J. Müller SoS 2021

12.05.2021

5. Hausübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

Abgabe: Bis Mittwoch, 19.05.2021, 12.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 5. Hausübung“

H13: Berechnen Sie:

$$\text{(i)} \quad \int_u^v \frac{\ln t}{t}\, dt \ \text{ für } 0 < u < v\,, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int_0^1 \arctan(t)\, dt.$$

H14: Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f(x) := 1/(1-x)^{\alpha+1}$ für $x \in (-\infty, 1)$. Zeigen Sie:

a) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in (-\infty, 1)$ ist

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \binom{\alpha+k}{k} \frac{1}{(1-x)^{\alpha+k+1}}.$$

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $h \in (-1, 1)$ gilt $T_n(f,0)(h) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha+\nu}{\nu} h^\nu$ und

$$|R_n(f,0)(h)| \le |c_{n+1}| \cdot |h|^{n+1} \int_0^1 \frac{dt}{(1-th)^{\alpha+2}}$$

mit $c_n := n\binom{\alpha+n}{n}$.

Z1: (Binomialreihe; 4 Extrapunkte) Zeigen Sie: Für $h \in (-1, 1)$ gilt

$$\frac{1}{(1-h)^{\alpha+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha+\nu}{\nu} h^\nu.$$

Was ergibt sich dabei im Fall $-\alpha - 1 \in \mathbb{N}_0$?

H15: a) Es seien $g, w \in C[0,1]$ reellwertig mit $w \ge 0$. Zeigen Sie, dass ein $\tau \in [0,1]$ existiert mit

$$\int gw = g(\tau) \int_0^1 w.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz. Beachten Sie dabei: Ist $c := \int_0^1 w > 0$, so gilt

$$\min_{[0,1]} g \le c^{-1} \int_0^1 gw \le \max_{[0,1]} g.$$

b) Beweisen Sie: Sind $a, h \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^{n+1}([a, a+h])$ reellwertig, so existiert ein $\xi \in [a, a+h]$ mit

$$R_n(f,a)(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$