J. Müller

SoS 2021
31.05.2021

7. Gruppenübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

G19: Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie, dass für $M \subset X$ folgende Aussagen äquivalent sind:

a) M ist abgeschlossen,

b) $M' \subset M$,

c) Für alle Folgen (x_n) in M mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ gilt $x \in M$.

G20: a) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $h \mapsto \langle x, Th \rangle + \langle h, Tx \rangle$ aus Beispiel 3.6 der Vorlesung lokal beschränkt ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

b) Es sei $V := C^1[-1, 1]$ versehen mit der Supremumsnorm. Überlegen Sie sich, dass die lineare Abbildung $T : V \to \mathbb{C}$ mit $Tf := f'(0)$ für $f \in V$ nicht lokal beschränkt ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge (f_n) mit $f_n(t) := \sin(nt)$ für $t \in [-1, 1]$.

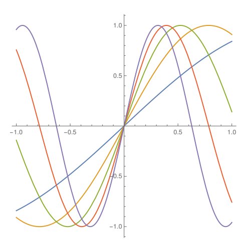

Abbildung 1: $f_1, \dots, f_5$

G21: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = e^{2x} \sin y$.

a) Berechnen Sie $\partial_1 f(x, y)$ und $\partial_2 f(x, y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Berechnen Sie $\partial_{\mathbf{v}} f(0, 0)$ für alle Richtungen $\mathbf{v} = (u, w)$ und verifizieren Sie die Gleichung $(\partial_1 f(0, 0), \partial_2 f(0, 0))\mathbf{v} = \partial_{\mathbf{v}} f(0, 0)$.