Jürgen Müller

Differenzialgleichungen

Skriptum zur Vorlesung
Sommersemester 2018

Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1 Gewöhnliche Differenzialgleichungen: Definition und Beispiele

Differenzialgleichungen sind Gleichungen, in denen eine unabhängige Variable, Funktionen und Ableitungen der Funktionen auftauchen. Dabei bezeichnen wir die unabhängige Variable meist mit t (Zeit). Bevor wir uns mit der allgemeinen Theorie beschäftigen, betrachten wir einige einfache Spezialfälle mit Anwendungsbeispielen.

Beispiel 1.1

Definition 1.2 Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f : D \to \mathbb{K}^d$ stetig. Wir schreiben ein Element aus $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ meist in der Form (t, x), wobei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{K}^d$ ist.

1. Eine **(gewöhnliche) Differenzialgleichung (1. Ordnung)** ist eine Gleichung der Form
$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.1}$$
oder kurz
$$x' = f(t, x)\ ,$$
wobei $x'(t) = (x_1'(t), ..., x_d'(t))$. Ist $d = 1$, so spricht man auch von einer **skalaren Differenzialgleichung**, im Falle $d > 1$ dagegen auch von einem **System gewöhnlicher Differenzialgleichungen (1. Ordnung)**

2. Ist $T \subset \mathbb{R}$, so heißt eine Funktion $\varphi : T \to \mathbb{K}^d$ bzw. das Paar (φ, T) eine **Lösung der Differenzialgleichung** (1.1) falls φ differenzierbar auf T ist, falls
$$\mathrm{graph}(\varphi) = \{(t, \varphi(t)) : t \in T\} \subset D$$
gilt, und falls (1.1) für alle $t \in T$ erfüllt ist, d. h.
$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad \text{für alle} \quad t \in T\,.$$

3. Ist $(u, v) \in D$, so heißt ein Gleichungssystem der Form
$$x' = f(t, x) \qquad\qquad x(u) = v \tag{1.2}$$
ein **Anfangswertproblem** (für die Differenzialgleichung (1.1)) (kurz: AWP). Ist I ein Intervall mit $u \in I$ und ist (φ, I) eine Lösung von (1.1) mit $\varphi(u) = v$, so heißt φ bzw. (φ, I) **Lösung des Anfangswertproblems** (1.2).

Eine Klasse von Differenzialgleichungen, bei denen man die Lösungen mittels Integration bestimmen kann, sind (skalare) lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung: Ist $T \subset \mathbb{R}$ offen, so heißt eine Gleichung der Form
$$x' = f(t, x) = a(t)x + b(t)$$

mit stetigen Funktionen $a : T \to \mathbb{K}$ und $b : T \to \mathbb{K}$ eine **(skalare) lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung**. Ist $b = 0$, so spricht man von einer **homogenen Gleichung**. Es gilt dafür

Satz 1.3 *Es seien $T \subset \mathbb{R}$ offen und $a, b : T \to \mathbb{K}$ stetig. Sind $u \in T$ und $v \in \mathbb{K}$, so hat für jedes Intervall $I \subset T$ mit $u \in I$ das Anfangswertproblem*

$$x' = a(t)x + b(t)\,, \qquad x(u) = v$$

hat genau eine Lösung φ auf I, die mit $\alpha(t) := \int_u^t a(s)ds$ für $t \in I$ gegeben ist durch

$$\varphi(t) = e^{\alpha(t)}\Big(v + \int\limits_u^t e^{-\alpha(s)}b(s)ds\Big) \qquad (t \in I).$$

Beweis. Es gilt $\varphi(u) = e^{\alpha(u)}v = v$ und

$$\varphi'(t) = e^{\alpha(t)}a(t)\Big(v + \int\limits_u^t e^{-\alpha(s)}b(s)ds\Big) + \underbrace{e^{\alpha(t)}e^{-\alpha(t)}}_{=1}b(t) = a(t)\varphi(t) + b(t) \quad (t \in I).$$

Also ist φ Lösung des Anfangswertproblems auf I.
Ist (ψ, I) eine weitere Lösung auf I und ist $\delta(t) := (\varphi - \psi)(t)e^{-\alpha(t)}$, so gilt

$$\delta'(t) = \underbrace{(\varphi'(t) - \psi'(t))}_{=a(t)(\varphi(t)-\psi(t))}e^{-\alpha(t)} - (\varphi(t) - \psi(t))e^{-\alpha(t)}a(t) = 0 \quad (t \in I)\,,$$

Da I ein Intervall ist, folgt $\delta(t) = \delta(u) = 0$ für $t \in I$ und (da exp nullstellenfrei ist) auch $\varphi = \psi$ auf I . □

Beispiel 1.4

Wir betrachten einen zweiten Typ skalarer Gleichungen, bei denen ggfs. Lösungen per Integration berechnet werden können: Ist $D = T \times X$ mit $T, X \subset \mathbb{R}$ offen, und ist f von der Form

$$f(t, x) = h(t)g(x)$$

mit $h : T \to \mathbb{R}$ und $g : X \to \mathbb{R}$, so spricht man von einer **Differenzialgleichung mit getrennten Veränderlichen** (oder von einer **separierbaren Differenzialgleichung**). Ist $g(v) = 0$ für ein $v \in X$, so ist offenbar $\varphi(t) \equiv v$ eine Lösung von $x' = h(t)g(x)$ auf T, eine sogenannte **triviale** oder **stationäre** Lösung. Interessanter ist der Fall $g(v) \neq 0$:

Satz 1.5 *Es seien $T, X \subset \mathbb{R}$ offen und $h : T \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Sind $u \in T$, $v \in X$ und ist $J \subset X$ ein Intervall mit*

$$g(x) \neq 0 \qquad (x \in J),$$

so hat das Anfangswertproblem

$$x' = h(t)g(x)\,, \qquad x(u) = v$$

auf jedem Intervall $I \subset T$ mit $u \in I$ und $H(I) \subset G(J)$ genau eine Lösung $\varphi : I \to J$, und diese ergibt sich mit

$$H(t) := \int_u^t h(s)ds \quad (t \in I), \qquad G(x) := \int_v^x \frac{ds}{g(s)} \quad (x \in J)$$

durch Auflösen der Gleichung

$$G(x) = H(t)$$

nach x, also $\varphi(t) = G^{-1}(H(t))$ für $t \in I$.

Beweis. 1. Da $G'(x) = 1/g(x) \neq 0$ für alle $x \in J$ gilt, ist nach dem Zwischenwertsatz $G' > 0$ oder $G' < 0$ durchgehend auf J (da G' stetig auf J) und damit G streng monoton (wachsend oder fallend) auf J. Also besitzt G eine Umkehrfunktion $G^{-1} : G(J) \to J$. Ist $I \subset T$ ein Intervall mit $u \in I$ und $H(I) \subset G(J)$, so betrachten wir $\varphi : I \to J$ mit

$$\varphi(t) := G^{-1}(H(t)) \qquad (t \in I)\,.$$

Dann gilt

$$h = H' = (G \circ \varphi)' = ((1/g) \circ \varphi)\varphi',$$

also $\varphi' = (g \circ \varphi)h$ und $\varphi(u) = G^{-1}(H(u)) = G^{-1}(0) = v$, d. h. φ löst das Anfangswertproblem.

