J. Müller

WS 2020/2021
05.11.2020

## 1. Übung zur Einführung in die Mathematik

Abgabe: Bis Donnerstag, 12.11.2020, 12.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 1. Hausübung“

### Hausübungen

H1: a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ \ f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{Z})$,

(ii) $g := f|_{\mathbb{N}_0}$,

(iii) $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \ h(x, y) := x + y \quad (x, y \in \mathbb{Z})$.

b) Bestimmen Sie für $f, g, h$ aus a) und $M := \{1, \ldots, 10\}$ die Mengen $f^{-1}(M)$, $g^{-1}(M)$, $f(M)$ sowie $h^{-1}(\{0\})$.

H2: Finden Sie bijektive Funktionen $f, g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ mit $g \circ f \neq f \circ g$. Gibt es auch bijektive $f, g : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ mit $g \circ f \neq f \circ g$ ?

H3: Es sei $\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{p/q : p, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ teilerfremd}\}$.

a) Zeigen Sie: Die Gleichung $x^2 + x = 1$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}_+$ .
Hinweis: Verwenden Sie, dass für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ das Produkt $nm$ genau dann ungerade ist, wenn beide Zahlen ungerade sind.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}$ mit

$$f(x) := x^2 + x - 1 \qquad (x \in \mathbb{Q}_+)$$

injektiv ist, sowohl positive als auch negative Werte annimmt, aber keine Nullstelle hat.