

3. Gruppenübung zur Einführung in die Mathematik

G7: Es sei $(K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper. Beweisen Sie: Für alle $x, y \in K$ ist

$$4xy \leq (x + y)^2.$$

Hinweis: $(x - y)^2 \geq 0$.

G8: Zeigen Sie:

a) (Bernoulli-Ungleichung) Ist K ein geordneter Körper und ist $x > -1$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

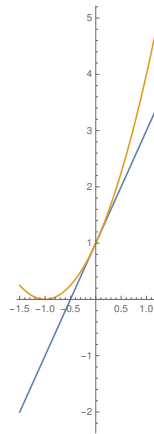


Abbildung 1: $x \mapsto (1 + x)^2$ und $x \mapsto 1 + 2x$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(n + 1)^n \geq 2n^n$.

Hinweis: $n + 1 = n(1 + 1/n)$.

G9: Es seien $(X, <) = (\mathbb{Q}, <)$ und $M := \{x \in \mathbb{Q}_+ : x \leq 1\}$. Untersuchen Sie, ob $\inf M$, $\min M$, $\sup M$ bzw. $\max M$ existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.