2. Ist $\psi : I \to J$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems, so gilt $\psi' = (g \circ \psi)h$ auf I und damit nach der Substitutionsregel

$$G(\psi(t)) = \int_{v=\psi(u)}^{\psi(t)} 1/g = \int_u^t ((1/g) \circ \psi)\psi' = \int_u^t h = H(t) \qquad (t \in I)$$

d. h. $\psi(t) = G^{-1}(H(t)) = \varphi(t) \qquad (t \in I)$. □

Satz 1.5 erweist sich als äußerst nützlich, da die Aussage ein Verfahren zur Berechnung der Lösung enthält. Im Wesentlichen hat man zwei Stammfunktionen (H und G) zu berechnen und die Umkehrfunktion von G anzuwenden. Oft geht man lokal vor: Ist nur $g(v) \neq 0$, so existert ein offenes Intervall $J \subset X$ mit $g(x) \neq 0$ auf J. S. 1.5 liefert dann die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems für $|t - u|$ genügend klein (für solche t ist jedenfalls $H(t) \in G(J)$).

Bemerkung 1.6 Ein wichtiger Spezialfall sind **autonome** Differenzialgleichungen, also Gleichungen der Form

$$x' = g(x)$$

mit stetiger Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ und $X \subset \mathbb{R}$ offen. Hier ist $h \equiv 1$ und damit die Lösung mit Anfangsbedingung $x(u) = v$ gegeben durch

$$\varphi(t) = G^{-1}(t-u) \qquad (t \in u + G(J)).$$

Beispiel 1.7 1. Wir betrachten mit $X = \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$x' = g(x) = 1 + x^2\,, \qquad x(0) = 0\,.$$

Die Lösung ergibt sich nach B. 1.6 aus

$$G(x) = \int\limits_0^x \frac{ds}{1+s^2} = \arctan(x)$$

und $G(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$ als $\varphi(t) = \tan(t)$ für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Man sieht, dass die Lösung nur auf einem echten Teilintervall von $\mathbb{R}$ existiert. Man spricht hier von einer endlichen Entweichzeit.

2. Wir betrachten die in der Populationsdynamik zur Modellierung von Tier- oder Pflanzenpopulationen oft verwendete **logistische Gleichung**

$$x' = g(x) := x(1-x)$$

und suchen die Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = x(1-x)\,, \qquad x(0) = v \geq 0\,.$$

Ist $v = 1$ oder $v = 0$, so ist $g(v) = 0$ und damit sind $\varphi(t) \equiv 1$ und $\varphi(t) \equiv 0$ triviale Lösungen.

Es sei nun $0 < v < 1$. Dann ist auch $0 < x < 1$ für $|x - v|$ genügend klein. Nach S. 1.5 erhalten wir eine Lösung lokal (also auf einer genügend kleinen Umgebung von $u = 0$) aus

$$t = \int\limits_0^t ds = \int\limits_v^x \frac{ds}{s(1-s)} = \int\limits_v^x \frac{ds}{s} + \int\limits_v^x \frac{ds}{1-s} = \ln(x) - \ln(1-x) + \ln(1-v) - \ln(v)\,,$$

also

$$e^t \frac{v}{1-v} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$$

und damit

$$\varphi(t) = x = \frac{e^t \frac{v}{1-v}}{1 + e^t \frac{v}{1-v}} = \frac{v}{(1-v)e^{-t} + v}\,.$$

Nachrechnen zeigt, dass dadurch eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ gegeben ist. Eine entsprechende Rechnung gilt für $v > 1$. Man beachte, dass nun

$$\varphi(t) = \frac{v}{(1-v)e^{-t} + v}$$

nur auf $(\ln(1 - 1/v), \infty)$ definiert und Lösung ist. Man spricht in diesem Fall von einer endlichen Entweichzeit.

Das folgende Beispiel zeigt, dass unter Umständen auch lokal mehrere Lösungen zu einem Anfangswertproblem existieren können.

Beispiel 1.8 Wir betrachten die autonome Gleichung

$$x' = g(x) := \begin{cases} \sqrt{x}\,, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0\,, & \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

Für $v \leq 0$ ist $\psi(t) \equiv v$ triviale Lösung auf $\mathbb{R}$. Löst man das Anfangswertproblem mit $x(0) = v > 0$ (zunächst lokal) nach S. 1.5, so ergibt sich

$$x = (t/2 + \sqrt{v})^2$$

als Lösung auf einer Umgebung von 0. Man rechnet leicht nach, dass durch

$$\varphi(t) := \begin{cases} (t/2 + \sqrt{v})^2, & t \geq -2\sqrt{v} \\ 0, & t < -2\sqrt{v} \end{cases}$$

eine Lösung der Differenzialgleichung auf $\mathbb{R}$ gegeben ist. Also haben wir zwei auf jeder Umgebung von $u = -2\sqrt{v}$ unterschiedliche Lösungen des Anfangswertproblems mit $x(-2\sqrt{v}) = 0$ (nämlich φ und $\psi = 0$). Man nennt u in einem solchen Fall eine Verzweigungsstelle.

Zum Abschluss wollen wir uns noch mit einer Klasse von Differenzialgleichungen beschäftigen, in denen höhere Ableitungen auftreten. Zunächst wieder ein Beispiel aus der Ökonomie. Allgemeiner betrachten wir nun Gleichungen n-ter Ordnung:

Definition 1.9 Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, und es sei $f \in C(D, \mathbb{K})$. Eine Gleichung der Gestalt

$$x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)\big) \tag{1.3}$$

oder kurz

$$x^{(n)} = f\big(t, x, x', ..., x^{(n-1)}\big)$$

heißt **(gewöhnliche) Differenzialgleichung n-ter Ordnung**. Eine Funktion $\varphi : T \to \mathbb{K}$ (bzw. das Paar (φ, T)) heißt **Lösung** von (1.3), falls φ n-mal differenzierbar auf T ist mit $(t, \varphi(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)) \in D$ und

$$\varphi^{(n)}(t) = f\big(t, \varphi(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)\big) \qquad (t \in T)\,.$$

Ist $(u, v_0, ..., v_{n-1}) \in D$, so heißt ein Gleichungssystem der Form

$$x^{(n)} = f\big(t, x, ..., x^{(n-1)}\big), \quad x(u) = v_0, ..., x^{(n-1)}(u) = v_{n-1} \tag{1.4}$$

ein **Anfangswertproblem** (AWP) für (1.3). Schließlich heißt eine Lösung (φ, I) von (1.3) **Lösung des Anfangswertproblems** (1.4), falls I ein Intervall ist und

$$\varphi(u) = v_0, ..., \varphi^{(n-1)}(u) = v_{n-1}$$

gilt.

