Jürgen Müller

Einführung in die Mathematik für Lehramt

Skriptum zur Vorlesung
Wintersemester 2013/2014
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Dank an Elke Gawronski für die Mithilfe bei der Erstellung

Inhaltsverzeichnis

1 geordnete Mengen und Ringe

Wir gehen für diese einführende Vorlesung davon aus, dass natürliche, ganze und rationale Zahlen samt der Operationen ,,+" und ,,·" sowie der Relation ,,<" bekannt sind.
Wir schreiben

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &:= \{x : x \text{ natürliche Zahl}\}\\ \mathbb{Z} &:= \{x : x \text{ ganze Zahl}\}\\ \mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N} \cup \{0\}\\ \mathbb{Q} &:= \{x : x \text{ rationale Zahl}\}.\end{aligned}$$

Ziel des ersten Abschnittes ist es, das ,,Wesen" dieser Zahlenbereiche herauszuarbeiten. Dazu betrachten wir Mengen, die mit gewissen ,,Strukturen" versehen sind.

Definition 1.1 Es seien $M \neq \emptyset$ eine Menge und $* : M \times M \to M$ eine Abbildung. Weiter sei $e \in M$. Dann heißt $(M, *, e)$ ein *Monoid*, falls gilt

($*1$) Für alle $x, y, z \in M$ ist $x * (y * z) = (x * y) * z$.

($*2$) Für alle $x \in M$ ist $x * e = e * x = x$.
(*e* heißt dann auch *neutrales Element* von M.)

$(M, *, e)$ heißt *Gruppe*, falls zusätzlich gilt

($*3$) Für alle $x \in M$ existiert ein $y \in M$ mit $y * x = e$.
(y heißt dann *linksinvers* zu x.)

Gilt zusätzlich

($*4$) Für alle $x, y \in M$ ist $x * y = y * x$, so heißt das Monoid *kommutativ.*

Bemerkung 1.2 Es seien $(M, *, e)$ eine Gruppe und $x \in M$.
1. Ist y linksinvers zu x, so ist y auch rechtsinvers, d.h. es ist auch $x * y = e$.
(Denn: Ist z so, dass $z * y = e$, so folgt

$x*y = e*(x*y) = (z*y)*(x*y) = z*(y*(x*y)) = z*((y*x)*y) = z*(e*y) = z*y = e$).

2. Sind y und $y' \in G$ mit $y * x = y' * x = e$, so folgt $y = y'$.

(Denn: Es gilt

$$y' = y' * e = y' * (x * y) = (y' * x) * y = e * y = y.)$$

Wir schreiben auch x^{-1} für das (links-)inverse Element von x.

Nach den Rechenregeln in $\mathbb{Z}$ sind etwa $(\mathbb{N}_0, +, 0)$, $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ kommutative Monoide, jedoch keine Gruppen (die Gleichung $y + t = 0$ hat in $\mathbb{N}_0$ keine Lösung, die Gleichung $2 \cdot y = 1$ hat keine in $\mathbb{N}$); $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe.

Definition 1.3 Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Relation $<$ heißt *Ordnung* (auf M), falls gilt

(<1) Für alle $x, y \in M$ gilt entweder $x = y$ oder $x < y$ oder $y < x$ (Trichotomie).

(<2) Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ (Transitivität).

Das Paar $(M, <)$ heißt dann eine *geordnete Menge*. Außerdem bedeutet $x \leq y$, dass entweder $x < y$ oder $x = y$ gilt. Schießlich scheiben wir auch $y > x$ statt $x < y$ und $y \geq x$ statt $x \leq y$.
Ist $A \subset M$, so heißt $\overline{a} \in A$ *Maximum* von A (Schreibweise: $a =: \max A$), falls $x \leq \overline{a}$ für alle $x \in A$ gilt. Weiter heißt $\underline{a} \in A$ *Minimum* von A, falls $\underline{a} \leq x$ für alle $x \in A$ gilt.

Die Mengen $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N}_0, <)$ sind geordnet. Außerdem gilt folgendes wichtige *Wohlordnungsprinzip*:

Jede Menge $A \subset \mathbb{N}$ (oder $A \subset \mathbb{N}_0$) hat ein Minimum.

Definition 1.4 Es seien R eine Menge und $+ : R \times R \to R$ sowie $R \times R \to R$ Abbildungen. Dann heißt $(R, +, \cdot)$ Ring mit (Nullelement 0_R und) Einselement 1_R, falls gilt

($R1$) $(R, +, 0_R)$ ist eine abelsche Gruppe.

($R2$) $(R, \cdot, 1_R)$ ist ein Monoid.

($R3$) Für alle $x, y, z \in R$ ist

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot z &= (x \cdot z) + (y \cdot z) \\ x \cdot (y + z) &= (x \cdot y) + (x \cdot z). \end{aligned}$$

Ist $(R, \cdot, 1_R)$ kommutativ, so heißt der Ring *kommutativ*.

Man schreibt kurz xy statt $x \cdot y$ und $x + yz$ statt $x + (yz)$ („Punktrechnung vor Strichrechnung“). Weiter schreiben wir für $x \in X$ wie üblich $-x$ für das inverse Element bezüglich „+“. Schließlich schreiben wir noch $x - y$ statt $x + (-y)$.

Aus den Rechenregeln in $\mathbb{Z}$ folgt, dass $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit der üblichen 0 und 1 ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

Bemerkung und Definition 1.5 Wir definieren nun Summen und Produkte für mehr als zwei Summanden bzw. Faktoren in einem Ring $(R, +, \cdot)$ mit Nullemelent 0_R und Einselement 1_R: Sind $x_1, \dots, x_N \in R$ für ein $N \in \mathbb{N}$, so setzen wir

$$\sum_{\nu=1}^{0} x_\nu := 0_R \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} x_\nu := \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) + x_{n+1} \quad \text{für } n = 0, \dots, N-1$$

und

$$\prod_{\nu=1}^{0} x_\nu := 1_R \quad \text{und} \quad \prod_{\nu=1}^{n+1} x_\nu := \left(\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \cdot x_{n+1} \quad \text{für } n = 0, \dots, N-1.$$

Ist speziell $x_1 = \ldots = x_n =: x$, so schreiben wir

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x =: nx$$

sowie

$$\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu = \prod_{\nu=1}^{n} x =: x^n .$$

Damit ist insbesondere $0 \cdot x = 0_R$ und $x^0 = 1_R$ gesetzt, wobei 0 die Null in $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Schließlich definieren wir noch für $n \in \mathbb{N}$

$$(-n)x := -(nx).$$

Man beachte, dass es sich hier bei nx nicht um eine Multiplikation in $R \times R$ handelt. Es gilt jedoch auch (folgt leicht aus den Axiomen)

$$0_R \cdot x = x \cdot 0_R = 0_R \quad \text{und} \quad (-x)y = -(xy) = x(-y) \;\; (y \in R).$$

Eng verbunden mit dem eben verwendeten Prinzip der rekursiven oder induktiven Definition ist das Beweisverfahren der vollständigen Induktion:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Zum Beweis der Behauptung

"Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$"

geht man oft folgendermaßen vor:

1. Man zeigt, dass $A(1)$ richtig ist (*Induktionsanfang*).
2. a) Man nimmt an, dass $A(n)$ (oder auch $A(1), \ldots, A(n)$) für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ richtig ist (*Induktionsannahme*).
   b) Man zeigt, dass aus der Richtigkeit von $A(n)$ (bzw. $A(1), \ldots, A(n)$), d. h. aus der Induktionsannahme, die Richtigkeit von $A(n+1)$ folgt (*Induktionsschritt*).

Dieses Beweisschema nennt man *Induktionsbeweis* oder *vollständige Induktion*. Aus 1. und 2. ergibt sich, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.
Manchmal möchte man statt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0, n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ zeigen. Dann macht man den Induktionsanfang nicht für $n = 1$, sondern für $n = n_0$ und den Induktionsschritt von n auf $n + 1$ für beliebiges $n \geq n_0$.

Ein typischer Induktionsbeweis ist der Beweis zu

Satz 1.6 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Beweis.

1. Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\sum\limits_{\nu=1}^{1} \nu = \frac{1 \cdot 2}{2}$ (d. h. $A(1)$ gilt).
2. a) Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}$ (d. h. $A(n)$ gelte).
   b) Wir zeigen: aus a) folgt $\sum\limits_{\nu=1}^{n+1} \nu = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (d. h. $A(n+1)$ folgt).

   Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu &= \left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} . \end{aligned}$$

□

Wir kommen noch einmal auf das Summen- und das Produktzeichen zu sprechen.

Bemerkung und Definition 1.7 Es seien $(R,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement und $\varphi:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ bijektiv. Dann gilt für $x_1,\ldots,x_n\in R$

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_{\varphi(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \qquad \text{und} \qquad \prod_{\nu=1}^{n} x_{\varphi(\nu)} = \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu .$$

Damit wird folgende Schreibweise sinnvoll: Ist $n\in\mathbb{N}$ und ist I eine beliebige n-elementige Menge, so setzen wir für $x_j\in R$ $(j\in I)$

$$\sum_{j\in I} x_j := \sum_{k=1}^{n} x_{j_k} \quad \text{und} \quad \prod_{j\in I} x_j := \prod_{k=1}^{n} x_{j_k}\,,$$

wobei $\{j_1,\ldots,j_n\}$ eine beliebige Aufzählung von I ist. Sind weiter $y_j\in R$ $(j\in I)$ und $x\in R$, so gilt auch etwa

$$\sum_{j\in I} x x_j = x\sum_{j\in I} x_j,$$

und

$$\sum_{j\in I}(x_j+y_j) = \sum_{j\in I} x_j + \sum_{j\in I} y_j, \qquad \prod_{j\in I}(x_j y_j) = \prod_{j\in I} x_j \prod_{j\in I} y_j.$$

Die Beweise ergeben sich (nicht ganz leicht) per Induktion.
Weiter kann man hiermit (leicht) zeigen, dass für $x_1,x_2,x\in R$ folgende Vervielfachungs- und Potenzgesetze gelten: Für $m,m_1,m_2\in\mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned} m_1x+m_2x &= (m_1+m_2)x\,,\\ mx_1+mx_2 &= m(x_1+x_2)\,,\\ (m_1m_2)x &= m_1(m_2x)\,. \end{aligned}$$

und für $m,m_1,m_2\in\mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} x^{m_1}x^{m_2} &= x^{m_1+m_2}\,,\\ x_1^m x_2^m &= (x_1x_2)^m\,,\\ (x^{m_1})^{m_2} &= x^{m_1m_2}\,. \end{aligned}$$

Definition 1.8 Ein Ring $(R,+,\cdot)$ mit Nullelement 0_R und Einselemnt 1_R heißt *Körper*, falls $(R\setminus\{0_R\},\cdot,1_R)$ eine abelsche Gruppe ist. Wir schrieben im Weiteren auch $1/x$ statt x^{-1} für das inverse Element von $x\neq 0_R$ bezüglich der Multiplikation.

Beispiel 1.9 1. Aus den Rechenregeln in $\mathbb{Q}$ folgt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper ist. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper (die Gleichung $2 \cdot y = 1$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$).
2. (Binärkörper) Es sei $\mathbb{F}_2 := \{n, e\}$ mit den Rechenoperationen

$+$	n	e
n	n	e
e	e	n

$\cdot$	n	e
n	n	n
e	n	e

Dann ist $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper mit $n = 0_{\mathbb{F}_2}$ und $e = 1_{\mathbb{F}_2}$ (Beweis: [Ü]).

2 Geometrische Summenformel und binomische Formel

Wir kommen nun zu verschiendenen Formeln, die in kommutativen Ringen mit Einselement gelten.

Satz 2.1 *Es sei* $(R, +, \cdot)$ *ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann gilt für alle* $a, b \in R$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-1-\nu} \ . \tag{2.1}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} (a-b) \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-1-\nu} &= \sum_{\nu=0}^{n-1} a^{\nu+1} b^{n-(\nu+1)} - \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-\nu} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} a^\mu b^{n-\mu} - \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-\nu} = a^n - b^n \ . \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.2 (geometrische Summenformel) Ist $(R, +, \cdot)$ ein Körper, so ist für $x \neq 1 (:= 1_R)$ nach S. 2.1

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu = \frac{x^n - 1}{x - 1} \tag{2.2}$$

Neben der geometrischen Summenformel gibt es eine weitere Formel in kommutativen Ringen, die binomische Formel. Es handelt sich dabei um eine Summenformel für die Ausdrücke $(a+b)^n$, wobei $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ ist. Um die allgemeine Formel angeben zu können, brauchen wir

Definition 2.3 1. Wir definieren $n!$ ("*n-Fakultät*") für $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$n! := \prod_{\nu=1}^{n} \nu \ .$$

2. Für $n, \nu \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$\binom{n}{\nu} := \frac{1}{\nu!} \prod_{k=1}^{\nu} (n+1-k)$$

   Die Zahl $\binom{n}{\nu}$ heißt *Binomialkoeffizient n über ν*.

Es gilt also etwa

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 \,, \qquad 10! = 3.628.800 \,,$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} = 21$$

Wir stellen einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten zusammen.

Satz 2.4 *Es seien $n, \nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

1. $\binom{n}{\nu} = \dfrac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \binom{n}{n-\nu}$ *falls* $\nu \le n$.
2. $\binom{n}{\nu} = 0$ *falls* $\nu > n$.

Beweis.

1. Es gilt für $\nu \le n$

$$\binom{n}{\nu} = \frac{\prod_{k=1}^{\nu}(n+1-k)}{\nu!} = \frac{\prod_{k=1}^{\nu}(n+1-k)}{\nu!} \cdot \frac{(n-\nu)!}{(n-\nu)!} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

   Damit ist auch

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \frac{n!}{(n-(n-\nu))!(n-\nu)!} = \binom{n}{n-\nu} \,.$$

2. Für $\nu > n$ ist $n - \nu + 1 \le 0$ und damit $\prod_{k=1}^{\nu}(n+1-k) = 0$, also auch $\binom{n}{\nu} = 0$.

□

Besonders wichtig ist folgende Rekursionsformel:

Satz 2.5 *Für $n, \nu \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{n+1}{\nu} = \binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu}$$

Beweis. Nach S. 2.4.1 gilt für $\nu \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} &= \frac{n!}{(\nu-1)!(n-\nu+1)!} + \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \\
&= \frac{n!}{\nu!(n+1-\nu)!}\big(\nu + (n+1-\nu)\big) = \frac{(n+1)!}{\nu!(n+1-\nu)!} = \binom{n+1}{\nu}.
\end{aligned}$$

Für $\nu = n+1$ ist nach S. 2.4.2

$$\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \binom{n}{n} + 0 = 1 = \binom{n+1}{\nu}$$

und für $\nu > n+1$ sind beide Seiten $= 0$. $\square$

Ordnet man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\nu}$ in einem dreieckigen Schema an, wobei in der n-ten Zeile die Koeffizienten $\binom{n}{0}, \ldots, \binom{n}{n}$ stehen, so entsteht das sog. *Pascalsche Dreieck*:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \; \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \; \binom{2}{1} \; \binom{2}{2} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\binom{n}{0} \; \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{\nu-1} \; \binom{n}{\nu} \cdots \binom{n}{n} \\
\binom{n+1}{0} \; \binom{n+1}{1} \; \cdots \binom{n+1}{\nu} \cdots \; \binom{n+1}{n+1}
\end{array}$$

Die ersten Zeilen berechnen sich etwa unter Ausnutzung von S. 2.5 zu

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Satz 2.6 *(binomische Formel)*
Es sei $(R, +, \cdot)$ *ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann gilt für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $a, b \in R$

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu} .$$

Beweis.
1. Für $n = 0$ gilt $(a+b)^0 = 1 = \sum\limits_{\nu=0}^{0} \binom{0}{\nu} a^\nu b^{0-\nu}$.

2. Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $(a+b)^n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$.

Dann folgt mit S. 2.5

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{\nu+1} b^{n-\nu} + \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu+1} \\
&= \sum_{\mu=1}^{n+1} \binom{n}{\mu-1} a^\mu b^{n+1-\mu} + \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n+1-\nu} \\
&= a^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu} a^\nu b^{n+1-\nu} + b^{n+1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} a^\nu b^{n+1-\nu} .
\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.7 Es gilt etwa

$$\begin{aligned}(a+b)^6 &= \sum_{\nu=0}^{6} \binom{6}{\nu} a^\nu b^{6-\nu} \\ &= 1\cdot b^6 + 6\cdot ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + 1\cdot a^6\ .\end{aligned}$$

Bemerkung 2.8 Als Spezialfälle aus S. 2.6 ergeben sich interessante Beziehungen für das Pascalsche Dreieck:
Für ($R = \mathbb{Z}$ und) $a = 1, b = 1$ ergibt sich

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} 1^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}\ ,$$

d. h. die Summe der Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ergibt stets 2^n.
Für $a = -1, b = 1$ ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$

$$0 = 0^n = \big((-1)+1\big)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^\nu\ ,$$

d. h. versieht man die Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile jeweils abwechselnd mit dem Vorzeichen $+$ und $-$, so erhält man als Summe 0.
Für $n = 6$ gilt etwa

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$

und

$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0\ .$$

Bemerkung 2.9 Zum Abschluss beschäftigen wir uns kurz mit der Bedeutung der Fakultäten und Binomialkoeffizienten im Bereich der „Kombinatorik“.
Für eine endliche Menge M setzen wir

$$|M| := \text{Anzahl der Elemente von } M.$$

Dann gilt: Sind M, N endliche Mengen, so existiert eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ genau dann, wenn $|M| = |N|$ ist (d. h., wenn M und N gleich viele Elemente haben).

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Sind I, J n-elementige Mengen und ist

$$S(I,J) := \{\varphi : I \to J : \varphi \text{ bijektiv}\}$$

so ist
$$\big|S(I,J)\big| = n!\ .$$
(Denn: Wir führen den Beweis per Induktion nach n.
1. Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung klar.
2. Induktionsschritt: Es seien I, J $(n+1)$-elementige Mengen. O.E. können wir $I = \{1,\dots,n+1\}$ annehmen. (Denn: Wie oben bemerkt, existiert eine bijektive Abbildung $f : \{1,\dots,n+1\} \to I$. Dann ist die Abbildung
$$S(I,J) \ni \varphi \mapsto \varphi \circ f \in S(\{1,\dots,n+1\},J)$$
bijektiv. Also ist $|S(\{1,\dots,n+1\},J)| = |S(I,J)|$.)
Für $j \in J$ definieren wir
$$T_j := \big\{\varphi \in S(I,J) : \varphi(n+1) = j\big\}\ .$$
Dann ist
$$\bigcup_{j\in J} T_j = S(I,J) \quad \text{und} \quad T_j \cap T_k = \emptyset \quad (j \neq k).$$
Also ist $\big|S(I,J)\big| = \sum_{j\in J} |T_j|$.
Definiert man für $\varphi \in T_j$ die Funktion $\psi : \{1,\dots,n\} \to J \setminus \{j\}$ durch
$$\psi(i) := \varphi(i) \quad (i = 1,\dots,n)$$
(also Definitionsbereich und Zielbereich jeweils um ein Element „verkleinert“), so ist
$$T_j \ni \varphi \mapsto \psi \in S(\{1,\dots,n\}, J \setminus \{j\})$$
eine bijektive Abbildung.
Nach Induktionsannahme gilt $\big|S(\{1,\dots,n\}, J\setminus\{j\})\big| = n!$ und damit auch $|T_j| = n!$.
Also ist $\big|S(I,J)\big| = \sum_{j\in J} n! = (n+1)n! = (n+1)!$.)

2. Ist M eine n-elementige Menge und ist $\mathcal{M}_\nu \subset \mathrm{Pot}(M)$ die Menge der ν-elementigen Teilmengen von M (wobei $\nu \in \{0,\dots,n\}$), so ist ([Ü])
$$|\mathcal{M}_\nu| = \binom{n}{\nu}.$$
Nach B. 2.8 ist damit auch
$$|\mathrm{Pot}(M)| = 2^n\ .$$

3 geordnete Körper, reelle und komplexe Zahlen

Definition 3.1 Es sei $K = (K, +, \cdot)$ ein Körper. Ist $<$ eine Ordnung auf K, so heißt $K = (K, +, \cdot, <)$ *geordnet*, wenn $<$ folgende Verträglichkeiten mit der Addition und Multiplikation erfüllt

(< 3) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ für alle $z \in K$ (1. Monotoniegesetz).

(< 4) Aus $x < y$ und $z > 0_K$ folgt $xz < yz$ (2. Monotoniegesetz).

Wir nennen $x \in K$ *positiv*, falls $x > 0_K$ gilt und *negativ*, falls $x < 0_K$ gilt.

Satz 3.2 *Es seien $K = (K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gilt*

1. *Es ist $x > 0_K$ genau dann, wenn $-x < 0_K$ ist,*
2. *Aus $x, y < 0_K$ oder $x, y > 0_K$ folgt $xy > 0_K$,*
3. *Für $x \neq 0_K$ ist $x^2 > 0_K$, insbesondere also $1_K = 1_K^2 > 0_K$,*
4. *Aus $0_K < x < y$ folgt $0_K < y^{-1} < x^{-1}$.*

Beweis. 1. Aus $0 < x$ folgt mit (< 3)

$$-x = 0 + (-x) < x + (-x) = 0 \ ,$$

d. h. $-x < 0$. Entsprechend folgt aus $-x < 0$ auch $0 = x + (-x) < x + 0 = x$.
2. Sind $x, y > 0$ so folgt mit (< 4) sofort $0 = 0y < xy$.
Es seien $x, y < 0$. Aus $x < 0$ folgt $-x > 0$ nach 1. Wegen $y < 0$ ergibt sich mit (< 4)

$$-(xy) = y(-x) < 0(-x) = 0 \ ,$$

also $xy > 0$ mit 1.
3. Ergibt sich unmittelbar aus 2. und (< 1).
4. Wir zeigen zunächst: $x^{-1} > 0$. (Denn: Angenommen, es ist $x^{-1} < 0$ (beachte $x^{-1} \neq 0$). Dann folgt mit (< 4) $1 = xx^{-1} < x0 = 0$ im Widerspruch zu 3.) Genauso ist $y^{-1} > 0$. Damit ergibt sich aus $x < y$ mit (< 4) $xy^{-1} < yy^{-1} = 1$ und wieder mit (< 4) $x^{-1}xy^{-1} < x^{-1}1 = x^{-1}$, also $y^{-1} < x^{-1}$. □

Bemerkung 3.3 Es sei K ein geordneter Körper. Per Induktion sieht man leicht:

1. Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist $x < y$, so gilt $nx < ny$ und im Falle $x > 0_K$ auch $0_K < x^n < y^n$.
2. Ist $x > 0_K$, so ist auch $nx > mx > 0_K$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$.

Insbesondere folgt aus 2., dass K unendlich ist. Genauer ergibt sich auch:
Sind $x, y \in K$ mit $x < y$, so liegen zwischen x und y unendlich viele Elemente aus K (Denn: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(n+1)1_K > n1_K > 0_K$, also $(n1_K)^{-1} > ((n+1)1_K)^{-1} > 0_K$ und folglich

$$y = x + (y-x)(1_K)^{-1} > x + (y-x)(2 \cdot 1_K)^{-1} > x + (y-x)(3 \cdot 1_K)^{-1} \cdots > x\ .)$$

Beispiel 3.4 1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ ist ein geordneter Körper.
2. Im Binärkörper $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ existiert keine Ordnungsrelation mit den Eigenschaften aus D. 3.1, da jeder geordnete Körper unendlich viele Elemente enthält (vgl. B 3.3).

Im Allgemeinen sind in geordneten Körpern Gleichungen der Form

$$x^n = c,$$

wobei $c \in K, n \in \mathbb{N}, n > 1$ nicht lösbar. Ist $c < 0$ und ist n gerade, so ist dies nach S. 3.2.3 ohnehin ausgeschlossen. Aber auch im Falle $c > 0$ existiert im Allgemeinen keine Lösung (wie schon seit der Antike bekannt ist).

Satz 3.5 *Für alle $x \in \mathbb{Q}$ ist $x^2 \neq 2$.*

Beweis. 1. Allgemein gilt: Ist $m \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist auch m^2 ungerade (denn: ist $m = 2\ell + 1$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$, so ist $m^2 = 4(\ell^2 + \ell) + 1$, also ebenfalls ungerade).
2. Angenommen, es existiert $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $(p/q)^2 = 2$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd und damit insbesondere nicht beide gerade sind.
Dann folgt $p^2 = 2q^2$, d. h. p^2 ist gerade. Nach 1. ist dann auch p gerade, d. h. $p = 2p_0$ für ein $p_0 \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$2q^2 = p^2 = 4p_0^2$$

d. h. $q^2 = 2p_0^2$, also q^2 und damit auch q gerade. Also ergibt sich ein Widerspruch. Damit ist die Annahme falsch d. h. es existiert kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. □

Unsere Ziele im Weiteren sind:
1. Erweitern von $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ zu einem geordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ so, dass $x^n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $c \geq 0$ lösbar ist.
2. Erweitern von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zu einem Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ so, dass $x^n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C}$ lösbar ist.

Definition 3.6 Es seien $(X, <)$ geordnet und $M \subset X$.

1. M heißt *nach oben beschränkt*, wenn ein $\overline{s} \in X$ existiert mit
$$x \leq \overline{s} \quad \text{für alle} \quad x \in M \ .$$
Ein solches $\overline{s}$ heißt dann *obere Schranke* von M.

2. M heißt *nach unten beschränkt*, wenn ein $\underline{s} \in X$ existiert mit
$$x \geq \underline{s} \quad \text{für alle} \quad x \in M \ .$$
Ein solches $\underline{s}$ heißt dann *untere Schranke* von M.

3. M heißt *beschränkt* wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel 3.7 Es sei $X = \mathbb{Q}$ und
$$M := \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\} \ \big(= \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 < 2\}\big) \ .$$
Dann ist M beschränkt, denn $\underline{s} = 0$ ist eine untere Schranke und $\overline{s} = 3/2$ ist eine obere Schranke von M (Ist $x > 3/2$, so folgt $x^2 > (3/2)^2 = 9/4 > 2$, d. h. $x \notin M$).

Mit einer oberen Schranke $\overline{s}$ von M ist natürlich jedes $\overline{\overline{s}} \in X$ mit $\overline{\overline{s}} > \overline{s}$ ebenfalls eine obere Schranke für M. Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage nach kleinsten oberen Schranken.

Definition 3.8 Es sei $(X, <)$ geordnet, und es sei $M \subset X$.

1. Ein obere Schranke $s^* \in X$ von M heißt *kleinste obere Schranke* (oder *Supremum*) von M, falls für jede obere Schranke $\overline{s}$ von M gilt
$$\overline{s} \geq s^* \ .$$

2. Eine untere Schranke $s_* \in X$ von M heißt *größte untere Schranke* (oder *Infimum*) von M, falls für jede untere Schranke $\underline{s}$ von M gilt

$$\underline{s} \leq s_* \ .$$

Bemerkung und Definition 3.9 Aus der Definition ergibt sich sofort, dass für jedes M höchstens ein Supremum und ein Infimum existieren. Wir schreiben (im Falle der Existenz)

$$s^* = \sup\ M \ .$$

Gilt zusätzlich $s^* \in M$, so ist $\sup M = \max M$.
Weiter schreiben wir (im Falle der Existenz)

$$s_* := \inf M.$$

Falls zusätzlich $s_* \in M$ gilt, so ist $\inf M = \min M$.

Beispiel 3.10 Es sei $X = \mathbb{Q}$.

1. Ist $M = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\}$, so gilt

   $$0 = \inf M = \min M \quad \text{und} \quad 1 = \sup M \ .$$

   (Denn: Offensichtlich ist 1 obere Schranke. Ist andererseits $s < 1$, so ist s keine obere Schranke, da etwa $x := \max\{1/2, (s+1)/2\} \in M$ und $s < x$. Also ist $1 = \sup M$.)

   Man sieht, dass $\sup M$ nicht in M liegt, d. h. $\max M$ existiert hier nicht!

2. Es sei $M = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$. Nach B. 3.7 ist M beschränkt. Hier ist wieder $\inf M = \min M = 0$, es existiert aber **kein Supremum** von M. Dies ergibt sich aus S. 3.5 und dem folgenden Resultat.

Satz 3.11 *Es sei K ein geordneter Körper, und es seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $c \in K$ mit $c > 0_K$. Wir setzen $M := \{x \in K : x \geq 0, x^n \leq c\}$. Dann gilt*

1. *M ist nichtleer und nach oben beschränkt.*

2. *Existiert $s := \sup M$, so gilt $s^n = c$.*

Beweis. 1. Stets ist $0 \in M$. Weiter ist $1+c$ obere Schranke vom M. Ist $x \in K$ mit $x > 1+c$, so gilt nach der Bernoullischen Ungleichung

$$x^n > (1+c)^n \geq 1 + nc > nc \geq c$$

und damit ist $x \notin M$.)
2. Zunächst gilt für $0 \leq b \leq a$

$$a^n - b^n \leq n(a-b)a^{n-1}\,. \tag{$*$}$$

Denn: Nach S. 2.1 ist

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-\nu-1} \leq n(a-b)a^{n-1}.$$

a) Angenommen, es ist $s^n > c$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $(s-\delta)^n \geq c$ (nach $(*)$ mit $a = s$ und $b = s - \delta$ ist $\delta := \dfrac{s^n - c}{ns^{n-1}}$ geeignet).
   Ist $x \in M$, so folgt $x^n \leq c \leq (s-\delta)^n$ und damit auch $x \leq s - \delta$. Also ist $s - h$ obere Schranke von M im Widerspruch dazu, dass s kleinste obere Schranke ist.

b) Angenommen, es ist $s^n < c$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $(s+\delta)^n \leq c$ (nach $(*)$ mit $a = s + \delta$ und $b = s$ ist

$$\delta := \min\left\{1, \frac{c - s^n}{n(s+1)^{n-1}}\right\}$$

   geeignet). Dann ist aber $s + \delta \in M$ und damit s keine obere Schranke von M. Widerspruch.

□

Definition 3.12 Ein geordnete Menge $(X, <)$ heißt *(ordnungs-)vollständig*, falls jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von X ein Supremum hat.

Bemerkung und Definition 3.13 Es sei K ein vollständiger geordneter Körper. Für jedes $c \in K, c \geq 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung

$$x^n = c$$

genau eine Lösung $s \in K$ mit $s \geq 0$.

(Denn: Die Existenz einer Lösung s ergibt sich aus S. 3.11. Sind $s_1, s_2 \in K$ mit $0 \leq s_1 < s_2$ so ergibt sich auch $s_1^n < s_2^n$. Also hat die Gleichung $x^n = c$ höchstens eine Lösung.)
Wir setzen
$$\sqrt[n]{c} := s\,.$$
Damit ergibt sich für $c, d \in K$ mit $c, d \geq 0$ aus den entsprechenden Potenzgesetzen leicht ([Ü])
$$\sqrt[n]{cd} = \sqrt[n]{c}\,\sqrt[n]{d} \qquad \text{und} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[nm]{c}$$
und für $0 \leq c < d$ auch $\sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{d}$.

