathbb{K}^m$ existieren mit

$$f(x^{(0)} + h) = f(x^{(0)}) + Ch + |h| \varepsilon(h)$$

und $\varepsilon(h) \to 0$ $(h \to 0)$.
Ist dabei $x^{(0)} \in M^0$ (oder allgemeiner Häufungspunkt von $M \cap (x^{(0)} + \mathbb{R}e^{(k)})$ für $k = 1, \ldots, d$), so ist nach B. 15.10.2 die Matrix C eindeutig bestimmt, und es gilt

$$C = \begin{pmatrix} \operatorname{grad}^T f_1(x^{(0)}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad}^T f_m(x^{(0)}) \end{pmatrix} =: Jf(x^{(0)}).$$

Diese Matrix heißt *Jacobi-Matrix* von f an der Stelle $x^{(0)}$. Schließlich heißt wieder die lineare Abbildung $h \mapsto Ch$ (bzw. kurz die Matrix C) *Ableitung* von f an $x^{(0)}$.

2. Genau wie beim Beweis zur eindimensionalen Kettenregel ergibt sich:
Sind $M \subset \mathbb{R}^d, L \subset \mathbb{R}^m$ und $f : M \to L$ differenzierbar an $x^{(0)}$ sowie $g : L \to \mathbb{K}^p$ differenzierbar an $y^{(0)} := f(x^{(0)})$, so ist auch $g \circ f$ differenzierbar an $x^{(0)}$. Ist dabei $x^{(0)} \in M$ und $y^{(0)} \in L^0$, so gilt die **Kettenregel**

$$J(g \circ f)(x^{(0)}) = (Jg)\big(f(x^{(0)})\big) \cdot (Jf)(x^{(0)}).$$

Beispiel 17.4 Es seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix} , \qquad g(u,v) := uv \ .$$

Dann gilt

$$(g \circ f)(x,y) = e^{2x} \cos y \sin y \ ,$$

also

$$\operatorname{grad}^T (g \circ f)(x,y) \Big(= J(g \circ f)(x,y) \Big) = (2e^{2x} \cos y \sin y \ , \ e^{2x}(\cos^2 y - \sin^2 y)) \ .$$

Andererseits gilt auch

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} ,$$

und

$$\operatorname{grad}^T g(u,v) = Jg(u,v) = (v,u) \ ,$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}^T g(f(x,y)) \cdot Jf(x,y) &= (e^x \sin y, e^x \cos y) \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \\ &= (2e^{2x} \sin y \cos y, e^{2x}(\cos^2 y - \sin^2 y)) \ . \end{aligned}$$

Bemerkung 17.5 1. Oft kann man die Kontraktionseigenschaft unter Ausnutzung folgender Eigenschaft differenzierbarer Funktionen nachweisen:
Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ und $f : M \to \mathbb{K}^m$ sei stetig auf M sowie differenzierbar auf M^0. Sind $x, y \in M$ mit $I(x,y) \subset M^0$, so existiert ein $\xi \in I(x,y)$ mit

$$|f(y) - f(x)| \leq ||Jf(\xi)|| \cdot |y - x| \ .$$

(Denn: O. E können wir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen (ansonsten: f als Funktion nach $\mathbb{R}^{2m}$ auffassen).
Es sei $g : M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(u) := (f(y) - f(x))^T f(u) \qquad (u \in M) \ .$$

Dann ist g stetig auf M und es gilt mit der Kettenregel

$$\operatorname{grad}^T g(u) = ((f(y) - f(x))^T (Jf)(u) \qquad (u \in M^0) \ .$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in I(x,y)$ so, dass

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)|^2 &= g(y) - g(x) = \operatorname{grad}^T g(\xi) \cdot (y - x) \\ &= (f(y) - f(x))^T Jf(\xi)(y - x) \leq |f(y) - f(x)| \cdot |Jf(\xi)(y - x)| \\ &\leq |f(y) - f(x)| \cdot ||Jf(\xi)|| \cdot |y - x| \ . \end{aligned}$$

Ist $f(x) = f(y)$, so ist die Behauptung klar und ist $f(x) \neq f(y)$ ergibt sich die Behauptung nach Division durch $|f(y) - f(x)|$.)

2. Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Wir verwenden im Weiteren folgende Variante des Banachschen Fixpunktsatzes (kurz BFS):
Ist $M \subset X$ und $\varphi : M \to X$ eine α-Kontraktion für ein $\alpha < 1$, so hat φ höchstens einen Fixpunkt. Ist zudem $\varphi(M_*) \subset M_*$ für eine Teilmenge M_* vom M, die abgeschlossen in X ist, so hat φ einen Fixpunkt in M_*.
(Denn: Man beachte, dass (M_*, d) ein vollständiger metrischer Raum ist, und dass der Eindeutigkeitsbeweis im BFS lediglich die Kontaktionseigenschaft verwendet.)

Wir beschäftigen uns nun mit der "lokalen Umkehrbarkeit" von Funktionen $f : M \to \mathbb{R}^d$, wobei $M \subset \mathbb{R}^d$. Ist $f : M \to N$ bijektiv, so bedeutet dies, dass für jedes $y = (y_1, \ldots, y_d) \in N$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_d) &= y_1 \\ &\vdots \\ f_d(x_1, \ldots, x_d) &= y_d \end{aligned}$$

genau eine Lösung $x = (x_1, \ldots, x_d) \in M$ besitzt. Betrachten wir zunächst zwei bekannte Spezialfälle:
1. Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definiert durch

$$f(x) := Ax \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist, so ist das lineare Gleichungssystem

$$Ax = f(x) = y$$

genau dann für alle $y \in \mathbb{R}^d$ eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$ ist. In diesem Falle ist also $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ bijektiv, und es gilt bekanntlich

$$x = f^{-1}(y) = A^{-1}y \qquad (y \in \mathbb{R}^d) .$$

2. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in \Omega$, so existiert ein $\delta > 0$ so, dass $f'(x)$ entweder durchgehend > 0 oder < 0 auf $U := U_\delta(x_0)$ und damit f streng monoton auf U ist. Also existiert $f^{-1} := (f_{|U})^{-1}$ auf $V = f(U)$ und es gilt für $y = f(x) \in V$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} .$$

Wir setzen für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $k, m \in \mathbb{N}$

$$C^k(\Omega, \mathbb{K}^m) := \{f = (f_1, \ldots, f_m)^T : \Omega \to \mathbb{K}^m : f_1, \ldots, f_m \in C^k(\Omega)\} .$$

Insbesondere gilt dabei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{K}^m)$ genau dann, wenn $f : \Omega \to \mathbb{K}^m$ differenzierbar und $Jf : \Omega \to \mathbb{K}^{m\times d}$ (versehen mit der Operatornorm $||\cdot||$) stetig ist.
(Dies ergibt sich leicht aus S. 16.13.3.)

Satz 17.6 *(Hauptsatz über Umkehrfunktionen)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, und es sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Ferner sei $x^{(0)} \in \Omega$ mit

$$\det Jf(x^{(0)}) \neq 0\ .$$

Dann gilt:

1. *Es existieren offene Umgebungen U von $x^{(0)}$ und V von $y^{(0)} := f(x^{(0)})$ so, dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist.*
2. *Ist $f^{-1} = (f_{|U})^{-1} : V \to U$, so ist $f^{-1} \in C^1(V, \mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$Jf^{-1}(y) = [Jf(x)]^{-1} \qquad (y = f(x) \in V)\ .$$

Beweis. 1. Wir setzen $A := Jf(x^{(0)})$. Nach Voraussetzung existiert $A^{-1}(\neq 0)$. Da $x \mapsto Jf(x)$ stetig auf Ω ist, existiert ein $\delta > 0$ so, dass für $a := (2||A^{-1}||)^{-1}$ gilt

$$||Jf(x) - A|| < a \qquad \left(x \in U_\delta(x^{(0)})\right)\ .$$

Damit definieren wir

$$U := U_\delta(x^{(0)})\ , \qquad V := f(U)$$

und zeigen:

(i) $f_{|U} : U \to \mathbb{R}^d$ ist injektiv (also bijektiv auf V), d. h. $(f_{|U})^{-1} : V \to U$ existiert

(ii) $V \subset \mathbb{R}^d$ ist offen

(iii) $\det Jf(x) \neq 0 \quad (x \in U)$

(iv) $f^{-1} \in C^1(V, \mathbb{R}^d)$ und $Jf^{-1}(y) = [Jf(x)]^{-1}$ für alle $y \in V$, $y = f(x)$.