Beispiel 1.10 Das Anfangswertproblem

$$x'' = -x, \qquad x(0) = 1,\, x'(0) = 0$$

hat die Lösung $\varphi(t) = \cos t$ auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.11 Man kann eine Differenzialgleichung n-ter Ordnung stets auf ein System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung wie aus D. 1.2 umschreiben: Betrachten wir $F : D \to \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{array}{rcc} F_1(t, x_1, ..., x_n) & = & x_2 \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n-1}(t, x_1, ..., x_n) & = & x_n \\ F_n(t, x_1, ..., x_n) & = & f(t, x_1, ..., x_n) \end{array},$$

so sieht man sofort: Ist $\varphi : T \to \mathbb{K}$ eine Lösung von (1.3), so ist

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \\ \vdots \\ \Phi_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in T)\,,$$

eine Lösung von

$$x' = F(t, x)\ .$$

Ist umgekehrt $\Phi : T \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $x' = F(t, x)$, so ist $\varphi := \Phi_1 : T \to \mathbb{K}$ (also die erste Komponente von Φ) eine Lösung von (1.3). Außerdem löst (φ, I) das Anfangswertproblem (1.4) genau dann, wenn Φ das Anfangswertproblem

$$x' = F(t, x), \qquad x(u) = (v_0, ..., v_{n-1})^\top$$

auf I löst.

Dies zeigt, dass man sich bei einer allgemeinen Lösungstheorie auf Gleichungen 1. Ordnung beschränken kann. Einer solchen allgemeinen Lösungstheorie wenden wir uns als nächstes zu.

2 Lösungstheorie für allgemeine gewöhnliche Differenzialgleichungen

Sind $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, $a \in E$ und $\delta > 0$, so schreiben wir

$$U_\delta(a) := \{e \in E : ||e - a|| < \delta\} \quad \text{und} \quad B_\delta(a) := \{e \in E : ||e - a|| \leq \delta\}.$$

Im Weiteren betrachten wir stets die euklidsche Norm auf $\mathbb{K}^d$ (und schreiben dafür kurz $|\cdot|$) und auf $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ die Norm $|(t,x)| := |(t,x)|_{\max} := \max\{|t|, |x|\}$. Für $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ gilt dann

$$B_\delta(u,v) = B_\delta(u) \times B_\delta(v).$$

Wir untersuchen nun allgemeine Anfangswertprobleme (1.2), d. h. für eine gegebene Funktion $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$, wobei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen ist, und für $(u,v) \in D$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x' = f(t,x) \qquad x(u) = v\,.$$

In B. 1.8 hatten wir gesehen, dass Verzweigungstellen existieren können. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass unter stärkeren Voraussetzungen an f stets Lösungen auf geeigneten Intervallen existieren diese auch eindeutig sind.

Definition 2.1 Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}^d$ heißt **lokal Lipschitz-stetig bezüglich der zweiten Variablen** (oder kurz bezüglich x), wenn zu jedem $(u,v) \in D$ eine Umgebung W von (u,v) und eine Konstante $L = L(W)$ existieren mit

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y| \qquad \text{für alle} \quad (t,x),(t,y) \in W\,.$$

Wir schreiben $C^+(D, \mathbb{K}^d)$ für die Menge aller $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$, die lokal Lipschitz-stetig bezüglich der zweiten Variablen sind.

Bemerkung 2.2 Genau dann ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich x, wenn für alle $K \subset D$, K kompakt, eine Konstante $L = L(K)$ mit

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|$$

für alle (t,x) und $(t,y) \in K$ existiert.

> Denn: $\Leftarrow$: Es genügt zu zeigen: Jeder Punkt in D enthält eine kompakte Umgebung in D. Ist $(u,v) \in D$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $K := B_\delta(u,v) \subset D$. Dabei ist K kompakt nach dem Satz von Heine-Borel.
>
> $\Rightarrow$: Es sei $K \subset D$ kompakt. Angenommen, es existiert keine Konstante L wie gewünscht. Dann existieren Folgen (t_n, x_n), (t_n, y_n) in K mit
>
> $$|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)| \geq n|x_n - y_n| \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Da K kompakt ist, besitzt (t_n, x_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert (u, v) in K. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Folge (t_n, x_n) selbst konvergiert. Aus

$$|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)| \leq 2 \max_K |f| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

folgt $|x_n - y_n| \to 0$. Dann gilt auch $(t_n, y_n) \to (u, v)$. Nach Voraussetzung existieren eine Umgebung U von (u, v) und ein $L > 0$ mit $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ für alle $(t, x), (t, y) \in U$. Da (t_n, x_n) und (t_n, y_n) für n genügend groß in U liegen, steht dies im Widerspruch zu $L_n \to \infty$.

Satz 2.3 *Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^d$. Existieren für $j, k = 1, \ldots, d$ die partiellen Ableitungen $\partial f_j / \partial x_k$ auf D und sind die Funktionen $\partial f_j / \partial x_k : D \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich x.*

Beweis. Mit

$$\partial_2 f(t, x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(t, x) \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(t, x) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(t, x) \end{pmatrix}$$

für $(t, x) \in D$ folgt aus Eigenschaften der Operatornorm[1] leicht, dass $\partial_2 f : D \to \mathbb{R}^{d \times d}$ stetig ist. Ist $(u, v) \in D$, so ist $K := B_\delta(u, v) \subset D$ für genügend kleines $\delta > 0$ eine Umgebung von (u, v). Da K kompakt ist, existiert

$$L := \max_K \|\partial_2 f\|.$$

Für $(t, \xi) \in K$ ist $\partial_2 f(t, \xi)$ die Jacobi-Matrix von $f(t, \cdot)$ an der Stelle ξ. Sind $(t, x), (t, y) \in K$, so gilt damit nach dem Schrankensatz $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$. $\square$

Beispiel 2.4 1. Es sei

$$f(t, x) := tx^2 \qquad (t, x \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt $\partial_2 f(t, x) = 2tx$ für $t, x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\partial_2 f$ stetig auf $\mathbb{R}^2$. Nach S. 2.3 ist f auf $\mathbb{R}^2$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich x.
2. Für $t, x \in \mathbb{R}$ sei

$$f(t, x) := g(x) := \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(vgl B. 1.8). Auf $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ ist $\partial_2 f$ stetig. Also ist $f|_D$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. x. Andererseits gilt für alle $x > 0$

$$|g(x) - g(0)| = \sqrt{x} = \frac{|x - 0|}{\sqrt{x}}\,.$$

[1] Im Weiteren soll $\mathbb{K}^{d \times d}$ stets mit der Operatornorm $\|\cdot\|$, also $||A|| := \sup_{x \in B_1(0)} |Ax|$ für $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$ versehen sein.

Aus $1/\sqrt{x} \to \infty$ für $x \to 0^+$ folgt, dass f auf keiner offenen Menge D, die $\mathbb{R} \times \{0\}$ trifft, lokal Lipschitz-setig bezüglich x ist.

Wir zeigen nun, dass das Anfangswertproblem (1.2) äquivalent ist zu einer gewissen Integralgleichung. Um dies für $\mathbb{K}^d$-wertige Funktionen formulieren zu können, definieren wir für Intervalle I und $f = (f_1, ..., f_d)^\top \in C(I, \mathbb{K}^d)$

$$\int_u^t f := \int_u^t f(s)ds := \Big(\int_u^t f_1, ..., \int_u^t f_d \Big)^\top \qquad (u, t \in I).$$

Dann ist $f \mapsto \int_u^t f$ linear. Außerdem gilt $\left| \int_u^t f \right| \le \int_{\min(u,t)}^{\max(u,t)} |f|$ für $f \in C(I, \mathbb{K}^d)$.