Von zentraler Bedendeutung für die Analysis ist die folgende – alles andere als leicht zu beweisende – Tatsache

Satz 3.14 *Es existiert ein vollständiger geordneter Körper* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$*, der eine Erweiterung von* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ *darstellt (d. h.* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *und die Einschränkungen von* $+, \cdot$ *und* $<$ *auf* $\mathbb{Q}$ *stimmen mit den entsprechenden Funktionen bzw. Relationen in* $\mathbb{Q}$ *überein).*

Bemerkung 3.15 Die Elemente von $\mathbb{R}$ heißen *reelle Zahlen*. Als eine wichtige Folgerung aus der Vollständigkeit ergibt sich:

1. Für alle reellen Zahlen x existiert eine natürliche Zahl n mit $n > x$ (archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$).

2. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$ (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$).

Wir setzen noch für $a, b \in \mathbb{R}$ (mit $a \leq b$)
$$\begin{array}{lcllcl}
[a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & (-\infty, b] & := & \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
(a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & (-\infty, b) & := & \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
[a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & [a, \infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & (a, \infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
 & & & (\infty, \infty) & := & \mathbb{R}\,,\ (-\infty, 0) = \mathbb{R}_-\,,\ (0, \infty) = \mathbb{R}_+
\end{array}$$
Diese Mengen heißen *Intervalle*.
Wie wir oben gesehen haben, hat damit in $\mathbb{R}$ jede Gleichung $x^n = c$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c \geq 0$ eine Lösung. Leider gilt dies nicht mehr im Falle $c < 0$ und n gerade (da $x^n \geq 0$

für gerades n und beliebiges $x \in \mathbb{R}$ nach S. 3.2.3). Unser Ziel ist es nun, den Körper der reellen Zahlen so zu erweitern, dass $x^2 = c$ auch für $c < 0$ (also etwa $x^2 = -1$) lösbar ist. (Wir werden später sehen, dass tatsächlich dann auch $x^n = c$ für beliebiges c lösbar ist.)

Bemerkung und Definition 3.16 Wir setzen

$$\mathbb{C} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \qquad (= \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

und für $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

sowie

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2 \ , \ x_1 y_2 + x_2 y_1) \ .$$

Man rechnet leicht nach, dass dann $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist. $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ heißt *Körper der komplexen Zahlen* und $z \in \mathbb{C}$ heißt *komplexe Zahl*. Dabei ist die Null in $\mathbb{C}$ gegeben durch $0 = 0_{\mathbb{C}} = (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$ und die Eins in $\mathbb{C}$ ist gegeben durch $1 = 1_{\mathbb{C}} = (1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$. Weiter sieht man: Ist $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, so gilt

$$-z = (-x, -y) \qquad \text{und} \qquad z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{für } z \neq 0 \ .$$

Beispiel 3.17 Es sei $z_1 = (3, -1), \ z_2 = (1, 2)$.
Dann gilt $z_1 + z_2 = (4, 1), \ z_1 - z_2 = (2, -3)$ und

$$z_1 \cdot z_2 = (3, -1) \cdot (1, 2) = (3 - (-2), 6 - 1) = (5, 5) \ .$$

Bemerkung 3.18 Indem wir die komplexe Zahl $(x, 0)$ mit der reellen x identifizieren, können wir $\mathbb{C}$ als Erweiterung von $\mathbb{R}$ auffassen. *Wir schreiben dann auch kurz x statt $(x, 0)$.* Die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{R}$ ergeben sich dabei als Einschränkungen der Addition und der Multiplikation in $\mathbb{C}$. Man nennt weiterhin

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}$$

die *imaginäre Einheit* in $\mathbb{C}$. Für i gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \ .$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir jedes $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ in der Form

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

schreiben. Diese Darstellung heißt *Normaldarstellung* von z. Weiter nennen wir

$$\mathrm{Re}\, z := x \qquad \textit{Realteil} \text{ von } z$$

und

$$\mathrm{Im}\, z := y \qquad \textit{Imaginärteil} \text{ von } z\ .$$

So gilt etwa

$$z_1 = (3, -1) = 3 + i(-1)(= 3 - i), \qquad z_2 = (1, 2) = 1 + i2(= 1 + 2i).$$

Bemerkung 3.19 In $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist es nicht möglich, eine Ordnungsrelation $<$ (mit den Eigenschaften aus D. 3.1) zu definieren!
(Denn: Angenommen, doch. Dann gilt $1_\mathbb{C} > 0_\mathbb{C}$ nach S. 3.2.3, also $-1_\mathbb{C} < 0_\mathbb{C}$ nach S. 3.2.1. Für $z = i$ gilt mit S. 3.2.3 aber andererseits $0 < i^2 = -1_\mathbb{C}$ also Widerspruch zu (< 1).)

Definition 3.20 Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl.

1. Die komplexe Zahl $\overline{z} := x - iy$ heißt zu z *konjugiert komplex.*
2. Die Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty)$ heißt *Betrag* von z.

Geometrisch entsteht $\overline{z}$ durch Spiegelung von z an der reellen Achse. Der Betrag $|z|$ gibt anschaulich die Länge der Strecke von 0 zu z wieder (Pythagoras!)

Bemerkung 3.21 Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ergibt sich leicht

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \qquad \overline{(\overline{z})} = z$$

sowie $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ und $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Satz 3.22 *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

1. $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$ *ist,*
2. $|z| = |\overline{z}|\ , \quad |z| = |-z|\ , \quad |\mathrm{Re}\, z| \leq |z|\ , \quad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|,$

3. $|z|^2 = z\overline{z}$ *und* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ *(falls* $z \neq 0$*)*,

4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

5. *(Dreiecksungleichung)* $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Beweis. 1., 2. und 3. als [Ü].
4. Es gilt nach 3.

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2 \ .$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung.
5. Es gilt

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = \\ &= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\overset{2.}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &\overset{2./4.}{=} |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung für $z_1 + z_2$. Damit erhält man dann auch

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| \ .$$

□

Beispiel 3.23 Es gilt für $z = (3, -1) = 3 - i$

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \\ \overline{z} &= 3 - (-i) = 3 + i \\ z\overline{z} &= (3-i)(3+i) = 9 - 3i + 3i - i^2 = 9 + 1 \, \big(= |z|^2\big) \end{aligned}$$

Definition 3.24 In Verallgemeinerung von D. 2.3 setzen wir noch für $z \in \mathbb{C}$ und $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{z}{\nu} := \frac{1}{\nu!} \prod_{k=1}^{\nu} (z + 1 - k) \ = \begin{cases} \dfrac{z(z-1)\cdots(z-\nu+1)}{\nu!}, & \text{falls} \quad \nu > 0 \\ 1, & \text{falls} \quad \nu = 0 \end{cases}$$

Die komplexe Zahl $\dbinom{z}{\nu}$ heißt *Binomialkoeffizient* z *über* ν.

4 Stetigkeit und Grenzwerte

Im Weiteren sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 4.1 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{C}$.
1. f heißt *stetig an der Stelle* $x_0 \in X$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ .$$

2. f heißt *stetig auf der Menge* $M \subset X$, falls f stetig an jeder Stelle $x_0 \in M$ ist. Ist $M = X$, so heißt f kurz *stetig*.

Anschaulich bedeutet die Stetigkeit an einer Stelle x_0, dass die Funktionswerte $f(x)$ für x “nahe bei x_0” auch “nahe bei $f(x_0)$” liegen.

Beispiel 4.2 Es sei $X \subset \mathbb{K}$.
1. Ist $c \in \mathbb{C}$ und $f : X \to \mathbb{C}$ definert durch $f(x) = c$ $(x \in X)$, so ist f stetig.
2. Ist $f : X \to \mathbb{C}$ definert durch $f(x) = x$ $(x \in X)$, so ist f stetig.

Wir wollen eine Charakterisierung der Stetigkeit herleiten.

Definition 4.3 Es sei $X \subset \mathbb{K}$. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{K}$ heißt *Häufungspunkt* von X, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ existiert. Wir schreiben X' für die Menge aller Häufungspunkte von X. Ist $x \in X$ und kein Häufungspunkt, so heißt x_0 ein *isolierter Punkt* von X.

Beispiel 4.4 Es sei $X = \{1/k,\, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Dann ist $0 \in X'$. Weiter ist jedes $x \in X$ ein isolierter Punkt von X.

Bemerkung und Definition 4.5 Es seien $X \subset \mathbb{K}$, $x_0 \in X'$ und $f : X \to \mathbb{C}$.
1. Wir sagen, f hat den *Grenzwert* $c \in \mathbb{C}$ an x_0, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ existiert mit

$$|f(x) - c| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in X \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$f(x) \to c \qquad (x \to x_0) \ .$$

Man beachte, dass auch im Falle $x_0 \in X$, also im Falle, dass $f(x_0)$ existiert, der Wert $f(x_0)$ bei der Betrachtung keine Rolle spielt.
Aus $x_0 \in X'$ folgt, dass höchstens ein Grenzwert c von f an x_0 existiert. Wir schreiben im Falle der Existenz auch

$$\lim_{x \to x_0} f(x) := c\,.$$

Ganz praktisch ist auch die Tatsache, dass $f(x) \to c$ $(x \to x_0)$ genau dann gilt, wenn $|f(x) - c| \to 0$ $(x \to x_0)$.
2. Aus den Definitionen ergibt sich unmittelbar: Es gilt $f(x) \to c$ $(x \to x_0)$ genau dann, wenn die Funktion $f_0 : X \cup \{x_0\} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f_0(x) = \begin{cases} c, & \text{falls} \quad x = x_0 \\ f(x), & \text{falls} \quad x \neq x_0 \end{cases}$$

stetig an x_0 ist. Ist $x_0 \in X$, so gilt damit auch:

$$f \text{ stetig an } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \to f(x_0) \quad (x \to x_0).$$

(Aus der Definition der Stetigkeit folgt zudem sofort: Ist x_0 ein isolierter Punkt von X, so ist f stets stetig an x_0.)

Beispiel 4.6 Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases},$$

so gilt $f(x) \to 0 \neq 1 = f(0)$ $(x \to 0)$ und damit ist f nicht stetig an 0. Weiter ist $f_0(x) \equiv 0$ hier.

Definition 4.7 Es seien X eine beliebige Menge und $f, g : X \to \mathbb{C}$. Wir definieren

$$f \pm g : X \to \mathbb{C},\ (f \pm g)(x) := f(x) + g(x)\ (x \in X)$$
$$f \cdot g : X \to \mathbb{C},\ (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)\ (x \in X)$$

und im Falle $g(x) \neq 0$ auch

$$f/g : X \to \mathbb{C},\ (f/g)(x) := f(x)/g(x)\ (x \in X).$$

Der folgende Satz zeigt, dass Grenzwertbildung mit den algebraischen Operationen in $\mathbb{C}$ verträglich ist.

Satz 4.8 *Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f, g : X \to \mathbb{C}$. Weiter sei $x_0 \in X'$ mit*

$$f(x) \to a \quad \textit{und} \quad g(x) \to b \quad (x \to x_0).$$

Dann gilt

$$(f \pm g)(x) \to a \pm b, \qquad (f \cdot g)(x) \to a \cdot b \quad (x \to x_0)$$

und im Falle $g(x) \neq 0$, $b \neq 0$ auch $(f/g)(x) \to a/b$ $(x \to x_0)$.

Beweis. 1. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren ein $\delta_\varepsilon^{(1)} > 0$ und ein $\delta_\varepsilon^{(2)} > 0$ mit

$$|f(x) - a| < \varepsilon/2 \quad (0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon^{(1)}) \qquad \text{und} \qquad |g(x) - b| < \varepsilon/2 \quad (0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon^{(2)}) .$$

Also gilt für $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon := \min(\delta_\varepsilon^{(1)}, \delta_\varepsilon^{(2)})$:

$$|f(x) \pm g(x) - (a \pm b)| = |f(x) - a \pm (g(x) - b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

2. Zunächst existiert ein $\delta > 0$ mit $|g(x) - b| < 1$ für $0 < |x - x_0| < \delta$ und somit auch $|g(x)| = |g(x) - b + b| \leq 1 + |b| =: M$. Damit ist für $0 < |x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| \leq \\ &\leq |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \leq M|f(x) - a| + |a||g(x) - b| . \end{aligned}$$

Nach 1. konvergiert die rechte Seite gegen 0. Also folgt $(fg)(x) \to ab$ $(x \to x_0)$.
3. a) Wir zeigen zunächst:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b} .$$

Da $b \neq 0$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|g(x) - b| < |b|/2 \qquad (0 < |x - x_0| < \delta) .$$

Also gilt (umgekehrte Dreiecksungleichung!)

$$|g(x)| = |b + g(x) - b| \geq |b| - |g(x) - b| > |b| - |b|/2 = |b|/2 > 0 \qquad (0 < |x - x_0| < \delta) .$$

Damit ergibt sich

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|g(x) - b|}{|g(x)b|} < \frac{2}{|b|^2} |g(x) - b|.$$

Aus $|g(x) - b| \to 0$ folgt $1/g(x) \to 1/b$ $(x \to x_0)$.
b) Mit 2. und a) ergibt sich

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = a \cdot \frac{1}{b} .$$

□

Bemerkung 4.9 Aus S. 4.8 ergibt sich unmittelbar: Ist $X \subset \mathbb{K}$ und sind f, g stetig an $x_0 \in X$, so sind auch $f \pm g, f \cdot g$ und (im Falle der Existenz) f/g stetig an x_0.

Beispiel 4.10 Ein *Polynom* ist eine Funktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu x^\nu$$

mit $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{C}$. Ist $a_d \neq 0$, so heißt d der Grad von P.
Jedes Polynom ist stetig (ergibt sich aus B. 4.2 durch wiederholte Anwendung von B. 4.9.)
Sind P, Q Polynome und ist $Z(Q) := \{x \in \mathbb{C} : Q(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge von Q, so ist auch $P/Q : \mathbb{C} \setminus Z(Q) \to \mathbb{C}$ stetig (wieder nach B. 4.9).

Bemerkung 4.11 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{C}$ mit $f(x) \to c$ $(x \to x_0)$. Weiter sei $g : Y \to \mathbb{C}$ mit $W(f) \cup \{c\} \subset Y$ stetig an der Stelle c. Dann gilt $(g \circ f)(x) \to g(c)$ $(x \to x_0)$.
(Denn: Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\eta > 0$ mit

$$|g(y) - g(c)| < \varepsilon \qquad (y \in Y,\ |y - c| < \eta).$$

Weiter existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f(x) - c)| < \eta \qquad (0 < |x - x_0| < \delta).$$

Damit ist auch $|g(f(x)) - g(c)| < \varepsilon$ für $0 < |x - x_0| < \delta$.)
Insbesondere gilt im Falle $x_0 \in X$: Ist f stetig an x_0, so ist auch $g \circ f$ stetig an x_0.

