J. Müller

SoS 2021
07.07.2021

12. Hausübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

Abgabe: Bis Mittwoch, 14.07.2021, 12.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 12. Hausübung“

H34: (Neumannsche Reihe) Es seien V ein Banachraum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu$ für jedes $0 < r < 1$ auf der abgeschlossenen Kugel $B_r(0) \subset L(V)$ gleichmäßig konvergiert und dass $(I-T)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu$ für alle $T \in L(V)$ mit $||T|| < 1$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie das Weierstraß-Kriterium.

H35: a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x+e^y \\ y+e^z \\ z+e^x \end{pmatrix}$ in allen Punkten lokal C^1-umkehrbar ist.

b) (Polarkoordinaten) Es sei f wie in Beispiel 5.7 und $U := (0,\infty) \times (0, \pi/2)$. Zeigen Sie, dass $f|_U$ injektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $g = f_U^{-1}$.

H36: (Lemniskate) Es sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) \qquad (x, y \in \mathbb{R}) .$$

a) Finden Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $F(x,y) = 0$ und $\partial_2 F(x,y) = 0$.

b) Zeigen Sie: Für $z = x+iy \in \mathbb{C}$ ist $F(x,y) = 0$ genau dann, wenn $|z^2-1| = 1$ gilt.

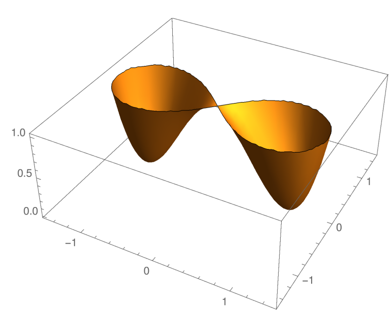

Abbildung 1: $z \mapsto |z^2-1|^2$ auf $|z^2-1| \le 1$.