Denn: Ohne Einschränkung können wir $u < t$ annehmen. Mit $v := \int_u^t f(s)ds \in \mathbb{K}^d$ gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |v|^2 &= \overline{v}^\top v = \sum_{j=1}^d \overline{v}_j \int_u^t f_j(s)ds = \int_u^t \left(\sum_{j=1}^d \overline{v}_j f_j(s) \right) ds \\ &= \int_u^t \overline{v}^\top f(s)ds = \mathrm{Re} \int_u^t \overline{v}^\top f(s)ds = \int_u^t \mathrm{Re}(\overline{v}^\top f(s))ds \\ &\le \int_u^t |\overline{v}^\top f(s)|ds \le \int_u^t |v|\,|f(s)|ds\,, \end{aligned}$$

also $|v| \le \int_u^t |f(s)|ds$.

Satz 2.5 *Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Weiter seien $(u, v) \in D$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $u \in I$. Dann sind für $\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d)$ folgende Aussagen äquivalent:*

a) (φ, I) ist eine Lösung von (1.2), d.h. $\varphi(u) = v$ und

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad (t \in I)\,.$$

b) Es ist $\mathrm{graph}(\varphi) \subset D$ und für alle $t \in I$ gilt

$$\varphi(t) = v + \int_u^t f(s, \varphi(s))ds\,.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_d)$, $v = (v_1, ..., v_d)$. Aus $\varphi_j'(s) = f_j(s, \varphi(s))$ für $s \in I$ folgt insbesondere, dass φ_j' stetig ist. Mit $\varphi_j(u) = v_j$ ergibt sich durch Anwendung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung für alle $t \in I$ und $j = 1, ..., d$

$$\varphi_j(t) - v_j = \int_u^t \varphi_j'(s)ds = \int_u^t f_j(s, \varphi(s))ds\,.$$

b) $\Rightarrow$ a): Da φ stetig auf I und f stetig auf D sind, ist $s \mapsto f(s, \varphi(s))$ stetig auf I. Also ergibt sich a) durch Anwendung des Hauptsatzes über Integralfunktionen. □

Damit können wir folgende erste Version eines Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Anfangswertprobleme beweisen.

Satz 2.6 ***(Picard-Lindelöf; lokale Version)***
Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$. Dann existiert zu jeder kompakten Menge $K \subset D$ ein $\alpha = \alpha(K) > 0$ so, dass das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x)\,, \qquad x(u) = v$$

für jedes $(u, v) \in K$ und jedes Intervall $I \subset [u - \alpha, u + \alpha]$ mit $u \in I$ genau eine Lösung auf I besitzt.

Unser Beweis beruht auf einer geeigneten Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes. Wir erinnern zunächst an zwei wichtige Fakten aus der Topologie:

- Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist für $A, B \subset X$ (mit $\inf \emptyset := \infty$)

  $$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

  der Abstand von A und B. Dabei gilt: Sind A abgeschlossen und B kompakt mit $A \cap B = \emptyset$, so ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.
- Ist $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und sind $A, B \subset E$ kompakt, so ist auch die Minkowski-Summe $A + B := \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$ kompakt.

Beweis. 1. Es sei $K \subset D$ kompakt. Da $\operatorname{dist}(K, \partial D) > 0$ ist, existieren $\gamma > 0, \beta > 0$ so, dass mit

$$Q_{\gamma,\beta} := \{(t, x) : |t| \leq \gamma,\ |x| \leq \beta\}$$

die Menge $K + Q_{\gamma,\beta}$ Teilmenge von D ist. Nach der Vorbemerkung ist außerdem $K + Q_{\gamma,\beta}$ kompakt. Wir setzen

$$M := \max_{K + Q_{\gamma,\beta}} |f|$$

und mit $L = L(K + Q_{\gamma,\beta})$ wie in B. 2.2 (und $\rho/0 := \infty$ für $\rho > 0$)

$$\alpha := \min\left(\gamma, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{2L}\right)\,.$$

2. Es sei $(u, v) \in K$ fest, und es sei I ein Intervall mit $u \in I$ und

$$I \subset [u - \alpha, u + \alpha]\,.$$

Wir setzen

$$C := \{\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d) : |\varphi(t) - v| \leq \beta \text{ für alle } t \in I\} \subset B(I, \mathbb{K}^d)\,.$$

Der normierte Raum $(B(I, \mathbb{K}^d), ||\cdot||_\infty)$ ist ein Banachraum (siehe Analysis). Weiter ist $C \subset B(I, \mathbb{K}^d)$ abgeschlossen.

Denn: Es sei $(\varphi_n)_n$ eine Folge in C mit $\varphi_n \to \varphi$ für ein $\varphi \in B(I, \mathbb{K}^d)$. Dann ist (siehe Analysis) φ stetig auf I, d. h. $\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d)$. Außerdem gilt für alle $t \in I$ und $n \in \mathbb{N}$

$$|\varphi(t) - v| \leq \underbrace{|\varphi_n(t) - v|}_{\leq \beta} + \underbrace{|\varphi_n(t) - \varphi(t)|}_{\to 0 \quad (n \to \infty)},$$

also auch $|\varphi(t) - v| \leq \beta$ und damit $\varphi \in C$.

Als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes $(B(I, \mathbb{K}^d), d_\infty)$ ist (C, d_∞) ebenfalls vollständig.

3. Ist $\varphi \in C$, so folgt $(s, \varphi(s)) \in K + Q_{\gamma,\beta} \subset D$ für alle $s \in I$. Da $s \mapsto f(s, \varphi(s))$ stetig auf I ist, definiert

$$T\varphi(t) := v + \int_u^t f(s, \varphi(s))ds \qquad (t \in I).$$

nach dem Hauptsatz über Integralfunktionen eine auf I stetige Funktion $T\varphi$ (tatsächlich ist $T\varphi$ sogar differenzierbar). Weiter gilt für $t \in I$

$$|T\varphi(t) - v| = \Big| \int_u^t f(s, \varphi(s))ds \Big| \leq \int_{\min(u,t)}^{\max(u,t)} \underbrace{|f(s, \varphi(s))|}_{\leq M} ds \leq M \cdot |t - u| \leq M \cdot \alpha \leq \beta,$$

also ist $T\varphi \in C$. Damit ist T eine Selbstabbildung auf C. Außerdem gilt für $\varphi, \psi \in C$ und $t \in I$

$$\begin{aligned} |T\varphi(t) - T\psi(t)| &\leq \int_{\min(u,t)}^{\max(u,t)} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \leq \\ &\leq L \int_{\min(u,t)}^{\max(u,t)} |\varphi(s) - \psi(s)| ds \leq L \|\varphi - \psi\|_\infty |t - u| \\ &\leq L \|\varphi - \psi\|_\infty \cdot \alpha \leq \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_\infty = \frac{1}{2} d_\infty(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Also ist $d_\infty(T\varphi, T\psi) \leq (1/2) d_\infty(\varphi, \psi)$ und damit $T : C \to C$ eine 1/2-Kontraktion

4. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat T genau einen Fixpunkt $\varphi \in C$, d.h. es existiert genau eine Funktion $\varphi \in C$ mit

$$\varphi(t) = T\varphi(t) = v + \int_u^t f(s, \varphi(s))ds \qquad (t \in I).$$

Da jede Funktion, die das Anfangswertproblem $x' = f(t, x)$, $x(u) = v$ auf I löst, notwendigerweise in C liegt ([Ü]), ist φ nach S. 2.5 die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t, x)$, $x(u) = v$ auf I. □

Bemerkung 2.7 Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$.
1. Man sagt, dass Anfangswertproblem $x' = f(t, x)$, $x(u) = v$ sei **lokal eindeutig lösbar**, falls eine Umgebung U von u so existert, dass das Anfangswertproblem jedem Intervall $I \subset U$ mit $u \in I$ genau eine Lösung hat. Insbesondere ergibt sich aus S. 2.6, dass für $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$ das Anfangswertproblem in jedem Punkt $(u, v) \in D$ lokal eindeutig lösbar ist (man wähle $K = \{(u, v)\}$ und $U := [u - \alpha, u + \alpha]$).
Man kann zeigen, dass auch ohne die Voraussetzung der lokalen Lipschitz-Stetigkeit die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems auf einer Umgebung von u gesichert ist (Existenzsatz von Peano). Wie etwa B. 1.8 zeigt, sind die Lösungen in diesem Fall allerdings im Allgemeinen nicht mehr lokal eindeutig. Auf den Beweis des Satzes von Peano, der weitergehende Hilfsmittel der Analysis erfordert, wollen wir nicht eingehen.
2. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis zu S. 2.6 ergibt sich für $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$ mit dem Banachschen Fixpunktsatz folgendes iterative Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Lösung des Anfangswertproblems (1.2) auf einer Umgebung von u:
Ist $\varphi_0 \in C$ (etwa $\varphi_0(t) \equiv v$), so konvergiert die Folge (φ_n) in C mit

$$\varphi_{n+1}(t) := T\varphi_n(t) = v + \int_u^t f(s, \varphi_n(s))ds$$

für $t \in I$ (gleichmäßig) gegen die Lösung φ. Außerdem ergibt sich aus dem Banachschen Fixpunktsatz eine Abschätzung für den Fehler $\|\varphi - \varphi_n\|_\infty$. Dieses Näherungsverfahren zur Bestimmung der Lösung heißt **Picard-Lindelöfsches Iterationsverfahren** oder auch **Methode der sukzessiven Approximationen**. Für das einfache Beispiel $x' = x$, $x(0) = 1$ erhalten wir etwa mit $\varphi_0 \equiv 1$

$$\varphi_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{t^\nu}{\nu!},$$

also $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^t$ (hier sogar für alle $t \in \mathbb{R}$).

Definition 2.8 1. Es seien (φ, I) und (ψ, J) Lösungen des Anfangswertproblems (1.2). Dann heißt (ψ, J) **Fortsetzung** von (φ, I) bzw. (φ, I) **Einschränkung** von (ψ, J), falls $J \supset I$ und $\psi|_I = \varphi$ gilt. Dabei nennt man im Falle $J \neq I$ die Fortsetzung bzw. die Einschränkung **echt**. Die Lösung (φ, I) heißt **maximal**, falls (φ, I) keine echte Fortsetzung hat. Das Intervall I heißt dann ein **maximales Lösungsintervall** des Anfangswertproblems.
2. Das Anfangswertproblem (1.2) heißt **global eindeutig lösbar**, falls genau eine maximale Lösung $(\varphi_{\max}, I_{\max})$ existiert und jede Lösung Einschränkung von $(\varphi_{\max}, I_{\max})$ ist. Wenn wir die Abhängigkeit von den Anfangswerten (u, v) betonen möchten, schreiben wir im Falle der global eindeutigen Lösbarkeit auch $\varphi(\cdot, u, v)$ für die maximale Lösung und $I(u, v)$ für das maximale Lösungsintervall.

Beispiel 2.9 1. Es seien $D = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \lambda x(t), \qquad x(u) = v$$

für $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ nach S. 1.3 global eindeutig lösbar und es gilt

$$\varphi(t, u, v) = ve^{\lambda(t-u)} \quad \text{auf} \quad I(u, v) = \mathbb{R}\,.$$

2. Wir betrachten wieder B. 1.8. Hier sind die Funktionen $\psi(t) \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2/4, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

maximale Lösungen des Anfangswertproblems mit $x(0) = 0$. Es können also mehrere maximale Lösungen existieren. B. 1.8 zeigt auch, dass das Anfangswerproblem mit $x(0) = v > 0$ zwar lokal eindeutig, aber nicht global eindeutig lösbar ist.

Satz 2.10 *Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Ist das Anfangswertproblem (1.2) für jedes $(u, v) \in D$ lokal eindeutig lösbar, so ist es auch für jedes $(u, v) \in D$ global eindeutig lösbar.*

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst: Sind (φ, I) und (ψ, J) Lösungen von (1.2), so gilt

$$\varphi|_{I \cap J} = \psi|_{I \cap J}\,.$$

Angenommen, es existiert ein $t \in I \cap J$ mit $\varphi(t) \neq \psi(t)$. Ohne Einschränkung betrachten wir den Fall $t > u$ und setzen

$$t_* := \inf\{t \in I \cap J : t > u,\, \varphi(t) \neq \psi(t)\}\,.$$

Nach Voraussetzung ist $u < t_*$ und nach Definition von t_*

$$\varphi|_{[u,t_*)} = \psi|_{[u,t_*)}\,.$$

Da φ und ψ stetig auf $[u, t_*] \subset I \cap J$ sind, gilt auch

$$\varphi(t_*) = \psi(t_*)$$

und damit insbesondere $t_* < t$. Also ist t_* kein Randpunkt von $I \cap J$ und φ und ψ sind Lösungen von $x' = f(t, x)$, $x(t_*) = \psi(t_*)(= \varphi(t_*))$ auf $I \cap J$. Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung U von t_* mit $\varphi|_U = \psi|_U$, im Widerspruch zur Definition von t_*.
2. Es sei $I_{\max}$ die Vereinigung aller Intervalle I mit $u \in I$ und so, dass auf I eine Lösung φ_I existiert (solche Intervalle existieren nach Voraussetzung). Für $t \in I_{\max}$ setzen wir

$$\varphi_{\max}(t) := \varphi_I(t) \qquad \text{falls} \quad t \in I\,.$$

Dann ist $\varphi_{\max}$ nach 1. wohldefiniert, denn sind φ_I und ψ_J zwei Lösungen mit $t \in I \cap J$, so gilt $\psi(t) = \varphi(t)$. Außerdem ergibt sich aus der Definition, dass $(\varphi_{\max}, I_{\max})$ maximale Lösung von (1.2) ist und dass jede Lösung Einschränkung davon ist. □

Es gilt damit

Satz 2.11 ***(Picard-Lindelöf, globale Version)***
Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$. Dann ist für jedes $(u, v) \in D$ das Anfangswertproblem (1.2) global eindeutig lösbar. Weiter gilt: $I(u, v)$ ist offen und zu jeder kompakten Menge $K \subset D$ existieren $u_1, u_2 \in I(u, v)$ mit $(t, \varphi(t, u, v)) \notin K$ für alle $t > u_1$ und $t < u_2$.