Bemerkung und Definition 4.12 Ist speziell $X \subset \mathbb{R}$ so setzen wir

$$X'_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ Häufungspunkt von } X \cap (x, \infty)\}$$

und

$$X'_- := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ Häufungspunkt von } X \cap (-\infty, x)\}.$$

Ist $x_0 \in X'_+$ und existiert der Grenzwert $c := \lim\limits_{x \to x_0} f|_{X \cap (x_0, \infty)}(x)$ so sagt man, dass f an x_0 den *rechtsseitigen Grenzwert* c hat und schreibt dann $f(x) \to c$ $(x \to x_0^+)$ sowie

$$f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x) := c.$$

Entsprechend spricht man im Falle der Existenz von $c := \lim_{x \to x_0} f|_{X \cap (-\infty, x_0)}(x)$ vom *linksseitigen Grenzwert* c. Man schreibt dann $f(x) \to c$ $(x \to x_0^-)$ sowie

$$f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x) := c.$$

Es gilt damit ([Ü]): Ist $x_0 \in X'_+ \cap X'_-$, so existiert $c = \lim_{x \to x_0} f(x)$ genau dann, wenn $f(x_0^+)$ und $f(x_0^-)$ existieren und

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) = c$$

erfüllt ist. Ist speziell X ein Intervall und existieren $f(x_0^+)$ und $f(x_0^-)$ mit

$$f(x_0^+) \neq f(x_0^-),$$

so heißt x_0 *Sprungstelle* von f.
Ist X nach oben unbeschränkt, so schreiben wir ferner

$$f(x) \to c \quad (x \to +\infty) \qquad \text{oder auch} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) := c$$

falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $R_\varepsilon > 0$ so existiert, dass

$$|f(x) - c| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X,\, x > R_\varepsilon\ .$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass $\lim_{t \to 0^+} f(1/t)$ existiert (und $= c$ ist). Also gelten alle oben bewiesenen Ergebnisse auch für Grenzwerte $x \to +\infty$.
Entsprechend definiert man im Falle, dass X nach unten unbeschränkt ist, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ mit $x < -R_\epsilon$ statt $x > R_\epsilon$ und es ist dann $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(1/t)$.

Beispiel 4.13 1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad x = 0 \\ -1, & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Dann gilt

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \qquad f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Damit ist x_0 eine Sprungstelle von f und $\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht.
2. Ist $f(x) = 1/x$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$

3. (Dirichlet-Funktion) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Dann existiert für **kein** x_0 in $\mathbb{R}$ der (rechts- oder linksseitige) Grenzwert!
(Denn: Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ und ist $\delta > 0$, so existieren $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (also $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$) mit $x_0 < x, y < x_0 + \delta$. Hieraus folgt, dass kein rechtsseitiger Grenzwert an x_0 existiert. Entsprechend sieht man, dass kein linksseitiger Grenzwert existiert.)
Insbesondere ist damit f unstetig an allen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$.

Wir kommen zu einem ersten für die Analysis zentralen Satz.

Satz 4.14 *(Zwischenwertsatz)*
Es sei $I \neq \emptyset$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf I. Dann gilt

1. *Für alle $\underline{y}, \overline{y} \in W(f)(= f(I))$ mit $\underline{y} < \overline{y}$ ist $[\underline{y}, \overline{y}] \subset W(f)$.*
2. *$W(f)$ ist ein Intervall.*

Beweis. 1. Wir zeigen: Ist $\eta \in (\underline{y}, \overline{y})$ so existiert ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \eta$.
Zunächst existieren $\underline{x}, \overline{x} \in I$ mit $f(\underline{x}) = \underline{y}$ und $f(\overline{x}) = \overline{y}$. O. E. sei $\underline{x} < \overline{x}$. Wir setzen

$$M := \{x \in [\underline{x}, \overline{x}] : f(x) \leq \eta\} .$$

Dann ist $M \neq \emptyset$ (da $\underline{x} \in M$) und beschränkt, also existiert

$$\xi := \sup M \in [\underline{x}, \overline{x}] \subset I .$$

Dabei ist $f(\xi) \leq \eta$ (d. h. $\xi = \max M$).
(Denn: Angenommen, $\xi \notin M$. Dann ist $\xi \in M'$. Da f stetig an $\xi \in I$ ist, gilt $f|_M(x) \to f(\xi)$ $(x \to \xi)$. Aus $f(x) \leq \eta$ für alle $x \in M$ folgt $f(\xi) \leq \eta$, also $x \in M$. Widerspruch.)
Damit ergibt sich aus $\xi < \overline{x}$ und $\eta < f(x) \to f(\xi)$ $(x \to \xi^+)$ auch $\eta \leq f(\xi)$, also $f(\xi) = \eta$.
2. Man sieht leicht: $J \subset \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn für alle $\underline{y}, \overline{y} \in J$ mit $\underline{y} < \overline{y}$ auch $[\underline{y}, \overline{y}] \subset J$ gilt. $\square$

Definition 4.15 Unter den Bedingungen von D. 4.5 sei speziell $f : X \to \mathbb{R}$. Dann schreiben wir

$$f(x) \to +\infty \qquad (\text{bzw. } f(x) \to -\infty) \qquad (x \to x_0),$$

falls für alle $R > 0$ ein $\delta_R > 0$ so existiert, dass

$$f(x) > R \qquad (\text{bzw. } f(x) < -R) \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta_R \,.$$

Entsprechend definieren wir wie in D. 4.12

$$f(x) \to \pm\infty \qquad (x \to x_0^{\pm}),$$

sowie

$$f(x) \to \pm\infty \quad (x \to \pm\infty) \,.$$

Bemerkung 4.16 Ist $d \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x^d$ für $x \geq 0$, so folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass $f([0,\infty)) \subset [0,\infty)$ ein Intervall ist. Mit $f(0) = 0$ und $f(x) = x^d \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ ist also

$$f([0,\infty)) = [0,\infty).$$

Damit hat für jedes $c \geq 0$ die Gleichung $x^d = c$ eine Lösung. Wir erhalten also aus dem Zwischenwertsatz noch einmal (jetzt völlig schmerzlos) die Existenz von Wurzeln positiver Zahlen.

Definition 4.17 Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls $\{|f(x)| : x \in X\}$ beschränkt in $\mathbb{R}$ ist. Ist $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$, so heißt f

1. *monoton wachsend*, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$,
2. *streng monoton wachsend*, falls $f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$,
3. *(streng) monoton-fallend*, falls $-f$ (streng) monoton wachsend ist.

Die Dirichlet-Funktion zeigt, dass beschränkte Funktionen im Allgemeinen keine rechts- oder linksseitigen Grenzwerte haben. Der folgende Satz zeigt, dass beschränkte monotone Funktionen stets rechtsseitige Grenzwerte besitzen. Eine entsprechende Aussage gilt natürlich auch für linksseitige Grenzwerte.

Satz 4.18 *Es sei $X \subset \mathbb{R}$ und es sei $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt und monoton (wachsend oder fallend). Ist $x_0 \in X'_+$, so existiert $f(x_0^+)$ und es gilt im Falle $x_0 \in X$*

$$f(x_0) \le f(x_0^+) \qquad \text{falls } f \text{ monoton wächst}$$

und

$$f(x_0) \ge f(x_0^+) \qquad \text{falls } f \text{ monoton fällt}\,.$$

Beweis. O. E. sei f monoton wachsend (ansonsten betrachte man $-f$).
Da f beschränkt ist, existiert

$$c := \inf_{x \in X \cap (x_0, \infty)} f(x)$$

und es gilt $c \ge f(x_0)$, falls $x_0 \in X$. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $x_\varepsilon > x_0$ mit $f(x_\varepsilon) < c + \varepsilon$. Mit $\delta_\varepsilon := x_\varepsilon - x_0$ gilt dann für alle x mit $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon = x_\varepsilon$

$$c \le f(x) \le f(x_\varepsilon) < c + \varepsilon$$

Damit ist $f(x_0^+) = c$. □

Bemerkung 4.19 Mit gleicher Argumentation ergibt sich im Falle, dass X nach oben unbeschränkt ist, die Existenz von $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ und in Falle, dass X nach unten unbeschränkt ist, die Existenz von $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Bemerkung und Definition 4.20 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt. Ist $x_0 \in X'$, so ist Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(r) := \sup_{0 < |x - x_0| < r} f(x)$$

monoton wachsend und beschränkt. Also existiert der rechtsseitige Grenzwert $g(0^+)$ nach S. 4.18. Die Zahl

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) := \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) := g(0^+) \left(= \lim_{r \to 0^+} g(r) \right)$$

heißt *Limes superior* von f an der Stelle x_0. Entprechend definiert man den *Limes inferior* von f an x_0 durch

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) := \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) := \lim_{r \to 0^+} \left(\inf_{0 < |x - x_0| < r} f(x) \right)\,.$$

Ist $X \subset \mathbb{R}$ und nach oben unbeschränkt, so definieren wir zudem

$$\limsup_{x\to+\infty} f(x) := \lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{x>R} f(x)\right)$$

und entsprechend im Fall, dass X nach unten unbeschränkt ist,

$$\limsup_{x\to-\infty} f(x) := \lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{x<-R} f(x)\right).$$

Schließlich definiert man noch $\liminf\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ jeweils mit inf statt sup.

Eine wichtige Folgerung aus der Existenz des Supremums und des Infimums beschränkter Mengen (und damit der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$) ist die Existenz von $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$ für beliebige beschränkte reellwertige Funktionen (und $x_0 \in X'$). So gilt etwa im Falle der Dirichlet-Funktion f

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \liminf_{x\to x_0} f(x) = 0$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

5 Folgen und Reihen

Es seien I, Y nichtleere Mengen und $a : I \to Y$. Man schreibt dann auch $(a_j)_{j\in I}$ oder kurz (a_j).
Ist $I \subset \mathbb{Z}$, so spricht man von einer *Folge* (*in* Y). Wir werden im Weiteren nur Folgen betrachten, für die I nach oben unbeschränkt und nach unten beschränkt ist. Im Falle $I = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$ schreibt man dabei auch $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$. In diesem Abschnitt wird $Y = \mathbb{K}$ (Folgen reeller oder komplexer Zahlen) sein. Da Folgen in $\mathbb{K}$ spezielle $\mathbb{C}$-wertige Funktionen sind (mit Definitionsbereich $I \subset \mathbb{R}$), stehen sämtliche Begriffe und Ergebnisse des vorherigen Abschnitts zu Verfügung.

Definition 5.1 Eine Folge $(a_n)_{n\in I}$ in $\mathbb{K}$ heißt

1. *konvergent*, falls ein $a \in \mathbb{K}$ existiert mit $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.
2. eine *Nullfolge*, falls $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt.

Beispiel 5.2 1. (*harmonische Folgen*) Für alle $d \in \mathbb{N}$ sind die Folgen (a_n) in $\mathbb{R}$ mit $a_n = 1/n^d$ Nullfolgen (archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$).

2. (*geometrische Folgen*) Für festes $q \in \mathbb{K}$ sei $a_n = q^n$, also $(a_n) = (q, q^2, q^3, \ldots)$. Dann gilt

a) Für $|q| < 1$ ist (q^n) eine Nullfolge, also $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

b) Für $|q| > 1$ ist (q^n) unbeschränkt.

(Denn:
Für $q = 0$ ist die Behauptung klar.
Es sei $0 < |q| < 1$. Dann ist mit einem $a > 0$

$$1/|q| = 1 + a\ .$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt $(1 + a)^n \geq 1 + na > na$ und daher

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+a)^n} < \frac{1}{na} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Aus $1/n \to 0$ folgt die Behauptung.

Nun sei $|q| > 1$, d. h. $|q| = 1 + b$ mit einem $b > 0$. Mit der Bernoullischen Ungleichung gilt

$$|q^n| = (1+b)^n \geq 1 + nb \qquad (n \in \mathbb{N}) ,$$

d. h. (q^n) ist unbeschränkt.)

Bemerkung und Definition 5.3 Es sei im Weiteren stets $N, I \subset \mathbb{Z}$ nach oben unbeschränkt und nach unten beschränkt. Ist $Y \neq \emptyset$ eine Menge, $(a_n) = (a_n)_{n \in N}$ eine beliebige Folge in Y und $I \subset N$, so heißt $(a_n)_{n \in I}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n \in N}$. Wir schreiben im Fall der Konvergenz der Teilfolge $(a_n)_{n \in I}$ dann auch

$$a_n \to a \qquad (n \to \infty, n \in I).$$

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar für Folgen (a_n) in $\mathbb{K}$: Ist (a_n) konvergent, so ist auch jede Teilfolge konvergent (mit gleichem Grenzwert). Ist $I = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, wobei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist, so entspricht $(a_n)_{n \in I}$ die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, d. h. man kann, wenn man möchte, die Teilfolgen wieder mit den natürlichen Zahlen indizieren.

Beispiel 5.4 1. Es sei $a_n = (-1)^n$. Dann sind mit $c\mathbb{N} \pm d := \{ck \pm d : k \in \mathbb{N}\}$

$$(a_n)_{n \in 2\mathbb{N}} = (1)_{n \in 2\mathbb{N}} \qquad \text{und} \qquad (a_n)_{n \in 2\mathbb{N}+1} = (-1)_{n \in 2\mathbb{N}+1}$$

Teilfolgen von (a_n). Dabei gilt $a_n \to 1$ $(n \to \infty, n \in 2\mathbb{N})$ (oder, anders formuliert, $a_{2k} \to 1$ für $k \to \infty$) und $a_n \to -1$ $(n \to \infty, n \in 2\mathbb{N} + 1)$ (alternativ: $a_{2k+1} \to -1$ für $k \to \infty$). Die Folge (a_n) selbst ist divergent.

Satz 5.5 *Es sei $(a_n)_{n \in N}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *(Hauptsatz über monotone Folgen) Ist (a_n) monoton wachsend oder fallend, so ist (a_n) konvergent. Genauer gilt:*

$$a_n \to \begin{cases} \sup\limits_{k \in N} a_k & \text{falls } a_n \uparrow \\ \inf\limits_{k \in N} a_k & \text{falls } a_n \downarrow \end{cases} .$$

2. *Ist $a^* := \limsup\limits_{n \to \infty} a_n$, so existiert eine Teilfolge $(a_n)_{n \in I^*}$ mit*

$$a_n \to a^* \qquad (n \to \infty, n \in I^*).$$

3. *Ist* $a_* := \liminf_{n\to\infty} a_n$*, so existiert eine Teilfolge* $(a_n)_{n\in I_*}$ *mit*

$$a_n \to a_* \qquad (n \to \infty, n \in I_*).$$

Beweis. 1. Ergibt sich unmittelbar aus B. 4.19 und dem vorhergehenden Beweis zu S. 4.18.
2. Wir definieren (n_k) induktiv. Dazu setzen wir $n_1 := n \in N$. Sind $n_1, \ldots, n_k$ bereits definiert, so setzen wir

$$n_{k+1} := \min\{n \in N : n > n_k,\ a^* - 1/k < a_n < a^* + 1/k\}$$

(existiert nach Definition des $\limsup$; [Ü]). Für $I^* := \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ gilt dann $a_n \to a^*$ $(n \to \infty, n \in I^*)$.
3. Analog □

Satz 5.6 *(Intervallschachtelungsprinzip)*

1. *Ist* I_n *eine Folge von Intervallen der Form* $I_n = [a_n, b_n]$*, mit* $I_{n+1} \subset I_n$ $(n \in \mathbb{N})$*, so existieren* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \le b$ *und*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a, b]\ .$$

2. *Gilt zusätzlich* $b_n - a_n \to 0\,(n \to \infty)$*, so ist* $a = b$*, d. h.* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *ist einpunktig.*

Beweis. 1. Nach Voraussetzung ist $(a_n)\uparrow$ und $(b_n)\downarrow$. Außerdem gilt $a_1 \le a_n \le b_n \le b_1$. Also gilt nach dem Hauptsatz über monotone Folgen

$$a_n \to \sup_{k\in\mathbb{N}} a_k =: a \quad \text{und} \quad b_n \to \inf_{k\in\mathbb{N}} b_k =: b\ .$$

Aus $a_n \le b_n$ folgt $a \le b$, also insgesamt

$$a_n \le a \le b \le b_n \qquad (n \in \mathbb{N})\ .$$

Folglich ist

$$[a, b] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n\ .$$

Andererseits folgt für $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ aus $a_n \leq x \leq b_n$ für alle n auch $a \leq x \leq b$, also $x \in [a,b]$.
2. Aus $0 \leq b - a \leq b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt $b - a = 0$. $\square$

Als Konsequenz aus S. 5.5 erhalten wir ein weiteres zentrales Ergebnis der Analysis:

Satz 5.7 *(Bolzano-Weierstraß)*
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. 1. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann wähle man die Teilfolge etwa wie in S. 5.5.2.
2. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und es sei $(a_n) = (a_n)_{n\in N}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Ist

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n$$

die Normaldarstellung von a_n, so sind die Folgen (α_n) und (β_n) in $\mathbb{R}$ beschränkt (es gilt $|\alpha_n| \leq |a_n|$ und $|\beta_n| \leq |a_n|$). Nach 1. existieren eine Teilfolge $(\alpha_n)_{n\in I}$ von (α_n) und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_n \to \alpha$ $(n \to \infty, n \in I)$. Wieder nach 1. existieren auch eine Teilfolge $(\beta_n)_{n\in J}$ von $(\beta_n)_{n\in I}$ und ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta_n \to \beta$ $(n \to \infty, n \in J)$. Mir S. 4.8 folgt $a_n = \alpha_n + i\beta_n \to \alpha + i\beta$ $(n \to \infty, n \in J)$. $\square$

Bemerkung und Definition 5.8 Es seien $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $(a_\nu)_{\nu=n_0}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{K}$.
1. Die der Folge (a_ν) zugeordnete Folge $(s_n)_{n=n_0}^\infty$ der *Partial-* oder *Teilsummen*

$$s_n := \sum_{\nu=n_0}^{n} a_\nu \qquad (n \in \mathbb{Z},\, n \geq n_0)$$

heißt (*die mit* (a_ν) *gebildete*) *Reihe* und wird mit $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ bezeichnet. Die a_ν heißen dann *Reihenglieder*.
2. Ist die Reihe $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ (also die Folge (s_n)) konvergent gegen s, so schreiben wir $s =: \sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$. Die Zahl s heißt dann der *Reihenwert*.

