J. Müller SoSe 2016

05.07.2016

7. Übung zur Vorlesung Dynamische Systeme

Besprechung am Dienstag, den 12. Juli 2016

A25: Es seien $(X, ||\cdot||) = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ und $V \in L\big(C[0,1]\big)$ der Volterra-Operator, definiert durch

$$(Vf)(t) := \int_0^t f(s)ds \qquad \big(t \in [0,1], f \in C[0,1]\big).$$

Zeigen Sie: $\|V\| = 1$, $r(T) = 0$ und $\sigma_0(T) = \emptyset$.

A26: Überlegen Sie sich, dass das Kitai-Kriterium auch unter der Voraussetzung gilt, dass X_0 und Y_0 lediglich dichten Spann haben (vgl. Bemerkung 6.4 der Vorlesung).

A27: Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$ seien $\phi : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ die Drehung um den Winkel α und $C_\phi \in L\big(L_2(m)\big)$ der Kompositionsoperator mit Symbol ϕ. Beweisen Sie:

a) Durch

$$\mathbf{v}(\lambda) := \begin{cases} f_k & \text{, falls } \lambda = e^{i\alpha k} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

ist ein $\mathbb{S}$-Eigenvektorfeld mit $\overline{\operatorname{span}\big(\mathbf{v}(\mathbb{S})\big)} = L_2(m)$ definiert.

b) Es gilt $\sigma(C_\phi) = \mathbb{S}$.

A28: (Riemann-Lebesgue Lemma) Es seien $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{K}$ eine Regelfunktion und

$$\widehat{f}(k) := \int f\overline{f_k}\, dm = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-ikt}\, dt \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Zeigen Sie: $\widehat{f}(k) \to 0$ für $k \to \pm\infty$.