J. Müller

SoSe 2016
11.05.2016

3. Übung zur Vorlesung Dynamische Systeme

Besprechung am Mittwoch, den 25. Mai 2016

A9: Es seien $D \subset \mathbb{K}^d$ offen und $f \in \mathrm{Lip}(D, \mathbb{K}^d)$. Zeigen Sie: Ist

$$D_t := \{x \in D : (t,x) \in \Omega\} \neq \emptyset,$$

so ist $D_{-t} \neq \emptyset$ und $\phi_t : D_t \to D_{-t}$ ein Homöomorphismus mit $(\phi_k)^{-1} = \phi_{-t}$.

A10: Es sei $D = (0, \infty)$. Finden Sie die maximalen Lösungen des Anfangswertproblems

$$r' = r(1 - r^2), \qquad r(0) = r_0 > 0\,.$$

A11 a) Zeigen Sie: Ist (r, θ) Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} r(1-r^2) \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} r(0) \\ \theta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$$

wobei $r_0 > 0$, so löst $(u,v) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix} + (1 - u^2 - v^2)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \cos\theta_0 \\ r_0 \sin\theta_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

b) Machen Sie sich ein Bild der Orbits und der ω-Grenzmengen der maximalen Lösungen zu (1).

A12: Unter der Duffing-Gleichung versteht man das (Hamilton-)System

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ u - u^3 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2$.

a) Finden Sie eine zugehörige Hamilton-Funktion und machen Sie sich ein Bild der Höhenlinien (und damit der Orbits).

b) Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtspunkte $\pm\binom{1}{0}$ stabil sind.