Man beachte, dass das Symbol $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ also zwei Bedeutungen hat: Erstens steht es für die Folge (s_n) der Teilsummen und zweitens (im Falle der Konvergenz!) für deren Grenzwert.

Beispiel 5.9 (geometrische Reihen) Es sei $a_\nu = q^\nu$ für ein $q \in \mathbb{K}$, $|q| < 1$. Dann ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ konvergent mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \,.$$

Speziell ergibt sich etwa für $q = 1/2$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 2 \,.$$

Für das Rechnen mit konvergenten Reihen gilt

Satz 5.10 *Es seien* $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ *und* $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu$ *konvergente Reihen in* $\mathbb{K}$, *und es seien* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. *Dann ist auch* $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} (\alpha a_\nu + \beta b_\nu)$ *konvergent mit*

$$\sum_{\nu=n_0}^{\infty} (\alpha a_\nu + \beta b_\nu) = \alpha \sum_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu + \beta \sum_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu \,.$$

Beweis. Ergibt sich leicht durch Anwendung von S. 4.8. □

Damit gilt etwa

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\cdot 3^\nu + 4}{5^\nu} &= 2\cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{3^\nu}{5^\nu} + 4\cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{5^\nu} \\ &= 2\cdot \frac{1}{1-3/5} + 4\cdot \frac{1}{1-1/5} = 10 \,. \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man aus S. 5.10 auch: Ist $n > n_0$, so ist $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ genau dann konvergent, wenn $\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} a_\nu$ konvergiert, und in diesem Fall ist

$$\sum_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu = \sum_{\nu=n_0}^{n-1} a_\nu + \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \,.$$

Für Konvergenzuntersuchungen ist es also unwichtig, wie die untere Summationsgrenze aussieht. Wir werden daher im Weiteren meist o. E. $n_0 = 0$ (oder $n_0 = 1$) betrachten.

Bemerkung 5.11 Eine **notwendige Bedingung** für die Konvergenz einer Reihe ist, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden, d. h. ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent, so gilt

$$a_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

(Denn: Ist $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$, so gilt

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = 0 \quad (n \to \infty).)$$

Beispiel 5.12 1. Ist $a_n = q^n$ mit $|q| \geq 1$, so ist $|a_n| \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$, also ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ sicher divergent. Damit ergibt sich für geometrische Reihen insgesamt:
$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ **ist genau dann konvergent, wenn** $|q| < 1$ **ist**.
2. Wir betrachten die harmonische Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu$. Hier gilt $a_n = 1/n \to 0$ $(n \to \infty)$, aber

$$\sum_{\nu=1}^{2^k} \frac{1}{\nu} = 1 + \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{\nu=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} \frac{1}{\nu} \geq 1 + \sum_{\ell=1}^{k} 2^{\ell-1} \frac{1}{2^\ell} = 1 + \frac{k}{2} \to \infty \quad (k \to \infty).$$

Also gilt $s_{2^k} \to \infty$ und damit ist die harmonische Reihe divergent.

Im Falle von Reihen mit nichtnegativen Gliedern (wie etwa der harmonischen Reihe) können nur zwei wesentlich unterschiedliche Situationen auftreten.

Bemerkung 5.13 Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ eine Reihe mit $a_\nu \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \uparrow$. Also gilt

- entweder ist (s_n) beschränkt und damit $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent (Hauptsatz über monotone Folgen)
- oder (s_n) ist unbeschränkt und damit $s_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Wir schreiben im ersten Fall dann auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu < \infty$ und im zweiten Fall $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \infty$.
Es gilt damit: Ist (b_ν) eine Folge mit $a_\nu \leq b_\nu$ $(\nu \geq n_0)$ für ein $n_0 \geq 0$ und $\sum_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu < \infty$, so ist auch

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu < \infty.$$

(Denn: Aufsummieren ergibt

$$\sum_{\nu=n_0}^{n} a_\nu \leq \sum_{\nu=n_0}^{n} b_\nu \leq \sum_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu$$

und damit auch die Beschränktheit der Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ (dafür ist es unerheblich, ob man von 0 oder n_0 an summiert)).
Man nennt $\sum_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu$ dann eine konvergente *Majorante* von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$

Beispiel 5.14 (allgemeine harmonische Reihen) Es sei $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^d} = \begin{cases} = \infty & \text{falls } d = 1 \\ < \infty & \text{falls } d > 1 \end{cases} .$$

(Denn: Für $d = 1$ ergibt sich die Behauptung aus B. 5.12. Für $d > 1$ ist

$$\frac{1}{\nu^d} \leq \frac{1}{\nu^2} \leq \frac{1}{(\nu-1)\nu} =: b_\nu \ .$$

Weiter ist ([Ü])

$$\sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{(\nu-1)\nu} = 1 - \frac{1}{n} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

also ist $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{(\nu-1)\nu} = 1$. Damit ist $\sum_{\nu=2}^{\infty} b_\nu$ eine konvergente Majorante. Mit B. 5.13 folgt die Behauptung.)

Wählt man als spezielle Majorante eine geometrische Reihe, so erhält man weitere Konvergenzkriterien:

Satz 5.15 *(Wurzelkriterium/Quotientenkriterium)*
Es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *eine Reihe mit* $a_\nu \geq 0$. *Weiter existiere eine Folge* (δ_ν) *mit* $\delta_\nu \to \delta < 1$ *und*

$$\sqrt[\nu]{a_\nu} \leq \delta_\nu \qquad (\nu \geq n_0)$$

oder ($a_\nu > 0$ *und)*

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \leq \delta_\nu \qquad (\nu \geq n_0).$$

Dann ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu < \infty$.

Beweis. 1. Nach Voraussetzung ist $\sqrt[\nu]{a_\nu} \le \delta_\nu$ und damit auch $a_\nu \le \delta^\nu$ für alle $\nu \ge n_0$. Aus $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \delta^\nu < \infty$ folgt $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu < \infty$ nach B. 5.13.
2. Ist $\eta \in (\delta, 1)$, so existiert ein $m \ge n_0$ mit $\delta_\nu < \eta$ für $\nu \ge m$. Damit ergibt sich für $\nu \ge m$

$$a_\nu = \frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} \frac{a_{\nu-1}}{a_{\nu-2}} \cdots \frac{a_{m+1}}{a_m} a_m \le \eta^{\nu-m} a_m = \eta^\nu \frac{a_m}{\eta^m}$$

also auch

$$\sqrt[\nu]{a_\nu} \le \eta \sqrt[\nu]{\frac{a_m}{\delta^m}} \to \eta < 1.$$

Mit 1. folgt die Behauptung. □

Beispiel 5.16 Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $0 < \delta < 1$. Dann ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^d \delta^\nu < \infty.$$

(Denn: Aus

$$\frac{(\nu+1)^d \delta^{\nu+1}}{\nu^d \delta^\nu} = \delta \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right)^d \to \delta < 1 \quad (\nu \to \infty)$$

ergibt sich die Behauptung aus S. 5.15.)
Insbesodere folgt hieraus mit B. 5.11, dass $(n^d \delta^n)$ eine Nullfolge ist.

Wir haben in B 5.11 gesehen, dass allgemein bei Konvergenz einer Reihe die Reihenglieder notwendig eine Nullfolge bilden. Bei sog. alternierenden Reihen ist die Bedingung auch hinreichend:

Satz 5.17 *(Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)*
Es sei $a_\nu \ge 0$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$ und (a_ν) monoton fallend.

1. *Ist $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu$, so ist (s_{2m}) monoton fallend und (s_{2m+1}) monoton wachsend. Außerdem gilt $s_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu$ konvergent.*

Beweis. 1. Für $n \geq 2$ ist

$$s_n - s_{n-2} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-2} (-1)^\nu a_\nu = (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{n-1} - a_n)}_{\geq 0}.$$

Also ist $s_{2m} - s_{2m-2} \leq 0$ und $s_{2m+1} - 2_{2m-1} \geq 0$ $(m \in \mathbb{N})$. Weiter gilt für $m \in \mathbb{N}$

$$s_{2m-1} = \sum_{\nu=0}^{2m-1} (-1)^\nu a_\nu = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2m-2} - a_{2m-1})}_{\geq 0} \geq 0$$

und damit auch $s_{2m} = s_{2m-1} + a_{2m} \geq 0$.
2. Nach dem Hauptsatz über monotone Folgen ist (s_{2m}) konvergent. Ist $s := \lim\limits_{m\to\infty} s_{2m}$, so gilt auch

$$s_{2m+1} = s_{2m} - \underbrace{a_{2m+1}}_{\to 0} \to s \quad (m \to \infty) .$$

Hieraus folgt $s_n \to s$ für $n \to \infty$ ([Ü]). □

Beispiel 5.18 (alternierende harmonische Reihe)
Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu/\nu$ konvergiert nach S. 5.17 (denn: $a_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$). Während also $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu$ (nach B. 5.12) divergiert, führt das "Anbringen" abwechselnder Vorzeichen zur Konvergenz.

6 Cauchy-Kriterium und elementare Funktionen

Definition 6.1 Eine Folge $(a_n) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ existiert mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m > R.$$

Satz 6.2 *Es sei (a_n) eine Cauchy-Folge. Dann gilt*
1. (a_n) ist beschränkt.
2. Hat (a_n) eine konvergente Teilfolge $(a_n)_{n\in I}$, so ist (a_n) konvergent.

Beweis. 1. Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < 1 \qquad (n, m > n_0)\ ,$$

also $|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < |a_{n_0}| + 1$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist

$$|a_n| \leq \max\{|a_1| + 1, \ldots, |a_{n_0}| + 1\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Es sei a der Grenzwert der Teilfolge $(a_n)_{n\in I}$. Wir zeigen: $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $R > 0$ mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \qquad (n, m > R)\ .$$

Weiter existiert ein $k \in I$ so, dass $k > R$ und $|a_k - a| < \varepsilon/2$. Damit ist

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_k| + |a_k - a| < \varepsilon \qquad (n > R)\ .$$

□

Ein weiterer zentraler Baustein der Analysis ist

Satz 6.3 *(Cauchysches Konvergenzkriterium)*
Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ ist ***genau dann*** *konvergent wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. 1. Es sei (a_n) konvergent und $a := \lim a_n$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ $(n > R)$. Also gilt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m > R\ .$$

2. Es sei umgekehrt (a_n) eine Cauchy-Folge. Dann ist (a_n) jedenfalls beschränkt nach S. 6.2.1. Also hat (a_n) nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_n)_{n\in I}$. Nach S. 6.2.2 ist (a_n) konvergent. □

Satz 6.4 *(Cauchy-Kriterium für Reihen)*
Es sei (a_ν) eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ genau dann konvergent, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ so existiert, dass

$$\Big| \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \Big| < \varepsilon \qquad (n > m > R).$$

Beweis. Ist $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$, so ist für $n > m \geq 0$

$$|s_n - s_m| = |s_m - s_n| = \Big| \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \Big|.$$

Damit ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen. □

Eines der wichtigsten Kriterien für Konvergenz für Reihen ist

Satz 6.5 *Es sei (a_ν) eine Folge in $\mathbb{K}$. Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$, so ist auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent.*

Beweis. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert nach S. 6.4 ein $R > 0$ so, dass

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} b_\nu < \varepsilon \qquad (n > m > R).$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\Big| \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \Big| \leq \sum_{\nu=m+1}^{n} |a_\nu| < \varepsilon \qquad (n > m > R).$$

Wieder nach S. 6.4 ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent. □

Bemerkung und Definition 6.6 Es sei (a_ν) eine Folge in $\mathbb{K}$. Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$ ist. Nach S. 6.5 ist jede absolut konvergente Reihe auch konvergent.
Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent und $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| = \infty$, so heißt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *bedingt konvergent*.

Beispiel 6.7 1. Für $|q| < 1$ ist die geometrische Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ absolut konvergent (da $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |q|^\nu$ konvergiert).
2. Es sei $d \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu/\nu^d$ ist für $d = 1$ bedingt konvergent und für $d \geq 2$ absolut konvergent (B. 5.18 und B. 5.14).

Bemerkung und Definition 6.8 Wir betrachten $a_\nu := \frac{z^\nu}{\nu!}$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$, wobei $z \in \mathbb{C}$ fest ist. Dann gilt (für $z \neq 0$)

$$\frac{|a_{\nu+1}|}{|a_\nu|} = \frac{|z|^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \frac{\nu!}{|z|^\nu} = \frac{|z|}{\nu+1} \to 0 \quad (\nu \to \infty)\,.$$

Damit liefert das Quotientenkriterium die absolute Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (und für $z = 0$ ist die Reihe trivialerweise konvergent).
Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\exp(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \qquad (z \in \mathbb{C})\ ,$$

heißt *(komplexe) Exponentialfunktion.*

Eine der zentralen Eigenschaften der Exponentialfunktion stellt die folgende Funktionalgleichung dar, die zeigt, dass exp aus der Addition eine Multiplikation macht.

Satz 6.9 *Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)\ .$$

Beweis. Für $z, w \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$ ist

$$\left(\sum_{\nu=0}^{2m} \frac{z^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum_{\mu=0}^{2m} \frac{w^\mu}{\mu!}\right) = \sum_{\nu+\mu \leq 2m} \frac{z^\nu w^\mu}{\nu!\mu!} + \sum_{\nu+\mu > 2m} \frac{z^\nu w^\mu}{\nu!\mu!} =: s_m + \varepsilon_m\,.$$

Dabei gilt

$$s_m = \sum_{n=0}^{2m} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu w^{n-\nu}}{\nu!(n-\nu)!} = \sum_{n=0}^{2m} \frac{1}{n!} (z+w)^n \to e^{z+w} \quad (m \to \infty).$$

Da $\left(\sum\limits_{\nu=0}^{2m} \frac{z^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum\limits_{\mu=0}^{2m} \frac{w^\mu}{\mu!}\right)$ gegen $e^z e^w$ konvergiert, reicht es zu zeigen: $\varepsilon_m \to 0$ $(m \to \infty)$. Wir setzen $r := \max\{|z|, |w|, 1\}$. Aus $\nu+\mu > 2m$ folgt $\nu > m$ oder $\mu > m$ und damit

$$|\varepsilon_m| \leq \sum_{\nu+\mu>2m} \frac{r^{\nu+\mu}}{(m+1)!} \leq \frac{r^{4m}}{(m+1)!} \sum_{\nu+\mu>2m} 1 \leq \frac{2r^{4m}}{(m-1)!} \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

□

Bemerkung und Definition 6.10 1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(z) \neq 0$ und es gilt $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.
(Denn: Nach D. 6.8 gilt $\exp(0) = 1$. Also folgt aus S. 6.9 auch

$$1 = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)\,.)$$

2. Die Zahl

$$\exp(1) =: e$$

heißt *Eulersche Zahl*. Aus S. 6.9 (induktiv angewandt) und 1. folgt

$$\exp(n) = e^n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Deshalb ist die Schreibweise e^z statt $\exp(z)$ für allgemeines $z \in \mathbb{C}$ konsistent mit der (alten) Definition ganzzahliger Potenzen. Wir werden diese im Weiteren meist verwenden.

