

6. Gruppenübung zur Einführung in die Mathematik

G16: Beweisen Sie: Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, so existiert ein $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < s < y$.

Hinweis: $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

G17: (Heron-Verfahren) Es seien $c > 0$ und $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definiert durch

$$\varphi(x) := \frac{1}{2} \left(x + \frac{c}{x} \right) \quad (x > 0).$$

Zeigen Sie:

- a) Für $x \geq \sqrt{c}$ ist $\varphi(x) \leq x$.
- b) Ist $x_0 > 0$, so ist die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_{n+1} := \varphi(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}_0$) fallend.

G18: Zeigen Sie:

- a) $n/2^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).
Hinweis: Nach der Binomischen Formel ist $2^n \geq \binom{n}{2}$ für $n \geq 2$.
- b) Für $c \geq 1$ gilt $\sqrt[n]{c} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$).
Hinweis: Mit $x_n := \sqrt[n]{c} - 1$ ist $c = (1 + x_n)^n$. Wenden Sie die Bernoulli-Ungleichung an.