An verschiedenen Stellen wird folgende Hilfsfunktion von Nutzen sein: Es sei $y \in \mathbb{R}^d$ und $\varphi = \varphi_y : U \to \mathbb{R}^d$ definiert durch

$$\varphi(x) := x + A^{-1}(y - f(x)) \qquad (x \in U)\ .$$

Dann ist $\varphi(x) = x$ genau dann, wenn $y = f(x)$ gilt. Ferner gilt für $x \in U$

$$J\varphi(x) = E - A^{-1}Jf(x) = A^{-1}(A - Jf(x))$$

und damit

$$||J\varphi(x)|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||A - Jf(x)|| < ||A^{-1}||a = \frac{1}{2}\ .$$

Also ist φ nach B. 17.5.1 eine 1/2-Kontraktion.
2. Zu (i): Es sei $y \in \mathbb{R}^d$ und $\varphi = \varphi_y$ wie in 1. Dann hat φ höchstens einen Fixpunkt nach B. 17.5.2. Also ist $f_{|U}$ injektiv.
Zu (ii): Es sei $y^{(1)} = f(x^{(1)}) \in V$. Da $U = U_\delta(x^{(0)})$ offen ist, existiert ein $\rho > 0$ mit $\overline{U_\rho(x^{(1)})} =: M_* \subset U$. Wir zeigen: $U_{a\rho}(y^{(1)}) \subset V$.
Dazu sei $y \in U_{a\rho}(y^{(1)})$ gegeben und $\varphi = \varphi_y$ wie in 1. Dann gilt $\varphi(M_*) \subset M_*$, denn für $x \in M_*$ ist

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - x^{(1)}| &\leq |\varphi(x) - \varphi(x^{(1)})| + |\varphi(x^{(1)}) - x^{(1)}| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - x^{(1)}| + |A^{-1}(y - f(x^{(1)}))| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - x^{(1)}| + ||A^{-1}|| \cdot |y - y^{(1)}| \leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho \end{aligned}$$

also $\varphi(x) \in M_*$. Aus B. 17.5.2 folgt, dass (genau) ein $x \in M_*$ existiert mit $\varphi(x) = x$, also $f(x) = y$.

3. Es gilt nach 1. (wobei $\varphi = \varphi_y$ mit einem beliebigen $y \in V$)

$$Jf(x) = A \cdot (E - J\varphi(x)) \qquad (x \in U)$$

also

$$\det Jf(x) = \det(A) \cdot \det(E - J\varphi(x)) \qquad (x \in U)\ .$$

Wieder nach 1. ist $||J\varphi(x)|| \leq \frac{1}{2}$ $(x \in U)$ und damit ist $E - J\varphi(x)$ invertierbar. (Es gilt $(E - B)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B^\nu$, falls $||B|| < 1$ ist; [Ü]). Also ist auch $\det Jf(x) \neq 0$.
4. Es sei $y \in V, y = f(x)$. Dann gilt für alle $h \in U - x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,|h| &\geq \big|\varphi(x+h) - \varphi(x)\big| \\ &= \big|x + h - x - A^{-1}\big(f(x+h) - f(x)\big)\big| \\ &\geq |h| - \|A^{-1}\| \cdot \big|f(x+h) - f(x)\big|, \end{aligned}$$

also

$$\big|f(x+h) - f(x)\big| \leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{\|A^{-1}\|}\,|h| = a|h|.$$

Für $u \in V - y, u \neq 0$ folgt mit

$$h(u) := f^{-1}(y+u) - f^{-1}(y).$$

$u = (h(u) + x) - f(x)$ und damit

$$\big|f^{-1}(y+u) - f^{-1}(y)\big| = \big|h(u)\big| \leq \frac{1}{a}\,|u|$$

(insbesondere zeigt dies, dass f^{-1} stetig ist).
Außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|u|}\left|f^{-1}(y+u)-f^{-1}(u)-\big[Jf(x)\big]^{-1}u\right| \\
&\leq \left\|\big[Jf(x)\big]^{-1}\right\| \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{\big|(Jf)(x)h(u)-u\big|}{\big|h(u)\big|} \\
&= \left\|\big[Jf(x)\big]^{-1}\right\| \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{\big|f\big(x+h(u)\big)-f(x)-(Jf)(x)h(u)\big|}{\big|h(u)\big|} \\
&\qquad \longrightarrow 0 \qquad (u \to 0),
\end{aligned}$$