Beweis. Nach B. 2.7.1 ist das Anfangswertproblem (1.2) für jedes (u, v) lokal eindeutig lösbar. Aus S. 2.10 folgt dann die global eindeutige Lösbarkeit.
Es seien $K \subset D$ kompakt und $(u, v) \in D$. Angenommen, es existiert kein u_1 wie gefordert. Ist $b \in (u, \infty]$ der rechte Randpunkt von $I(u, v)$, so existiert damit eine Folge (t_n) in $I(u, v)$ mit $u < t_n \uparrow b$ und

$$(t_n, \varphi(t_n, u, v)) \in K \qquad (n \in \mathbb{N}) \,.$$

Dann ist insbesondere $b < \infty$. Es sei nun $\alpha = \alpha(K)$ wie in S. 2.6. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $t_N > b - \alpha$ und betrachten das Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_N) = w := \varphi(t_N, u, v) \,.$$

Nach S. 2.6 gilt $[t_N - \alpha, t_N + \alpha] \subset I(t_N, w)$ für die maximale Lösung $\varphi(\cdot, t_N, w)$. Da $t_N + \alpha > b$ gilt und da $\varphi(\cdot, t_N, w)$ als Fortsetzung von $\varphi(\cdot, u, v)$ auch Lösung von (1.2) ist, ergibt sich ein Widerspruch zur Maximalität von $\varphi(\cdot, u, v)$. Also existiert ein u_1 wie gefordert.
Zudem ist dabei $b \notin I(u, v)$, denn sonst wäre $[u, b] \times \varphi([u, b], u, v)$ kompakt in D als Bild der stetigen Funktion $t \mapsto (t, \varphi(t, u, v))$ unter der kompakten Menge $[u, b]$. Dies widerspricht aber dem eben Bewiesenen.
Eine entsprechende Argumentation für den linken Randpunkt a von $I(u, v)$ zeigt die Existenz eines u_2 wie gefordert und damit insbesondere auch $a \notin I(u, v)$. □

Bemerkung 2.12 Unter den Voraussetzungen von S. 2.11 existiert zu jedem Punkt $(u, v) \in D$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi(\cdot, u, v)$, die zudem „jede kompakte Teilmenge verlässt“, sowohl bei Annäherung an den rechten Randpunkt von $I(u, v)$, als auch bei Annäherung an den linken. Die dadurch definierte Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}^d$ mit

$$\Omega := \{(t, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d : t \in I(u, v),\ (u, v) \in D\}$$

nennen wir die **allgemeine Lösung** der Differenzialgleichung $x' = f(t, x)$.

Beispiel 2.13 1. Es sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = tx^2 \,, \qquad x(u) = v$$

für $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ist $v = 0$, so ist $\varphi(\cdot, u, 0) = 0$ auf $\mathbb{R}$ die maximale Lösung. Nach S. 1.5 ergibt sich für $v \neq 0$ eine Lösung jedenfalls lokal durch Auflösen von

$$\frac{1}{2}(t^2 - u^2) = \int\limits_u^t s\,ds = \int\limits_v^x \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\,,$$

nach x. Man erhält dann

$$x = \frac{2v}{2 - v(t^2 - u^2)}$$

für $|t - u|$ genügend klein. Genauer ist dadurch eine Lösung des Anfangswertproblems auf jedem Intervall gegeben, das u, aber nicht die im Falle $c := c(u, v) := u^2 + 2/v \geq 0$ auftretenden Nullstellen des Nenners $\pm\sqrt{c}$, enthält. Nach passenden Fallunterscheidungen ergibt sich (mit viel Konzentration)

$$\varphi(t, u, v) = \frac{2v}{2 - v(t^2 - u^2)} \quad \text{für } t \in I(u, v) = \begin{cases} \mathbb{R}\,, & \text{falls } c < 0 \\ (-\sqrt{c}, \sqrt{c})\,, & \text{falls } c \geq 0,\ v > 0 \\ (\sqrt{c}, \infty)\,, & \text{falls } c \geq 0,\ v < 0,\ u > 0 \\ (-\infty, -\sqrt{c})\,, & \text{falls } c \geq 0,\ v < 0,\ u < 0 \end{cases}.$$

Obwohl $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist, sind die maximalen Lösungsintervalle nicht stets ganz $\mathbb{R}$. Man sieht aber: Alle Lösungen verlassen jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Genauer gilt für $c \geq 0$

$$\varphi(t, u, v) \to \begin{cases} \infty & \text{für } t \to \pm\sqrt{c}\,, & \text{falls } v > 0 \\ -\infty & \text{für } t \to \sqrt{c}\,, & \text{falls } v < 0,\ u > 0 \\ -\infty & \text{für } t \to -\sqrt{c}\,, & \text{falls } v < 0,\ u < 0 \end{cases}.$$

2. Es sei $D = (0, \infty) \times \mathbb{C}$ und

$$z' = -2\pi i z/t^2, \qquad z(1) = v \in \mathbb{C}\,.$$

Dann ist

$$\varphi(t, 1, v) = v e^{2\pi i/t} \qquad (t \in (0, \infty))$$

nach S. 1.3 die maximale Lösung des Anfangswertproblems. Hier existiert $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t, 1, v)$ im Falle $v \neq 0$ nicht!

Unter zusätzlichen Voraussetzungen an f kann man eine Aussage über die Größe der maximalen Lösungsintervalle machen. Vorbereitend beweisen wir das äußerst nützliche **Lemma von Gronwall**:

Satz 2.14 *Es seien $J = [u, \beta) \subset \mathbb{R}$ ein (halboffenes) Intervall und $\psi \in C(J, \mathbb{R})$. Existieren Konstanten $A \in \mathbb{R}$ und $B \geq 0$ mit*

$$\psi(t) \leq A + B \int\limits_u^t \psi \qquad (t \in J),$$

so ist $\psi(t) \leq A e^{B(t-u)}$ für $t \in J$.

Beweis. Für $\delta \geq 0$ setzen wir

$$g_\delta(t) = (A+\delta)e^{B(t-u)} \qquad (t \in J)\,.$$

Dann gilt

$$g_\delta(t) = A + \delta + B\int\limits_u^t g_\delta \qquad (t \in J)\,.$$

Wir zeigen: $\psi < g_\delta$ für alle $\delta > 0$. Dann ist $\psi \leq g_0$ und damit gilt die Behauptung.
Für $\delta > 0$ ist nach Voraussetzung $\psi(u) = A < A + \delta = g_\delta(u)$. Angenommen, es existiet ein $t \in J$ mit $\psi(t) \geq g_\delta(t)$. Für

$$t_* := \inf\{t \in J : \ \psi(t) \geq g_\delta(t)\} \quad (> u)$$

gilt $\psi(t_*) = g_\delta(t_*)$ und $\psi \leq g_\delta$ auf $[u, t_*]$, nach Voraussetzung aber dann auch

$$\psi(t_*) \leq A + B\int\limits_u^{t_*} \psi < A + \delta + B\int\limits_u^{t_*} g_\delta = g(t_*)\,.$$

Widerspruch! □

Satz 2.15 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $D = I \times \mathbb{K}^d$. Weiter sei $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$ so, dass zu jedem kompakten Intervall $I_0 \subset I$ Konstanten $L, M \geq 0$ exitieren mit*

$$|f(t,x)| \leq L|x| + M$$

für alle $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{K}^d$, Dann ist $I(u,v) = I$ für alle $(u,v) \in I \times \mathbb{K}^d$.