Satz 6.11 exp *ist stetig.*

Beweis. Zunächst gilt für $|z| < 1$ mit B. 6.6

$$|e^z - 1| = \Big|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}\Big| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|z|^\nu}{\nu!} = |z| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|z|^{\nu-1}}{\nu!} \leq |z| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} = |z|(e-1)$$

und damit

$$|e^z - 1| \leq |z|(e-1) \to 0 \qquad (z \to 0).$$

Hieraus folgt $e^z \to 1 (= e^0)$ $(z \to 0)$.
Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig, so ergibt sich mit S. 6.9

$$e^z - e^{z_0} = e^{z_0}(e^{z-z_0} - 1) \to 0 \qquad (z \to z_0),$$

also $e^z \to e^{z_0}$ $(z \to z_0)$. Damit ist exp stetig an z_0. □

Definition 6.12 1. Die Funktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\cos(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \qquad (z \in \mathbb{C}) ,$$

heißt *(komplexe) Cosinusfunktion.*
2. Die Funktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad (z \in \mathbb{C}) ,$$

heißt *(komplexe) Sinusfunktion.*

Bemerkung 6.13 Mit B. 4.9 und der Stetigkeit von exp ergibt sich leicht die Stetigkeit von cos und sin. Weiter ergibt sich aus der Definition sofort $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$ und

$$\cos(-z) = \cos z , \qquad \sin(-z) = -\sin z$$

sowie ([Ü])

$$\cos(z) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu/2} z^{\nu}}{\nu!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sin(z) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{(\nu-1)/2} z^{\nu}}{\nu!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(mit absoluter Konvergenz der Reihen). Hieraus folgt auch, dass $\sin(x)$ und $\cos(x)$ reell sind für reelle x.
Schließlich sieht man leicht, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die *Eulersche Formel*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{6.1}$$

erfüllt ist. Für reelle x ist damit

$$\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}) \quad \text{und} \quad \sin x = \mathrm{Im}\,(e^{ix}) .$$

Satz 6.14 *(Additionstheoreme)*
Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

1. $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$,
2. $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$.

Beweis. 1. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) &= \frac{1}{4}\big((e^{iz}+e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw}) + (e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}-e^{-iw})\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}\big) = \frac{1}{2}\big(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}\big) \\ &= \cos(z+w)\end{aligned}$$

2. ergibt sich durch eine entsprechende Rechnung. □

Wir schauen uns nun trigonometrischen Funktionen für reelle Argumente an. In diesem Zusammenhang definieren wird eine der wichtigsten Konstanten der Mathematik, die Kreiszahl π.

Satz 6.15 *1. Für $z \in \mathbb{C}$ ist $|e^z| = e^{\mathrm{Re} z}$ und damit insbsondere für $x \in \mathbb{R}$*

$$\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = |e^{ix}| = 1.$$

2. Es existiert ein $x \in (0,2)$ mit $e^{ix} = i$, d. h. $\cos x = 0$ und $\sin x = 1$.

Beweis. Zunächst gilt $\overline{e^w} = e^{\overline{w}}$ für beliebiges $w \in \mathbb{C}$ ([Ü]). Damit erhält man

$$|e^z| = |e^{z/2}|^2 = e^{z/2}\overline{e^{z/2}} = e^{z/2}e^{\overline{z/2}} = e^{(z+\overline{z})/2} = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Speziell ergibt sich für $z = ix$ (da $\mathrm{Re}(ix) = 0$)

$$\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = |e^{ix}| = e^0 = 1\ .$$

2. (i) Zunächst gilt $\sin x \geq 0$ für alle $x \in [0,2]$.
Denn: Ist

$$a_\nu = \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\ ,$$

so gilt für $\nu \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} = \frac{x^2}{(2\nu+1)(2\nu)} \leq \frac{4}{6} < 1$$

also ist $0 \leq a_\nu \downarrow$. Aus dem Leibniz-Kriterium (S. 5.17.1) ergibt sich

$$\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \lim_{n\to\infty} s_n \geq 0\ .$$

(ii) Setzen wir nun

$$a_\nu = \frac{4^{\nu+2}}{(2\nu+4)!} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0),$$

so gilt

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} = \frac{4}{(2\nu+3)(2\nu+4)} < 1,$$

also $0 \le a_\nu \downarrow$. Damit ist wieder nach dem Leibniz-Kriterium (S. 5.17.1)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2^{2k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu 4^{\nu+2}}{(2\nu+4)!} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} \le s_0 = a_0 = \frac{4^2}{4!} = \frac{2}{3}$$

und folglich

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \le -1 + \frac{2}{3} < 0.$$

Da cos stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in (0,2)$ mit $\cos x = 0$. Weiter ist $\sin x \ge 0$ nach (i) und $\sin^2 x = 1$ nach 1. Folglich ist $\sin x = 1$ und damit auch $e^{ix} = \cos x + i \sin x = i$.

□

Bemerkung und Definition 6.16 Wir setzen $M := \{x > 0 : e^{ix} = i\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ wie eben gesehen. Ist $x_0 := \inf M$, so ist aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion auch $e^{ix_0} = i$. Aus $e^0 = 1$ folgt $x_0 > 0$. Damit schreiben wir

$$\pi := 2x_0\ .$$

Nach dieser Definition gilt also

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

und mit $\cos(0) = 1$, dem Zwischenwertsatz und $\cos(x) = \cos(-x)$ folgt $\cos(x) > 0$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Unter Ausnutzung der Additionstheoreme erhält man Periodizitätseigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Satz 6.17 *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

1. $\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$, $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z$,

2. $\cos(z+\pi) = -\cos z$, $\sin(z+\pi) = -\sin z$,

3. $\cos(z+2\pi) = \cos z$, $\sin(z+2\pi) = \sin z$,

   ($\cos$ *und* $\sin$ *sind* 2π*-periodisch)*

Beweis. Mit S. 6.14.1 erhalten wir

$$\cos(z+\pi/2) = \cos(z)\cos(\pi/2) - \sin(z)\sin(\pi/2) = -\sin z \ .$$

und

$$\sin(z+\pi/2) = \cos(z)\sin(\pi/2) + \sin(z)\cos(\pi/2) = \cos z \ .$$

Hieraus folgt wiederum

$$\cos(z+\pi) = \cos(z+\pi/2+\pi/2) = -\sin(z+\pi/2) = -\cos z \ .$$

Die weiteren Behauptungen ergeben sich in ähnlicher Weise ([Ü]). □

7 Monotonie und Umkehrfunktionen

Wir untersuchen jetzt die im vorigen Abschnitt eingeführten elementaren Funktionen auf Monotonie und Umkehrbarkeit.

Satz 7.1 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend mit* $\exp(\mathbb{R}) = W(\exp_{|\mathbb{R}}) = (0, \infty)$.

Beweis. Zunächst gilt für $x \geq 0$

$$e^x = 1 + x + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \geq 1 + x$$

und damit

$$e^x \to \infty \qquad \text{und} \qquad e^{-x} = 1/e^x \to 0 \quad (x \to \infty).$$

Für $x_1 < x_2$ ergibt sich weiter $e^{x_2}/e^{x_1} = e^{x_2 - x_1} \geq 1 + (x_2 - x_1) > 1$. Also ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Damit ist $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ nach dem Zwischenwertsatz. □

Satz 7.2 *Es gilt*
1. $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$ *ist streng monoton wachsend mit* $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$.
2. $\cos_{|[0,\pi]}$ *ist streng monoton fallend mit* $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Beweis. 1. Aus den Additionstheoremen ergibt sich für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\sin(z + w) - \sin(z - w) = 2\cos(z)\sin(w)\ .$$

Also folgt für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin x_2 - \sin x_1 &= \sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\ . \end{aligned}$$

Ist $-\pi/2 \leq x_1 < x_2 \leq \pi/2$, so gilt

$$\frac{x_2 + x_1}{2} \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{und} \quad \frac{x_2 - x_1}{2} \in (0, \pi/2] \subset (0, \pi)$$

und damit $\cos\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right) > 0$ und $\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) > 0$, also $\sin x_1 < \sin x_2$.
Schließlich folgt aus $\sin(\pi/2) = 1$ sowie $\sin(-\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$ mit dem Zwischenwertsatz $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$.
2. Ergibt sich aus 1. und S. 6.17. □

Also Folgerung erhalten wir

Satz 7.3 *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt*

1. $e^z = 1$ *genau dann, wenn* $z = 2k\pi i$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$,
2. $\sin z = 0$ *genau dann, wenn* $z = k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$,
3. $\cos z = 0$ *genau dann, wenn* $z = k\pi + \pi/2$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$,

Beweis. 1. [Ü]
2. Es gilt $0 = 2i \sin z = e^{iz} - e^{-iz}$ genau dann, wenn $e^{2iz} - 1 = 0$ ist. Aus 1. ergibt sich damit 2.
3. Mit 2. und S. 6.17. □

Bemerkung und Definition 7.4 Wir definieren die Funktionen

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$$

und

$$\cot : \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$$

durch

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}\,, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}\,.$$

Dann sind tan und cot stetig auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

Bemerkung 7.5 (Polarkoordinaten) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ ist $|e^{i\varphi}| = 1$. Umgekert gilt: Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, so existiert ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = e^{i\varphi}$.
(Denn:
1. Fall: $y \geq 0$. Nach S. 7.2 existiert ein $\varphi \in [0, \pi]$ mit $x = \cos\varphi$. Dann ist auch

$$y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi\,.$$

Da $\varphi \in [0, \pi]$ ist, ist $\sin\varphi \geq 0$. Damit ist $y = \sin\varphi$.
2. Fall: $y < 0$. Wir wählen $\varphi \in (-\pi, 0]$ mit $x = \cos(-\varphi) = \cos\varphi$. Dann ist wie oben $y^2 = \sin^2\varphi$. Da jetzt $\sin\varphi \leq 0$ ist, folgt wieder $y = \sin\varphi$.)
Für beliebiges $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert damit ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z/|z| = e^{i\varphi}$, also $z = |z|e^{i\varphi}$, d. h.

$$x = |z|\cos(\varphi) \qquad \text{und} \qquad y = |z|\sin(\varphi)\ .$$

Außerdem folgt aus S. 7.3: Es gilt $e^{i\varphi} = e^{i\tilde{\varphi}}$ genau dann, wenn $\varphi = \tilde{\varphi} + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Damit existiert genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ wie oben.

Bemerkung und Definition 7.6 Eine wichtige Folgerung aus der Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen ist die Existenz von Wurzeln komplexer Zahlen:
Es sei $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ beliebig. Dann existiert ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $c = |c|e^{i\varphi}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Zahlen

$$z = z_k = \sqrt[n]{|c|}\, e^{i(\varphi + 2k\pi)/n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

Lösungen der Gleichung

$$z^n = c.$$

(Denn: Da $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ 2π-perodisch ist, gilt

$$z_k^n = |c| \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)} = |c|e^{i\varphi} = c\,.)$$

Außerdem sind dadurch alle Lösungen der Gleichung $z^n = c$ gegeben ([Ü]). Die Zahlen $z_0, \ldots, z_{n-1}$ heißen *n-te (komplexe) Wurzeln* aus c.
Ist speziell $c = 1$, so heißen die n Zahlen

$$z_k = e^{2k\pi i/n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

n-te Einheitswurzeln. So sind etwa ± 1 die zweiten Einheitswurzeln und $\pm i, \pm 1$ die vierten Einheitswurzeln.

Wir befassen uns nun mit der Umkehrbarkeit der elementaren Funktionen. Dazu beweisen wir zunächst folgendes allgemeine Ergebnis.

Satz 7.7 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f : I \to W(f) \subset \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend). Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to I$ und f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend). Außerdem ist f^{-1} stetig.*

Beweis. Es sei o. E. f steng monoton wachsend. Wir setzen $J := W(f)$. Aus der stengen Monotonie folgt, dass $f : I \to J$ injektiv (also auch bijektiv) ist, d. h. $f^{-1} : J \to I$ existiert. Weiter ist $f^{-1} : J \to I$ streng monoton wachsend.
(Denn: Angenommen, es existieren $y_1, y_2 \in J$ mit $y_1 < y_2$ und $x_1 = f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) = x_2$. Dann gilt $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, da f (streng) monoton wachsend ist. Widerspruch!)
Schließlich ist $f^{-1} : J \to I$ stetig.
Denn: Es seien $y_0 \in J$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $x_0 := f^{-1}(y_0)$.
Ist x_0 nicht rechter Randpunkt von I (d. h. $x_0 \neq \sup I$), so existiert ein $x_\varepsilon \in I$ mit $x_0 < x_\varepsilon < x_0 + \varepsilon$. Wir setzen

$$\delta_\varepsilon^+ := f(x_\varepsilon) - f(x_0) \ .$$

Dann ist $\delta_\varepsilon^+ > 0$ und für alle $y \in J$ mit $y_0 \leq y < y_0 + \delta_\varepsilon^+ = f(x_\varepsilon)$ (falls existent) folgt

$$0 \leq f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0 + \delta_\varepsilon^+) - f^{-1}(y_0) = x_\varepsilon - x_0 < \varepsilon \ .$$

Ist x_0 nicht linker Randpunkt von I, so sieht man entsprechend: Es existiert ein $\delta_\varepsilon^- > 0$ so, dass

$$0 \leq f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y) < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in J \text{ mit } y_0 - \delta_\varepsilon^- < y \leq y_0 \ .$$

Damit ergibt sich $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$ für alle $y \in J$ mit $|y - y_0| < \delta_\varepsilon := \min\{\delta_\varepsilon^+, \delta_\varepsilon^-\}$.
□

Bemerkung und Definition 7.8 Nach S. 7.1 und S. 7.7 existiert die Umkehrfunktion von exp auf dem Intervall $(0, \infty)$ und ist dort stetig und streng monoton wachsend. Diese Funktion nennnen wir *(natürliche) Logarithmusfunktion* und schreiben dafür ln oder auch log. Es gilt also für $x \in (0, \infty)$ und $y \in \mathbb{R}$

$$y = \ln(x) \Longleftrightarrow e^y = x \ .$$

Aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ergibt sich leicht ([Ü]):

1. Für alle $x_1, x_2 > 0$ ist $\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.

2. Für alle $x > 0$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ ist $\ln(x^m) = m \ln(x)$.

Damit ist es möglich, allgemeine Potenzen und Logarithmen zu definieren.