da f differenzierbar an x ist und $h(u) \to 0$ für $u \to 0$ gilt.
Also ist f^{-1} differenzierbar an y und es gilt

$$Jf^{-1}(y) = [Jf(x)]^{-1} = [Jf(f^{-1}(y))]^{-1} .$$

Da $A \mapsto A^{-1}$ eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}^{d\times d} \setminus \{B : \det(B) = 0\}$ in sich selbst ist (bzgl. der von der Operatornorm induzierten Metrik)([Ü]), ist $y \mapsto Jf^{-1}(y)$ als Verknüpfung der stetigen Abbildungen f^{-1} sowie $x \mapsto Jf(x)$ und $A \mapsto A^{-1}$ stetig auf V. Dies ist äquivalent dazu, dass f^{-1} in $C^1(V, \mathbb{R}^d)$ liegt. □

Beispiel 17.7 Wir betrachten $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (r > 0, \varphi \in \mathbb{R}) .$$

Dann ist $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, wobei $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, und es gilt

$$\det Jf(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r > 0 .$$

Also existieren nach S. 17.6 zu jedem $(r_0, \varphi_0) \in \Omega$ eine offene Umgebung U von (r_0, φ_0) und eine offene Umgebung V von $f(r_0, \varphi_0)$ so, dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist. Außerdem ist $f^{-1} = (f_{|U})^{-1} \in C^1(V, \mathbb{R}^2)$.
Da $f(1, 2k\pi) = (1, 0)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, ist f jedoch nicht umkehrbar auf ganz Ω!
Wie sehen "maximale" offene Mengen aus, auf denen f umkehrbar ist?
Ist $f(r, \varphi) = f(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$, so gilt $r\cos\varphi = \tilde{r}\cos\tilde{\varphi}$ und $r\sin\varphi = \tilde{r}\sin\tilde{\varphi}$, also

$$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \tilde{r}^2(\cos^2\tilde{\varphi} + \sin^2\tilde{\varphi})$$

und damit $r = \tilde{r}$. Folglich gilt $\cos\varphi = \cos\tilde{\varphi}$ und $\sin\varphi = \sin\tilde{\varphi}$, woraus wiederum $\tilde{\varphi} = \varphi + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ folgt. Also ist f etwa umkehrbar auf

$$U = U_\alpha = \{(r, \varphi) \in \Omega : \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi\}$$

für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$. Auf jeder echten offenen Obermenge von U_α ist f nicht mehr umkehrbar. Außerdem gilt $f(U_\alpha) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha) : r > 0\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Wie sieht eine (nicht **die**) Umkehrfunktion aus? Betrachten wir

$$U = U_{-\pi} = \{(r, \varphi) : r > 0\ ,\ \varphi \in (-\pi, \pi)\}\ .$$

Ist $(x, y) \in f(U_{-\pi})$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

so gilt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Für $x = 0$ ist $\varphi = \operatorname{sign}(y)\pi/2$. Ist $x > 0$, so folgt

$$\frac{y}{x} = \tan\varphi$$

also $\varphi = \arctan(y/x)$. Für $x < 0$ ergibt sich $\varphi = \operatorname{sign}(y)\pi + \arctan(y/x)$. Insgesamt erhalten wir

$$f^{-1}(x, y) = (f_{|U_{-\pi}})^{-1}(x, y) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x)\right) & ,\quad \text{falls } x > 0 \\ (y, \operatorname{sign}(y)\pi/2) & ,\quad \text{falls } x = 0 \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x) + \operatorname{sign}(y)\pi\right) & ,\quad \text{falls } x < 0 \end{cases}\ .$$

In enger Beziehung zum Hauptsatz über Umkehrfunktionen steht ein weiterer Hauptsatz: der über implizite Funktionen. Worum geht es dabei?
Gegeben ist eine Funktion $F : M \to \mathbb{R}^m$ mit $M \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ und damit das Gleichungssystem

$$F(x, y) = 0$$

wobei $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m = \{(x, y) : x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d\ ,\ y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m\}$, d. h.

