J. Müller

WS 2020/2021
13.01.2021

9. Hausübung zur Einführung in die Mathematik

Abgabe: Bis Freitag, 22.01.2021, 10.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 9. Hausübung“

H25: Beweisen Sie:

a) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^k$ hat den Konvergenzradius ∞.

b) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$.

H26: (de Moivre Formel) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\cos(nz) + i\sin(nz) = (\cos z + i \sin z)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} i^\nu \ \sin^\nu(z) \cos^{n-\nu}(z)\,.$$

H27:

a) Berechnen Sie die rationale Zahl $\sum_{\nu=0}^{7} \frac{1}{\nu!}$ in der Form p/q mit $p, q \in \mathbb{N}$. Auf wie viele Dezimalstellen stimmt die Zahl mit e überein?

b) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n! \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \leq e$.

c) Beweisen Sie, dass e irrational ist.

Hinweis: Nach b) mit $n = p+1$ gilt $0 < (p+1)!(e - \sum_{\nu=0}^{p} 1/\nu!) \leq e$. Nehmen Sie an, dass $e = p/q$ für $p, q \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie mit $e < (p+1)/q$, dass in diesem Fall eine ganze Zahl in $(0, 1)$ existieren würde.