J. Müller

SoS 2021
21.04.2021

2. Hausübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

Abgabe: Bis Mittwoch, 28.04.2021, 12.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 2. Hausübung“

H4: Es sei sei $(c_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu| < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ gleichmäßig auf $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ konvergiert und dass die Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ stetig ist.

H5:

a) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine fallende Folge in $[0, \infty)$ und gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$, so ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < \infty$.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe G6.

b) Es sei $\alpha > 1$. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu^\alpha$ konvergiert.

H6: Es sei $f(z) = 1/(1-z)$ für $z \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Zeigen Sie: Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{D}$ gilt

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} z^\nu.$$