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_d,\, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_d,\, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

(also $d+m$ "Unbekannte" und m Gleichungen). Ferner sei $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in M$ eine Lösung, also $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$. Ziel ist, das Gleichungssystem "lokal nach y aufzulösen", d. h. wir suchen Umgebungen U von $x^{(0)}$ und W von $(x^{(0)}, y^{(0)})$ sowie eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ so, dass für alle $(x, y) \in W$ gilt

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)\ .$$

Wir orientieren uns wieder an zwei einfachen Beispielen

Beispiel 17.8 1. Wir betrachten die Gleichung

$$F(x,y) := x^2 - y^2 - 1 = 0 \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \ .$$

Dann ist offenbar $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, 1)$ eine Lösung der Gleichung. Hier gilt etwa für $U := (1,\infty)$ und $W := (1,\infty) \times (0,\infty)$

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 - 1} =: f(x)$$

(d. h. $\{(x,y) \in W : F(x,y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in U\}$; die Lösungsmenge ist lokal der Graph der Funktion f). Dies ist etwa falsch für $W = (1,\infty) \times \mathbb{R}$.
2. Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sowie $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ mit

$$F(x,y) = Ax + By = (A \;\; B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(also lineares GLS $Ax + By = 0$). Dann gilt im Falle $\det B \neq 0$

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow By = -Ax \Leftrightarrow y = -B^{-1}Ax =: f(x)$$

also $L := \{(x,y) : F(x,y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^d\}$.

Satz 17.9 *(Hauptsatz über implizite Funktionen)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ offen und es sei $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) := \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial y_\nu}(x,y)\right)_{\mu,\nu=1,\ldots,m} \qquad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) := \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial x_\nu}(x,y)\right)_{\substack{\mu=1,\ldots,m \\ \nu=1,\ldots,d}} \ .$$

Ferner sei $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \Omega$ so, dass $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ und

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0 \ .$$

Dann gilt

1. *Es existieren offene Umgebungen U von $x^{(0)}$ und W von $(x^{(0)}, y^{(0)})$ sowie eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ so, dass für $(x,y) \in W$ gilt*

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \ .$$

2. *Es ist $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ und*

$$Jf(x) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \qquad (x \in U) \ .$$

Beweis. 1. Wir betrachten $G : \Omega \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ mit

$$G(x,y) = \Big(x, F(x,y)\Big) \qquad \Big((x,y) \in \Omega\Big) .$$

Dann gilt $G(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x^{(0)}, 0)$ und $G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$. Außerdem ist

$$JG(x,y) = \begin{bmatrix} E_d & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \vdots & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

und damit $\det JG(x^{(0)}, y^{(0)}) = \det \frac{\partial F}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$. Nach S. 17.6 existieren offene Umgebungen R von $(x^{(0)}, y^{(0)})$ und S von $(x^{(0)}, 0) = G(x^{(0)}, y^{(0)})$ so, dass $G_{|R} : R \to S$ bijektiv ist mit

$$G^{-1} = (G_{|R})^{-1} \in C^1(S, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m) .$$

Da S offen ist, existieren offene Umgebungen U von $x^{(0)}$ und V von 0 mit $U \times V \subset S$. Dann ist $W := G^{-1}(U \times V)$ offen in R (nach S. 10.4) also auch in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$. Aus der Definition von G ergibt sich, dass G^{-1} von der Form

$$G^{-1}(x,z) = (x, H(x,z)) \qquad ((x,z) \in U \times V)$$

mit $H \in C^1(U \times V, \mathbb{R}^m)$ ist.
Ist $\pi_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $\pi_2(x,y) := y$, so gilt

$$\pi_2(G(x,y)) = \pi_2(x, F(x,y)) = F(x,y) \qquad ((x,y) \in \Omega)$$

also für $(x,z) \in U \times V$:

$$F(x, H(x,z)) = \pi_2(G(x, H(x,z))) = \pi_2(x,z) = z .$$

Definiert man $f : U \to \mathbb{R}^m$ durch

$$f(x) := H(x,0) \qquad (x \in U)$$

so gilt für $x \in U$

$$F(x, f(x)) = 0$$

und aus $F(x,y) = 0$ für ein $(x,y) \in W$ folgt

$$G(x,y) = (x,0) = G(G^{-1}(x,0)) = G(x, f(x))$$

und damit, da $G_{|W}$ injektiv ist, $y = f(x)$. Also ergibt sich 1.
2. Weiter folgt aus $H \in C^1(U \times V, \mathbb{R}^m)$ auch $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ und mit der Kettenregel ergibt sich aus

