J. Müller

SoS 2021
07.06.2021

8. Gruppenübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

G22: Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $(0,\infty) \cdot X = X$. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $a \in \mathbb{R}$, falls $f(tx) = t^a f(x)$ für $t > 0$ und $x \in X$ gilt. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Homogenität:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

b) $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$ für $(x,y) \in (0,\infty)^2$, wobei $\alpha, \beta > 0$.

c) $f(x,y) = x^2 + y$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

G23: Es sei $M := \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}^*\}$. Überlegen Sie sich, dass $\partial_{\mathbf{v}} 1_M(0,0) = 0$ für alle Richtungen $\mathbf{v}$ gilt. Ist 1_M stetig an $(0,0)$?

G24: a) Zeigen Sie: Ist $X \subset \mathbb{C}$ offen und ist $f : X \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar an $a \in X$, so gilt die Cauchy-Riemann-Gleichung

$$\partial_2 f(a) = i f'(a) = i \partial_1 f(a).$$

Hinweis: Betrachten Sie $\tau_a f(t)$ und $\tau_a f(it)$ für $t \in \mathbb{R}^*$.

b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(z) = f(x+iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und zeigen Sie, dass f nur an 0 komplex differenzierbar ist.