Definition 7.9 Für $a > 0$ und $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$a^m = e^{\ln(a^m)} = e^{m \ln a}$$

nach B./D. 7.8.2. Wir setzen für allgemeines $b \in \mathbb{C}$

$$a^b := \exp(b \cdot \ln a) = e^{b \cdot \ln a} .$$

Aus den Rechenregeln für ln und exp erhält man

Satz 7.10 *(allgemeine Potenzgesetze)*

1. *Für $a > 0$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ gilt $a^{b_1} a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$ und im Falle $b_1 \in \mathbb{R}$ auch $(a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 b_2}$.*

2. *Für $a_1, a_2 > 0$ und $b \in \mathbb{C}$ gilt $a_1^b a_2^b = (a_1 a_2)^b$.*

Beweis. 1. Es gilt

$$a^{b_1} a^{b_2} = e^{b_1 \ln a} e^{b_2 \ln a} = e^{b_1 \ln a + b_2 \ln a} = e^{(b_1+b_2) \ln a} = a^{b_1+b_2} .$$

Im Falle $b_1 \in \mathbb{R}$ ist $a^{b_1} > 0$ und damit gilt dann auch

$$(a^{b_1})^{b_2} = e^{b_2 \ln(a^{b_1})} = e^{b_2 \ln(e^{b_1 \ln a})} = e^{b_2 b_1 \ln a} = a^{b_1 b_2} .$$

2. [Ü]. □

Bemerkung und Definition 7.11 Wir betrachten ein festes $a > 0, a \neq 1$. Dann gilt für $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$

$$x = a^y = e^{y \ln a} \iff y \ln a = \ln x \iff y = \frac{\ln x}{\ln a} .$$

Wir definieren

$$\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (x > 0) .$$

Damit gilt also für $x > 0, y \in \mathbb{R}$

$$y = \log_a x \iff a^y = x .$$

Bemerkung und Definition 7.12 Die nach S. 7.7 und S. 7.2 auf $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$ existierende (und dort streng monoton wachsende und stetige) Umkehrfunktion von sin heißt arcsin, d. h. $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ erfüllt für $x \in [-1, 1]$, $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \ .$$

Entsprechend bezeichnet man die auf $[-1, 1]$ existierende (und dort streng monoton fallende und stetige) Umkehrfunktion von cos mit arccos, d. h. $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ erfüllt für $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \ .$$

Außerdem gilt: tan ist streng monoton wachsend in $(-\pi/2, \pi/2)$ und cot ist streng monoton fallend in $(0, \pi)$ mit $W(\tan_{|(-\pi/2,\pi/2)}) = W(\cot_{|(0,\pi)}) = \mathbb{R}$. Also existieren auf $\mathbb{R}$ die (stetigen) Umkehrfunktionen, genannt arctan bzw. arccot, mit entsprechenden Monotonieeigenschaften.

8 Metrische Räume

Wie wir bereits in den vorhergehenden Abschnitten gesehen haben, besteht ein zentrales Anliegen der Analysis darin, Grenzwerte zu untersuchen. Grob gesagt bedeutet „$f(x) \to c$ für $x \to x_0$“, dass $f(x)$ „nahe bei“ c liegt, falls x „nahe bei“ x_0 liegt. Es ist also wesentlich, Abstände zwischen Elementen einer Menge bestimmen zu können. Eine Klasse von Räumen mit dieser Eigenschaft wollen wir in diesem Abschnitt definieren, die sog. metrischen Räume. Es zeiget sich, dass diese Räume für viele Fragen der Analysis den geeigneten Rahmen bilden.

Definition 8.1 Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik (auf X)*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(d.1) (Definitheit)
$d(x,x) = 0$ für alle $x \in X$ und $d(x,y) > 0$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$.

(d.2) (Symmetrie)
Für alle $x, y \in X$ ist $d(x,y) = d(y,x)$.

(d.3) (Dreiecksungleichung)
Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Das Paar (X, d) heißt dann *metrischer Raum.*

Bemerkung 8.2 1. Ist (X, d) ein metrischer Raum und ist $M \subset X$, so ist auch (M, d) (d.h. genauer $(M, d_{|M\times M})$) ein metrischer Räum.
2. Es sei $M \subset \mathbb{K}$. Dann ist durch

$$d_{|\cdot|}(x,y) := |x-y| \qquad (x, y \in M)$$

eine Metrik auf M gegeben (die sog. *Betragsmetrik*). Wenn nichts anderes gesagt ist, soll $M \subset \mathbb{K}$ stets mit dieser Metrik versehen sein.
3. Es sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Dann ist durch

$$\delta(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x = y \\ 1, & \text{falls} \quad x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X gegeben (die sog. *diskrete Metrik*). Dies ergibt sich leicht durch Überprüfen von (d.1)–(d.3).

Wir untersuchen nun Folgen in metrischen Räumen

Definition 8.3 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei (x_n) eine Folge in X.

1. $(x_n) = (x_n)_{n \in I}$ heißt *konvergent* (in (X, d)) falls ein $x \in X$ so existiert, dass

$$d(x_n, x) \to 0 \qquad (n \to \infty) \; .$$

   Dann heißt wieder x *Grenzwert* von (x_n) und wir schreiben

$$x_n \to x \quad (n \to \infty)$$

   (in (X, d)).

2. (x_n) heißt *Cauchy-Folge* (in (X, d)), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ existiert mit

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad (n, m > R) \; .$$

Beispiel 8.4 Es sei $X = \mathbb{R}$ und $(x_n) = (1/n)$. Dann gilt $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, aber (x_n) konvergiert **nicht** im metrischen Raum $(\mathbb{R}, \delta)$, wobei δ die diskrete Metrik ist. (Im metrischen Raum (X, δ) gilt: $x_n \to x$ genau dann, wenn ein n_0 existiert mit $x_n = x$ für alle $n \geq n_0$; [Ü])
Das Beispiel zeigt insbesondere, dass die Konvergenz einer Folge von der zu Grunde liegenden Metrik abhängen kann!

Bemerkung 8.5 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Wie im Fall $(X, d) = (\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$ gilt

1. Jede Folge in X hat höchstens einen Grenzwert x. Wir schreiben wieder

$$x =: \lim_{n \to \infty} (x_n) =: \lim_{n \to \infty} x_n.$$

2. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

3. Jede Cauchy-Folge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, ist konvergent.

Bemerkung und Definition 8.6 Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist i. A. nicht jede Cauchy-Folge konvergent!
Betrachtet man etwa $X = \mathbb{R}_* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Betragsmetrik $d_{|\cdot|}$, so ist $(x_n) = (1/n)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}_*$, die nicht konvergiert.
(Denn: Offensichtlich ist $(1/n)$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}_*, d_{|\cdot|})$. Da jedoch $1/n \to 0$ in $\mathbb{R}$ gilt, kann die Folge in $(\mathbb{R}_*, d_{|\cdot|})$ nicht konvergent sein. (Die Konvergenz würde der Eindeutigkeit des Grenzwertes in $\mathbb{R}$ widersprechen.))
Ein metrischer Raum (X, d) (oder auch die Metrik d) heißt *(folgen-)vollständig*, falls jede Cauchy-Folge konvergiert. Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium ist $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$ vollständig.

Definition 8.7 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $x_0 \in X$. Für $\varepsilon > 0$ heißt die Menge

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

ε-Umgebung von x_0. Eine Menge $M \subset X$ heißt *Umgebung* von x_0, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x_0) \subset M$

Beispiel 8.8 1. Ist $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, so ist für $x_0 \in \mathbb{R}$

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\ .$$

2. Ist $(X, d) = (\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, so ist für $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(z_0) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\} = \\ &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} :\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\} \end{aligned}$$

der Kreis mit Radius ε um z_0.

Definition 8.9 Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$.

(i) *offen*, falls M Umgebung von x für jedes $x \in M$ ist.

(ii) *abgeschlossen*, falls $M^c = X \setminus M$ offen ist,

Beispiel 8.10 1. In jedem metrischen Raum (X, d) sind X und $\emptyset$ offen und abgeschlossen.
2. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann sind die Intervalle (a, b), $(-\infty, b)$ und (a, ∞) offen in $\mathbb{R}$ und die Intervalle $[a, b]$, $(-\infty, b]$ sowie $[a, \infty)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Der folgende Satz liefert eine Charakterisierung der Abgeschlossenheit mittels Folgen.

Satz 8.11 *Sind (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$, so ist M abgeschlossen genau dann, wenn für alle konvergenten Folgen in M auch der Grenzwert in M liegt.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Ist M abgeschlossen, so ist M^c offen. Es sei (x_n) eine Folge in M mit $x_n \to x\,(n \to \infty)$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$M \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$$

(da $x_n \in U_\varepsilon(x)$ für n genügend groß). Damit ist $x \notin M^c$, d.h. $x \in M$.
„$\Leftarrow$“ Angenommen, M^c ist nicht offen. Dann existiert ein $x \in M^c$ mit $U_{1/n}(x) \cap M \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x_n \in U_{1/n}(x) \cap M$, so gilt $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Widerspruch. □

Definition 8.12 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $M \subset X$ heißt *relativ kompakt*, falls jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt. M heißt *kompakt*, falls jede Folge in M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

Bemerkung 8.13 Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist $M \subset X$ kompakt genau dann, wenn M relativ kompakt und abgeschlossen ist.
(Denn: „$\Leftarrow$“ Da M relativ kompakt ist, hat jede Folge in M eine konvergente Teilfolge. Nach S. 8.11 liegt der Grenzwert jeder solchen Teilfolge in M.
„$\Rightarrow$“ Offenbar ist M relativ kompakt. Ist (x_n) eine Folge in M mit $x_n \to x$, so gilt $x \in M$, da auch jede Teilfolge gegen x konvergiert.)

Ein weiterer zentraler Baustein der Analysis ist

Satz 8.14 *(Heine-Borel)*
Es sei $M \subset \mathbb{K}$. Dann gilt

1. *M ist genau dann relativ kompakt, wenn M beschränkt ist.*
2. *M ist genau dann kompakt, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. 1. Ist M relativ kompakt, so ist M beschränkt (sonst würde eine Folge (x_n) in M existieren mit $|x_n| \to \infty$. Diese Folge hätte keine konvergente Teilfolge). Ist umgekehrt M beschränkt, so ist M nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß auch relativ kompakt (jede Folge in M ist beschränkt).
2. Folgt aus 1. und B. 8.13. □

Beispiel 8.15 Nach dem Satz von Heine-Borel ist jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt.

Wir betrachten jetzt Funktionen zwischen metrischen Räumen, d h. es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$. Man definiert Stetigkeit von f and einer Stelle x_0 sowie die Existenz eines Grenzwertes genau wie in im Falle $X = \mathbb{K}$ und $Y = \mathbb{C}$, wobei man lediglich $|x-x_0|$ durch $d_X(x, x_0)$ und $|f(x)-f(x_0)|$ (bzw. $|f(x)-c|$) durch $d_Y(f(x), f(x_0))$ (bzw. $d_Y(f(x), c)$) ersetzt. Dabei gilt die Charakterisierung der Stetigkeit über Grenzwerte genau wie in B./D. 4.5. Außerdem ist f genau dann stetig an einer Stelle x_0, wenn f dort *folgenstetig* ist, d. h. wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ auch $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$ gilt ([Ü]).

Bemerkung 8.16 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.
1. Ist $f : X \to X$ definiert durch $f(x) := x$ $(x \in X)$ (d. h. $f = \mathrm{id}_X$), so ist ist f stetig (bzgl. der Metriken $d = d_X = d_Y$).
2. Wie in B. 4.9 ergibt sich aus den entsprechenden Grenzwertsätzen: Sind $f, g : X \to \mathbb{K}$ stetig an x_0, so sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und (falls definiert) f/g stetig an x_0.
Wie in B. 4.11 ergibt sich auch leicht: Sind (Y, d_Y) und (Z, d_Z) weitere metrische Räume, ist $f : X \to Y$ stetig an x_0 und ist $g : Y \to Z$ stetig an $f(x_0)$, so ist auch $g \circ f$ stetig an x_0.

Satz 8.17 *Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Dann gilt: Ist $M \subset X$ (relativ) kompakt , so ist auch $f(M) \subset Y$ (relativ) kompakt.*

Beweis. Es sei (y_n) eine Folge in $f(M)$. Dann existieren $x_n \in M$ mit $y_n = f(x_n)$. Ist M relativ kompakt, so existieren ein $x \in X$ und eine Teilfolge $(x_n)_{n \in I}$ von (x_n) mit $x_n \to x$ $(n \to \infty,\, n \in I)$. Da f stetig ist, folgt

$$y_n = f(x_n) \to f(x) \in Y \qquad (n \to \infty,\, n \in I)\ .$$

Damit ist $f(M)$ relativ kompakt. Ist M sogar kompakt, so ist $x \in M$ (da M abgeschlossen) und damit auch $f(x) \in f(M)$. Damit ist auch $f(M)$ kompakt. $\square$

Für reellwertige Funktionen hat der Satz eine wichtige Konsequenz. Um diese formulieren zu können, brauchen wir eine Definition.

Definition 8.18 Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, und es sei $f : X \to \mathbb{R}$. Ferner sei $M \subset X$.

1. Man sagt, f hat ein *Maximum* bzgl. M, falls $\max\limits_M f(x) := \max\limits_{x \in M} f(x) := \max f(M)$ existiert. Ist $x_0 \in M$ so, dass $f(x_0) = \max\limits_M f(x)$ gilt, d. h. ist

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in M\ ,$$

so sagt man, f nimmt das Maximum bzgl. M an x_0 an.

2. Man sagt, f hat ein *Minimum* bzgl. M, falls $\min\limits_M f(x) := \min\limits_{x\in M} f(x) := \min f(M)$ existiert. Ist $x_0 \in M$ so, dass $f(x_0) = \min\limits_M f(x)$ gilt, d. h. ist

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in M \ ,$$

so sagt man, f nimmt das Minimum bzgl. M an x_0 an.

Ist $X = M$ so spricht man auch von *absolutem* (oder *globalem*) Maximum bzw. Minimum.

Beispiel 8.19 Es sei $X = \mathbb{R}$. Ist $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, so hat f an $x_0 = 0$ ein absolutes Minimum (an $x_0 = 0$), aber f hat kein absolutes Maximum. Ist $g(x) = \arctan x$ $(x \in \mathbb{R})$, so ist g beschränkt, aber g hat weder ein absolutes Maximum noch ein absolutes Minimum.

Satz 8.20 *Es seien (X, d_X) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $K \subset X$* ***kompakt****, so hat f ein Maximum und ein Minimum bzgl. K, d. h. es existieren $x_1, x_2 \in K$ mit*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad \textit{für alle} \quad x \in K \ .$$

Beweis. Nach S. 8.17 ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also auch beschränkt und abgeschlossen. Damit existieren $\max f(K)$ und $\min f(K)$ ([Ü]). □

Beispiel 8.21 Es sei $X = \mathbb{R}$ und $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann ist

$$f(a) = f(-a) = \max_{[-a,a]} f(x)$$

d. h. f nimmt an a und $-a$ das Maximum bzgl. $[-a, a]$ an.

Eine weitere wichtige Eigenschaft stetiger Funktionen auf kompakten Mengen ist die gleichmäßige Stetigkeit:

Definition 8.22 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und es sei $f : X \to Y$. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ so existiert, dass

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in X \text{ mit } d_X(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon \ .$$

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass jede gleichmäßig stetige Funktion auch stetig ist. Das folgende Beispiel zeigt, dass die Stetigkeit i. A. nicht die gleichmäßige Stetigkeit impliziert.

Beispiel 8.23 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig stetig.
(Es sei $\varepsilon = 1$, und es sei $\delta > 0$ beliebig. Wir wählen $x_1 = 1/\delta, x_2 = 1/\delta + \delta/2$. Dann ist $|x_1 - x_2| = \delta/2 < \delta$, aber

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| > 2/\delta \cdot \delta/2 = 1 = \varepsilon \ .$$

Folglich ist f nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.)