$$\varphi(x) := F(x, f(x)) \equiv 0 \qquad (x \in U)$$

schließlich

$$0 = J\varphi(x) = JF(x, f(x)) \cdot \begin{pmatrix} E_d \\ Jf(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))Jf(x)$$

und damit

$$Jf(x) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \qquad (x \in U) \ .$$

(Man beachte dabei: Es gilt nach S. 17.6

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \det JG(x, y) \neq 0$$

für alle $(x, y) \in W$.) □

Beispiel 17.10 (Lemniskate)
Es sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \ .$$

Dann gilt

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2(x^2 + y^2)2y + 4y = 4y(x^2 + y^2 + 1)$$

genau dann, wenn $y = 0$ ist. Ist $y = 0$ und $F(x, y) = 0$, so gilt $x^4 - 2x^2 = 0$, also $x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{2}$.
Nach S. 17.9 ist für alle (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$ und $(x_0, y_0) \notin \{(0, 0), (\pm\sqrt{2}, 0)\}$ die Gleichung $F(x, y) = 0$ auf einer Umgebung W von (x_0, y_0) "auflösbar nach y". "Implizites Differenzieren" ergibt für die Funktion $f = f_{(x_0,y_0)}$ aus S. 17.9

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\frac{4x(x^2 + y^2 - 1)}{4y(x^2 + y^2 + 1)}_{|y=f(x)}$$

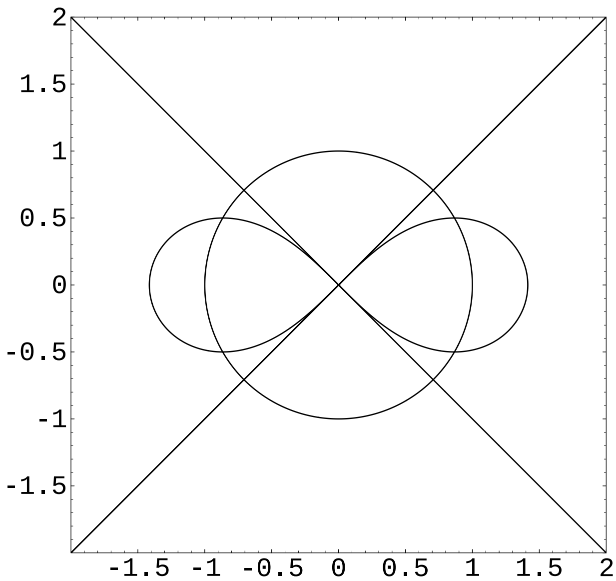
auf einer Umgebung U von x_0. Also hat f Extremstellen höchstens in Punkten x mit

$$x^2 + f^2(x) = x^2 + y^2 = 1 \ .$$

Um eine Vorstellung von der Lösungsmenge zu bekommen, betrachten wir Polarkoordinaten: Es gilt für $(x, y) \neq 0$

$$0 = F(x, y) = F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^4 - 2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2(r^2 - 2\cos 2\varphi)$$

genau dann, wenn $r = \sqrt{2\cos 2\varphi}$, wobei φ so, dass $\cos(2\varphi) > 0$ ist (beachte: $r > 0$).



Eine wichtige Anwendung des Hauptsatzes über implizite Funktionen ergibt sich im Bereich der Optimierung unter Nebenbedingungen. Wir untersuchen folgendes Problem:
Gegeben sind Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}^m$, wobei $M \subset \mathbb{R}^d$. Gesucht sind die "Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$".

Wir wollen dies in einer Definition etwas präzisieren

Definition 17.11 Es seien (X, d) ein metrischer Raum, und es seien $f : X \to \mathbb{R}$ sowie $g : X \to \mathbb{R}^m$. Ist

$$L := \{x \in X : g(x) = 0\}$$

und ist $x^{(0)} \in L$, so heißt $x^{(0)}$ ein *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*) *von f unter der Nebenbedingung* $g(x) = 0$, falls $x^{(0)}$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum) von $f_{|L}$ ist.