Beweis. Angenommen, $I(u,v) \neq I$. Ohne Einschränkung sei dann $\beta := \sup I(u,v) < \sup I$ und $J := [u, \beta)$. Dann ist $I_0 := [u, \beta] \subset I$ kompakt und damit existieren $L, M \geq 0$ mit $|f(t,x)| \leq L|x| + M$ für alle $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{K}^d$.
Für $t \in J$ gilt nach S. 2.5

$$\varphi(t,u,v) = v + \int\limits_u^t f(s, \varphi(s, u.v))ds$$

und mit $\delta := \beta - u$ daher

$$\psi(t) := |\varphi(t,u.v)| \leq |v| + \int\limits_u^t |f(s, \varphi(s,u.v))|\, ds \leq |v| + M\delta + L\int\limits_u^t \psi \qquad (t \in J)\,.$$

Aus dem Lemma von Gronwall folgt

$$|\varphi(t,u,v)| = \psi(t) \leq (|v| + M\delta)e^{L(t-u)} \leq (|v| + M\delta)e^{L\delta} \quad (t \in J)\,,$$

also ist $\varphi(\cdot, u.v)$ beschränkt auf J. Das widerspricht aber der Tatsache, dass $\varphi(\cdot, u, v)$ nach S. 2.11 jede kompakte Teilmenge von $D = I \times \mathbb{K}^d$ verlässt. □

3 Allgemeine lineare Differenzialgleichungen

Bereits in Abschnitt 1 hatten wir uns kurz mit (skalaren) linearen Differenzialgleichungen beschäftigt. Wir untersuchen jetzt den wesentlich allgemeineren Fall von Systemen linearer Differenzialgleichungen.

Es seien im Folgenden stets $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A = (a_{jk}) \in C(I, \mathbb{K}^{d\times d})$ sowie $b \in C(I, \mathbb{K}^d)$. Mit $D := I \times \mathbb{K}^d$ und $f : D \to \mathbb{K}^d$, definiert durch $f(t, x) := A(t)x + b(t)$, nennt man die Differenzialgleichung

$$x' = f(t, x) = A(t)x + b(t) \tag{3.1}$$

ein **lineares System** (von Differenzialgleichungen) oder kurz **lineare Differenzialgleichung** (man beachte dabei: $f : D \to \mathbb{K}^d$ ist stetig). Die Gleichung

$$x' = A(t)x \tag{3.2}$$

heißt **zugehörige homogene Gleichung**. Ist $b = 0$, so heißt (3.1) **homogen**. Meist betrachten wir auch jetzt wieder Anfangswertprobleme der Form

$$x' = A(t)x + b(t)\,, \qquad x(u) = v \tag{3.3}$$

für $u \in I, v \in \mathbb{K}^d$.

Aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes erhalten wir unmittelbar

Satz 3.1 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{K}^{d\times d}, b : I \to \mathbb{K}^d$ stetig. Dann ist für jedes $(u, v) \in I \times \mathbb{K}^d$ das Anfangswertproblem (3.3) global eindeutig lösbar mit $I(u, v) = I$.*

Beweis. Wir betrachten wieder $f : D = I \times \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}^d$ mit $f(t, x) := A(t)x + b(t)$. Dann gilt

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |A(t)(x - y)| \le ||A(t)||\,|x - y| \qquad (t \in I, x, y \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Ist $I_0 \subset I$ kompakt, so existiert

$$L := \max_{t\in I_0} ||A(t)||\,.$$

Also gilt

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le L|x - y| \qquad (t \in I_0,\ x, y \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Insbesondere ist damit $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$, also nach der globalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf (S. 2.11) jedes Anfangswertproblem (3.3) global eindeutig lösbar.

Für $t \in I_0$, $x \in \mathbb{K}^d$ ergibt sich mit $f(t, 0) = b(t)$ zudem

$$|f(t, x)| \le |f(t, x) - f(t, 0)| + |f(t, 0)| \le L|x| + \max_{I_0} |b|\,.$$

Setzt man $M := \max_{I_0} |b|$, so folgt $I(u, v) = I$ aus S. 2.15. □

Wir wollen uns nun die Struktur der Lösungsmenge von (3.1) genauer anschauen. Dazu betonen wir die Abhängigkeit von der Inhomogenität b und schreiben $\varphi_b(\cdot, u, v)$ für die maximale Lösung von (3.3). Außerdem setzen wir

$$L_b := \{\psi : \psi \,\text{löst (3.1) auf}\, I\},$$

also insbesondere

$$L_0 = \{\psi : \psi \,\text{löst (3.2) auf}\, I\}.$$

Dann gilt für $u \in I$ fest (beachte $\psi = \varphi_b(\cdot, u, \psi(u))$ für alle $\psi \in L_b$)

$$L_b = \{\varphi_b(\cdot, u, v) : v \in \mathbb{K}^d\}$$

und insbesondere

$$L_0 := \{\varphi_0(\cdot, u, v) : v \in \mathbb{K}^d\}.$$

Weiter erhalten wir

Satz 3.2 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{K}^{d\times d}, b : I \to \mathbb{K}^d$ stetig.*

1. *Für jedes $u \in I$ ist $T_u : \mathbb{K}^d \to C(I, \mathbb{K}^d)$ mit $T_u v := \varphi_0(\cdot, u, v)$ linear und injektiv.*
2. *L_0 ein d-dimensionaler Unterraum von $C(I, \mathbb{K}^d)$ und für $\psi_b \in L_b$ gilt*

$$L_b = \psi_b + L_0,$$

d. h. L_b ist ein d-dimensionaler affiner Unterraum von $C(I, \mathbb{K}^d)$.

Beweis. 1. Wir schreiben kurz $T = T_u$. Für $v, w \in \mathbb{K}^d$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}(\lambda Tv + Tw)'(t) &= \lambda(Tv)'(t) + (Tw)'(t)\\ &= \lambda A(t)Tv(t) + A(t)Tw(t)\\ &= A(t)(\lambda Tv + Tw)(t) \qquad (t \in I).\end{aligned}$$

und

$$(\lambda Tv + Tw)(u) = \lambda\varphi_0(u, u, v) + \varphi_0(u, u, w) = \lambda v + w\,.$$

Wegen der Eindeutigkeit der maximalen Lösung von (3.3) ist folglich

$$\lambda Tv + Tw = \varphi_0(\cdot, u, \lambda v + w),$$

d. h. $\lambda Tv + Tw = T(\lambda v + w)$. Also ist T linear. Ist $Tv = 0$, so gilt

$$0 = Tv(u) = \varphi_0(u, u, v) = v.$$

Damit ist $\mathrm{Kern}(T) = \{0\}$, also T injektiv.