Es gilt allgemein

Satz 8.24 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Ist X **kompakt** und $f : X \to Y$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen nicht. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei Punkte $x_n, y_n \in X$ existieren mit

$$d_X(x_n, y_n) < 1/n \qquad \text{und} \quad d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \ .$$

Da X kompakt ist, besitzt die Folge (x_n) eine Teilfolge $(x_n)_{n \in I}$ mit $x_n \to x \in X$ $(n \to \infty,\ n \in I)$. Damit gilt auch

$$d_X(x, y_n) \leq d_X(x, x_n) + d_X(x_n, y_n) \to 0 \qquad (n \to \infty,\ n \in I),$$

d. h. $y_n \to x$ $(n \to \infty,\ n \in I)$. Also folgt auf Grund der (Folgen-)Stetigkeit von f an der Stelle x

$$\varepsilon \leq d_Y(f(x_n), f(y_n)) \leq d_Y(f(x_n), f(x)) + d_Y(f(x), f(y_n)) \to 0 \quad (n \to \infty, n \in I) \ .$$

Widerspruch! $\square$

9 Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Definition 9.1 Es sei X, Y beliebige (nichtleere) Mengen. Eine Folge $(f_n)_{n\in I}$ mit $f_n \in \text{Abb} := \{f : X \to Y\}$ heißt eine *Funktionenfolge*. Ist d_Y eine Metrik auf Y, so heißt (f_n) *punktweise konvergent* auf der Menge $M \subset X$, falls für alle $x \in M$ die Folge $(f_n(x))$ in Y konvergiert. Die Funktion $f : M \to Y$ mit $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ heißt *Grenzfunktion* der Folge (f_n) (auf M). Wir schreiben dann auch

$$f_n \to f \qquad (n \to \infty) \quad \text{punktweise auf } M$$

Beispiel 9.2 Wir betrachten die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}) .$$

Dann gilt

$$f_n(x) \to \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x \in (-1,1) \\ 1 & , \text{ falls } x = 1 \end{cases} ,$$

d. h. (f_n) konvergiert punktweise auf $(-1, 1]$ und die Grenzfunktion $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in (-1,1) \\ 1 & , \ x = 1 \end{cases} .$$

Das Beispiel zeigt insbesondere, dass die Grenzfunktion unstetig (an $x_0 = 1$) ist, obwohl alle Folgelieder f_n stetige Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ sind. Da wir an Aussagen der Form „f_n stetig $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow f$ stetig“ interessiert sind, führen wir einen strengeren Konvergenzbegriff ein, mit dessen Hilfe eine solche Aussage möglich wird.

Bemerkung und Definition 9.3 Es seien $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Wir setzen

$$B(M) := B(M, \mathbb{K}) := \{f : M \to K : f \text{ beschränkt}\}.$$

und für $f, g \in B(M)$

$$||f||_\infty := \sup_{x\in M} |f(x)| \qquad d_\infty(f, g) := d_M(f, g) := ||f(x) - g(x)||_\infty.$$

Dann ist d_∞ eine Metrik auf $B(M)$ ([Ü]).

Bemerkung und Definition 9.4 1. Sind X eine Menge und $f_n : X \to \mathbb{K}$ Funktionen ($n \in I$), so heißt die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in I}$ *gleichmäßig konvergent* auf der Menge $M \subset X$ (gegen die Grenzfunktion $f : M \to Y$), falls $f - f_n \in B(M)$ und

$$||f - f_n||_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Wir schreiben dann auch

$$f_n \to f \qquad (n \to \infty) \quad \text{gleichmäßig auf } M$$

oder auch

$$f_n(x) \to f(x) \qquad (n \to \infty) \quad \text{gleichmäßig auf } M\ .$$

2. Ist $f_n \in B(M)$ und gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf M, so ist auch $f \in B(M)$.
(Denn: Wählen wir zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$||f - f_N||_\infty < 1,$$

so folgt

$$|f(x)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \le 1 + ||f_N||_\infty \quad (x \in M)$$

und damit ist f beschränkt.)
Dann gilt nach Definition auch $d_\infty(f, f_n) = ||f - f_n||_\infty \to 0$ und damit konvergiert f_n gegen f in $B(M)$.
3. Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf M, so gilt insbesondere $f_n(x) \to f(x)\,(n \to \infty)$ für alle $x \in M$, d. h. gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

Beispiel 9.5 Wir betrachten noch einmal $f_n(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$) (vgl. B. 9.2). Dann ist die punktweise Grenzfunktion $f = 0$ auf $(-1, 1)$. Ist $M = [-1/2, 1/2]$, so gilt

$$||f_n - 0||_\infty = \sup_M |x^n - 0| = 1/2^n \to 0 \qquad (n \to \infty)\ .$$

Damit gilt

$$x^n \to 0 \qquad \text{gleichmäßig auf} \quad [-1/2, 1/2]\ .$$

Andererseits ist für $M = [0, 1)$

$$||f_n - 0||_\infty = \sup_{[0,1)} |x^n - 0| = \sup_{[0,1)} x^n = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})\ .$$

Also ist (f_n) nicht gleichmäßig konvergent auf $[0, 1)$.

Wir kommen nun zu dem bereits angedeuteten Ergebnis über die „Vererbung“ der Stetigkeit auf die Grenzfunktion.

Satz 9.6 *Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $f, f_n : X \to \mathbb{K}$ Funktionen. Ferner sei $x_0 \in X$. Sind die Funktion f_n stetig an der Stelle x_0 und gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf einer Umgebung M von x_0, so ist auch die Grenzfunktion f stetig an x_0.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f auf M existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon/3 \qquad (x \in M) .$$

Da f_N stetig an x_0 ist, existiert ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ so, dass ($U_\delta(x_0) \subset M$ und)

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3 \qquad \text{für alle } x \in U_\delta(x_0) .$$

Damit ist für $x \in U_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon . \end{aligned}$$

□

Satz 9.7 *Es sei M eine beliebige Menge. Dann ist der metrische Raum $(B(M), d_\infty)$ vollständig.*

Beweis. Es sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $(B(M), d_\infty)$. Dann ist insbesondere für jedes feste $x \in M$ die Folge $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, ist $(f_n(x))_n$ konvergent, d. h. es existiert ein $y \in \mathbb{K}$ mit $f_n(x) \to y$ $(n \to \infty)$. Wir definieren $f : M \to \mathbb{K}$ durch $f(x) := y$ $(x \in M)$ und zeigen: $f_n \to f$ gleichmäßig auf M.

Zunächst gilt für $z \in \mathbb{K}$ und (y_m) in $\mathbb{K}$ mit $y_m \to y$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung $|y_m - z| \to |y - z|$ für $m \to \infty$. Damit ergibt sich für festes $x \in M$ und $n \in \mathbb{N}$

$$d_\infty(f_m, f_n) \geq |f_m(x) - f_n(x)| \to |f(x) - f_n(x)| \qquad (m \to \infty) .$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existert ein $R > 0$ mit $d_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon$ für $n, m > R$. Also ist $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in M$ und $n > R$ und damit auch

$$||f - f_n||_\infty \leq \varepsilon \qquad (n > R).$$

Aus $f_n \in B(M)$ folgt $f \in B(M)$ und $d_\infty(f, f_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ (siehe B./D. 9.4). $\square$

Definition 9.8 Sind $f_\nu : X \to \mathbb{K}$ Funktionen $(\nu \geq n_0)$, so heißt die Funktionenfolge (s_n) mit

$$s_n(x) := \sum_{\nu=n_0}^{n} f_\nu(x) \qquad (x \in X, n \geq n_0)$$

eine *Funktionenreihe*. Wir schreiben wieder $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} f_\nu$ (oder $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} f_\nu(x)$).

Die Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} f_\nu$ heißt *punktweise konvergent* (bzw. *gleichmäßig konvergent*) auf $M \subset X$ falls die Funktionenfolge (s_n) auf M punktweise (bzw. gleichmäßig) konvergiert. Wir verwenden (wie bei Zahlenreihen) das Symbol $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} f_\nu$ dann auch wieder für die Grenzfunktion.

Es stellt sich die Frage, wie man gleichmäßige Konvergenz ggfs. nachweisen kann. Wie in S. 6.5 ergibt sich

Satz 9.9 *Es seien $M \neq \emptyset$ eine Menge und $f_\nu \in B(M)$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: Ist $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} ||f_\nu||_\infty < \infty$, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} f_\nu$ gleichmäßig auf M.*

Beweis. Zunächst gilt $s_n \in B(M)$, denn $|s_n(x)| \leq \sum\limits_{\nu=n_0}^{n} |f_\nu(x)| \leq \sum\limits_{\nu=n_0}^{n} ||f_\nu||_\infty$.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert nach S. 6.4 ein $R > 0$ mit

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} ||f_\nu||_\infty < \varepsilon \qquad (n > m > R).$$

Damit ergibt sich für $n > m > R$

$$|s_n(x) - s_m(x)| = |\sum_{\nu=m+1}^{n} f_\nu(x)| \leq \sum_{\nu=m+1}^{n} |f_\nu(x)| \leq \sum_{\nu=m+1}^{n} ||f_\nu||_\infty < \varepsilon$$

und folglich $||s_n - s_m||_\infty \le \varepsilon$ für $n > m > R$. Also ist (s_n) eine Cauchy-Folge in $B(M)$. Mit S. 9.7 folgt die Behauptung. □

Beispiel 9.10 1. Es seien $\left(a_\nu\right)_{\nu=0}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und

$$p_\nu(z) := a_\nu z^\nu \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{C}).$$

Dann heißt die Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=0}^\infty p_\nu(z) = \sum\limits_{\nu=0}^\infty a_\nu z^\nu$ eine Potenzreihe (mit Koeffizientenfolge (a_ν)). Weiter heißt

$$R := \sup\left\{|z| : \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu z^\nu \text{ konvergent}\right\} \in [0, \infty]$$

(mit $\sup X := \infty$, falls $X \subset \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt ist) Konvergenzradius der Potenzreihe. Es gilt damit ([Ü]): $\sum\limits_{\nu=0}^\infty a_\nu w^\nu$ konvergiert absolut für alle w mit $|w| < R$.
Wir zeigen: $\sum\limits_{\nu=0}^\infty p_\nu$ konvergiert gleichmäßig auf $M_r := \left\{|z| \le r\right\}$ für alle $r \in (0, R)$.
(Denn: Es gilt

$$\sum_{\nu=0}^\infty |a_\nu| r^\nu < \infty$$

und $\left|p_\nu(z)\right| \le |a_\nu| r^\nu$ für $|z| \le r$, d. h. $\|p_\nu\|_\infty \le |a_\nu| r^\nu$. Damit ist $\sum\limits_{\nu=0}^\infty \|p_\nu\|_\infty < \infty$, also folgt die Behauptung aus S. 9.9)
2. Für $\alpha > 1$ sei

$$M_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \ge \alpha\}\ .$$

Dann ist die Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=1}^\infty 1/\nu^z$ gleichmäßig konvergent auf M_α.
(Denn: Für alle $z \in M_\alpha$ und alle $\nu \in \mathbb{N}$ ist

$$|\frac{1}{\nu^z}| = \frac{1}{\nu^{\operatorname{Re} z}} \le \frac{1}{\nu^\alpha}$$

und $\sum\limits_{\nu=1}^\infty 1/\nu^\alpha < \infty$ (folgt aus den Cauchyschen Verdichtungssatz; [Ü]). Also ergibt sich die Behauptung aus S. 9.9.)
Wir definieren $M := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ und $\zeta : M \to \mathbb{C}$ durch

$$\zeta(z) := \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{\nu^z} \qquad (z \in M)\ .$$

Die Funktion ζ heißt *(Riemannsche) Zetafunktion*.
Da $z \mapsto 1/\nu^z$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ stetig auf $\mathbb{C}$ ist, folgt aus S. 9.6 die Stetigkeit der Zetafunktion auf M (Man beachte: Ist $\mathrm{Re}(z_0) > 1$, so ist M_α für $1 < \alpha < \mathrm{Re}(z_0)$ eine Umgebung von z_0).

A abzählbare und überabzählbare Mengen

Definition A.1 Es sei A eine Menge. Dann heißt A *abzählbar*, falls eine Folge $a = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ existiert mit

$$A \subset W(a) = \{a_j : j \in \mathbb{N}\}$$

(d. h. die Elemente von A können ,,abgezählt" werden). Ist A nicht abzählbar, so heißt A auch *überabzählbar.*

Bemerkung A.2 Aus der Definition ergibt sich unmittelbar:

1. Jede endliche Menge ist abzählbar.
2. Ist A abzählbar, so ist auch jede Teilmenge abzählbar.
3. Ist A abzählbar und $\varphi : A \to B$, so ist auch $\varphi(A)$ abzählbar.

Satz A.3 *Es seien A_n abzählbar $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.*

Beweis. Nach Voraussetzung existieren Folgen $(a_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$A_n \subset \{a_j^{(n)} : j \in \mathbb{N}\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Wir setzen

$$B_m := \{a_j^{(n)} : j, n = 1, \ldots, m\} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Dann ist

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Da $|B_m| = m^2$ und $B_{m+1} \supset B_m$ $(m \in \mathbb{N})$ gilt, ergibt sich induktiv die Existenz einer Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$B_m = \{b_1, \ldots, b_{m^2}\} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Damit ist

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

□

Bemerkung A.4 Da $\mathbb{Z}$ abzählbar ist ([Ü]), ist $\mathbb{Z}\times\{n\}$ abzählbar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ (wähle $\varphi(j) := (j,n)$ $(j \in \mathbb{Z})$ in B. A.2.3). Damit ist nach S. A.3 auch

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{Z} \times \{n\})$$

abzählbar. Wieder nach B A.2.3 (mit $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $\varphi(p,q) := p/q$) ist schließlich auch $\mathbb{Q}$ abzählbar.

Wir nennen ein Intervall I *echt*, falls I nicht leer und nicht einpunktig ist.

Satz A.5 *Jedes echte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Beweis. Es reicht ([Ü]), das Intervall $[0,1]$ zu betrachten. Angenommen, $[0,1]$ ist abzählbar, d. h.

$$[0,1] \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\} .$$

Wir teilen dann $[0,1]$ in die drei gleich langen Intervalle $[0,1/3], [1/3,2/3]$ und $[2/3,1]$ auf. Dann ist x_1 in einem dieser Intervalle (das wir I_1 nennen) nicht enthalten. Anschließend teilen wir I_1 in drei gleich lange Intervalle (also der Länge $1/9 = 1/3^2$) auf. Dann ist x_2 in einem dieser Intervalle (I_2 genannt) nicht enthalten. So fortfahrend erhalten wir induktiv eine Folge $I_n = [a_n, b_n]$ von Intervallen in $[0,1]$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ sowie $x_n \notin I_n$ und $b_n - a_n = 1/3^n \to 0$ $(n \to \infty)$. Also ist nach dem Intervallschachtelungsprinzip $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$ für ein $x \in [0,1]$. Ist $k \in \mathbb{N}$ so gilt nach Konstruktion $x_k \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, d. h. $x_k \neq x$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Widerspruch! □

Bemerkung A.6 1. Aus S. A.3 kann man leicht folgende allgemeinere Formulierung herleiten: Ist $I \neq \emptyset$ eine abzählbare Menge und sind A_n abzählbar $(n \in I)$, so ist auch $\bigcup_{n\in I} A_n$ abzählbar. Insbesondere ist die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen abzählbar.

2. Ist M überabzählbar und ist A abzählbar, so ist auch $M \setminus A$ überabzählbar (denn sonst wäre nach 1. auch $M = (M \cap A) \cup (M \setminus A)$ abzählbar). Also ist insbesondere nach S. A.4 und S. A.5 für jedes echte Intervall I die Menge der irrationalen Zahlen in I überabzählbar.