Der folgende Satz liefert eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer solchen Extremstelle

Satz 17.12 *(Lagrange)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und es seien $f \in C^1(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $m < d$. Ferner sei $x^{(0)} \in \Omega$ so, dass

$$\operatorname{Rang}\big(Jg(x^{(0)})\big) = m$$

ist. Dann gilt: Hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Maximum oder Minimum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\operatorname{grad} f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(x^{(0)}) = (Jg)^T(x^{(0)})\lambda$$

(die Komponenten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von λ heißen "Lagrange-Multiplikatoren").

Beweis. Wir schreiben zur Abkürzung $x = (y, z)$ mit

$$y = (x_1, \ldots, x_m)\,,\ z = (x_{m+1}, \ldots, x_d)$$

für $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ und insbesondere

$$(y^{(0)}, z^{(0)}) = x^{(0)}\ .$$

O. E. gelte

$$\det\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x^{(0)})\right) = \det\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}(x^{(0)})\right)_{\mu,\nu=1,\ldots,m} \neq 0\ ,$$

d. h. $\frac{\partial g}{\partial y}(x^{(0)})$ habe vollen Rang m. Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen ist die Gleichung $g(x) = g(y, z) = 0$ an $x^{(0)}$ "lokal nach y auflösbar". Insbesondere existieren eine Umgebung U von $z^{(0)} = (x^{(0)}_{m+1}, \ldots, x^{(0)}_d)$ sowie eine Funktion $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ so, dass $\varphi(z^{(0)}) = y^{(0)}$ und

$$g(\varphi(z), z) \equiv 0 \qquad (z \in U)$$

gilt. Hieraus folgt

$$0 = Jg(x^{(0)})\begin{pmatrix} J\varphi(z^{(0)}) \\ E_{d-m} \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial y}(x^{(0)})J\varphi(z^{(0)}) + \frac{\partial g}{\partial z}(x^{(0)})$$

Weiter definieren wir $F \in C^1(U)$ durch

$$F(z) := f(\varphi(z), z) \quad (z \in U)\ .$$

Nach Voraussetzung hat F an $z^{(0)}$ ein lokales Extremum (ohne Nebenbedingung). Also gilt nach S. 16.11

$$\operatorname{grad} F(z^{(0)}) = 0$$

und mit der Kettenregel daher

$$0 = \operatorname{grad}^T f(x^{(0)}) \cdot \begin{pmatrix} J\varphi(z^{(0)}) \\ E_{d-m} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(x^{(0)})J\varphi(z^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial z}(x^{(0)})\ .$$

Schließlich hat das lineare Gleichungssystem

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^T(x^{(0)}) \cdot \lambda = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^T(x^{(0)})$$

genau eine Lösung $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Hieraus ergibt sich wiederum

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x^{(0)}) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x^{(0)})J\varphi(z^{(0)}) = -\lambda^T \frac{\partial g}{\partial y}(x^{(0)})J\varphi(z^{(0)}) = \lambda^T \frac{\partial g}{\partial z}(x^{(0)})$$

und damit insgesamt grad $f(x^{(0)}) = (Jg)^T(x^{(0)})\lambda$. □

Bemerkung 17.13 Ähnlich wie S. 16.11 liefert S. 17.12 lediglich eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$. Um die entsprechenden Punkte $x^{(0)}$ zu bestimmen, hat man die Gleichungen

$$g_j(x_1, \ldots, x_d) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_d) \qquad (k = 1, \ldots, d)$$

zu lösen (also $(d + m)$ Gleichungen für die $(d + m)$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_d$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$).

Beispiel 17.14 Die Produktion eines Unternehmens sei in Abhängigkeit der Produktionsfaktoren x, y beschrieben durch die (Cobb-Douglas-) Funktion

$$P(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha} \qquad (x, y > 0)$$

wobei $\alpha \in (0, 1)$ fest ist. Die Produktionskosten seien gegeben durch eine lineare Kostenfunktion K der Form

$$K(x, y) = px + qy \qquad (x, y > 0)$$

mit Konstanten $p, q > 0$. Gesucht ist eine kostenminimale Faktorkombination (x, y) zu einem vorgegebenen Produktionsniveau $c > 0$, d. h. wir wollen das Optimierungsproblem

$$K(x, y) \stackrel{!}{\to} \min$$

unter der Nebenbedingung

$$P(x, y) - c = 0$$

lösen. Nach S. 17.12 ist eine notwendige Bedingung gegeben durch

$$\text{grad } K(x, y) = \lambda \text{ grad } P(x, y) ,$$

d. h. wir haben die 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} x^\alpha y^{1-\alpha} &= c \\ p &= \lambda \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} \\ q &= \lambda(1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha} \end{aligned}$$

für die Unbekannten x, y, λ. Division der 2. und 3. Gleichung ergibt

$$x = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{q}{p} \cdot y$$

und mit der 1. Gleichung erhalten wir

$$y = c\left(\frac{p(1-\alpha)}{q\alpha}\right)^{\alpha}$$

und damit

$$x = c\left(\frac{q\alpha}{p(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha} .$$

Also kann nur an dieser Stelle (x, y) ein Minimum unter der Nebenbedingung vorliegen. Man kann sich überlegen, dass dies tatsächlich der Fall ist.

A Fundamentalsatz der Algebra

In Abschnitt 8 hatten wir die Existenz komplexer Wurzeln nachgewiesen. Die Existenz von Wurzeln bedeutet, dass Polynome $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $P(z) = z^n - c$ stets Nullstellen besitzen. Allgemein gilt

Satz A.1 *(Fundamentalsatz der Algebra)*
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad n. Dann hat P eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$.

Beweis.
1. Ist $P(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$, so gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{P(z)}{a_n z^n} = 1 + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{a_n} \frac{1}{z^{n-\nu}}$$

Weiter existiert ein $R > 0$ so, dass

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{a_n} \frac{1}{z^{n-\nu}} \right| < \frac{1}{2} \qquad (|z| \geq R); .$$

Also folgt

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}\, |a_n|\, |z_n|^n \qquad (|z| \geq R)\, .$$

Wählt man noch R so groß, dass $\frac{1}{2}|a_n|R^n > |a_0|$ ist, so folgt

$$|P(z)| > |a_0| = |P(0)| \qquad (|z| \geq R)\, ,$$

und damit ist

$$\inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{|z| \leq R} |P(z)|\, .$$

Da $|P| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig ist, hat $|P|$ nach S. 10.9 ein Minimum auf der kompakten Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, d.h. es existiert ein z_0 mit

$$|P(z_0)| = \min_{|z| \leq R} |P(z)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|\, .$$

2. Wir zeigen: $P(z_0) = 0$.
Angenommen, nicht. Dann ist $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$Q(z) := \frac{P(z + z_0)}{P(z_0)} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

ein Polynom vom Grad n mit $Q(0) = 1$ und $|Q(z)| \geq 1$ $(z \in \mathbb{C})$. Damit ist durch $R(z) := 1 - Q(z)$ ein Polynom vom Grad n gegeben mit $R(0) = 0$. Also existieren ein $m \in \mathbb{N}$ und $b_m, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ mit $b_m \neq 0$ und

$$R(z) = b_m z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \ldots + b_n z^n\, .$$

Ist $b_m = |b_m|e^{i\varphi}$, so gilt für $\psi = -\varphi/m$ und $t \in \mathbb{R}$

$$R(te^{i\psi}) = |b_m|t^m + t^m \sum_{\nu=m+1}^{n} b_\nu t^{\nu-m} e^{i\nu\psi}$$

mit

$$\delta(t) := \sum_{\nu=m+1}^{n} b_\nu e^{i\nu\psi} t^{\nu-m} \to 0 \quad (t \to 0)\,.$$

Wählt man $t > 0$ so klein, dass $|\delta(t)| < \frac{|b_m|}{2}$ und $t < 1/\sqrt[m]{|b_m|}$, so folgt

$$\begin{aligned} |Q(te^{i\psi})| &= |1 - R(te^{i\psi})| \leq \left|1 - |b_m|t^m\right| + t^m|\delta(t)| \\ &= 1 - |b_m|t^m + t^m|\delta(t)| < 1 - \frac{|b_m|}{2}\, t^m < 1\,. \end{aligned}$$

Widerspruch zu $|Q(z)| \geq 1$. □