2. Aus 1. folgt, dass $L_0 = \mathrm{Bild}(T)$ isomorph zu $\mathbb{K}^d$ ist. Damit ist L_0 ein d-dimensionaler Unterraum von $C(I, \mathbb{K}^d)$. Es bleibt zu zeigen $L_b = \psi_b + L_0$.
$\supset$: Es sei $\psi \in \psi_b + L_0$, d. h. $\psi = \psi_b + \psi_0$ für ein $\psi_0 \in L_0$. Dann gilt

$$\psi'(t) = A(t)\psi_b'(t) + b(t) + A(t)\psi_0(t) = A(t)\psi(t) + b(t)$$

auf I. Also ist ψ Lösung von (3.1) auf I und damit $\psi \in L_b$.
$\subset$: Es sei $\psi \in L_b$, d. h. $\psi' = A(t)\psi + b(t)$ auf I. Dann gilt $(\psi - \psi_b)' = A(t)(\psi - \psi_b)$, also $\psi - \psi_b \in L_0$. Damit ist $\psi = \psi_b + (\psi - \psi_b) \in \psi_b + L_0$. $\square$

Bemerkung und Definition 3.3 Da nach S. 3.2 der Lösungsraum L_0 der homogenen Gleichung $x' = A(t)x$ ein d-dimensionaler linearer Raum ist, reicht es, zur Bestimmung einer beliebigen Lösung eine Basis von L_0 zu kennen (jede Lösung ist dann Linearkombination der Basiselemente). Eine solche Basis heißt ein **Fundamentalsystem**.
Die lineare Unabhängigkeit von Lösungen ist dabei äquivalent zur linearen Unabhängigkeit der Anfangswerte. Genauer folgt für $M \subset \mathbb{K}^d$ aus der Tatsache, dass T_u für alle $u \in I$ ein Isomorphismus auf L_0 ist, die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) M ist linear unabhängig in $\mathbb{K}^d$.

b) Für alle $u \in I$ ist $T_u(M) = \{\varphi_0(\cdot, u, v) : v \in M\}$ linear unabhängig in L_0.

c) Es existiert ein $u \in I$ so, dass $T_u(M)$ linear unabhängig in L_0 ist.

S. 3.2 zeigt zudem, dass sich die Bestimmung einer beliebigen Lösung des inhomogenen Systems $x' = A(t)x + b(t)$ auf die Bestimmung einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und einer Basis des Lösungsraumes L_0 der zugehörigen inhomogenen Gleichung reduziert.

Wir befassen uns zunächst mit homogenen Gleichungen (und schreiben wieder φ statt φ_0).

Beispiel 3.4 (vgl. B. 2.13.2) Wir betrachten $I = (0, \infty)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1/t^2 \\ -1/t^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (t \in (0, \infty)).$$

und damit das homogene System

$$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/t^2 \\ -1/t^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A(t)\, x\,.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$T_{1/\pi}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi\Big(t, 1/\pi, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} \cos(1/t) \\ \sin(1/t) \end{pmatrix} \qquad (t \in (0, \infty))$$

und

$$T_{1/\pi}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \varphi\Big(t, 1/\pi, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix}-\sin(1/t)\\\cos(1/t)\end{pmatrix} \qquad (t>0)$$

gilt. Da $\binom{-1}{0}$ und $\binom{0}{-1}$ in $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind, sind auch $T_{1/\pi}\binom{-1}{0}, T_{1/\pi}\binom{0}{-1}$ linear unabhängig und damit eine Basis von L_0, also ein Fundamentalsystem der linearen Gleichung.

Bemerkung und Definition 3.5 1. Sind $\psi_1, ..., \psi_d$ beliebige Lösungen von $x' = A(t)x$ auf I und ist

$$\Phi(t) := (\psi_1, \dots, \psi_d)(t) = \begin{pmatrix} \psi_{1,1}(t) & \dots & \psi_{1,d}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{d,1}(t) & \dots & \psi_{d,d}(t) \end{pmatrix},$$

wobei $\psi_{j,k}$ die j-te Komponentenfunktion von ψ_k bezeichnet, so heißt für $t \in I$ die Determinante

$$W(t) := W(\psi_1, ..., \psi_d; t) := \det \Phi(t) ,$$

die **Wronski-Determinante** von $\psi_1, ..., \psi_d$ an der Stelle t. Nach B. 3.3 gilt: $\psi_1, ..., \psi_d$ ist ein Fundamentalsystem genau dann, wenn $W(u) \neq 0$ für ein $u \in I$ ist (man beachte: $\psi_k = \varphi_0(\cdot, u, \psi_k(u))$). Außerdem ist in diesem Falle schon $W(u) \neq 0$ für alle $u \in I$. Also: Entweder ist $W(u) \neq 0$ für alle $u \in I$ oder $W(u) \equiv 0$ auf I.
2. Bilden $\psi_1, ..., \psi_d$ ein Fundamentalsystem, so heißt die Funktion $\Phi : I \to \mathbb{K}^{d\times d}$ eine **Fundamentalmatrix** der Gleichung $x' = A(t)x$.

Satz 3.6 *Ist Φ eine Fundamentalmatrix von $x' = A(t)x$, so gilt für alle $(u, v) \in I \times \mathbb{K}^d$*

$$\varphi(t, u, v) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(u) \cdot v \qquad (t \in I)$$

d. h. die allgemeine Lösung der Gleichung ergibt sich als Produkt der matrixwertigen Funktion Φ mit dem Vektor $\Phi^{-1}(u)v$.

Beweis. Nach B./D. 3.5 ist $\Phi(u)$ für alle $u \in I$ invertierbar (da $W(u) = \det \Phi(u) \neq 0$). Für jedes $v \in \mathbb{K}^d$ ist $\psi := \Phi\Phi^{-1}(u)v$ eine Linearkombination der Funktionen $\psi_1, ..., \psi_d$, also eine Lösung von $x' = A(t)x$. Außerdem gilt

$$\psi(u) = \Phi(u)\Phi^{-1}(u)v = v ,$$

d. h. auch die Anfangsbedingung ist erfüllt. Folglich ist $\psi = \varphi(\cdot, u, v)$. □

Beispiel 3.7 Es sei A wie in B. 3.4. Dann ist mit $\psi_1 := T_{1/\pi}\binom{-1}{0}$ und $\psi_2 := T_{1/\pi}\binom{0}{-1}$

$$\Phi = (\psi_1, \psi_2) = \begin{pmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(1/\cdot) & -\sin(1/\cdot) \\ \sin(1/\cdot) & \cos(1/\cdot) \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix. Speziell gilt

$$\Phi(1/\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit auch

$$\Phi^{-1}(1/\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems $x' = A(t)x$, $x(1/\pi) = (v_1, v_2)^\top$ gegeben durch

$$\varphi(t, 1/\pi, v) = \Phi(t)\begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1\cos(1/t) + v_2\sin(1/t) \\ -v_1\sin(1/t) - v_2\cos(1/t) \end{pmatrix} = -v_1\psi_1(t) - v_2\psi_2(t)\,.$$

Wir betrachten nun sehr spezielle lineare Systeme, für die wir in gewisser Weise explizite Fundamentalsystme angeben können. Es sei

$$x'(t) = Ax(t)\,, \tag{3.4}$$

wobei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ eine feste Matrix ist (also unabhängig von t). Eine solche Gleichung heißt **lineares System mit konstanten Koeffizienten**.

Wir erweitern zunächst einige zentrale Begriffe der Analysis in für das Weitere geeigneter Weise. Dazu sei $(E, ||\cdot||)$ ein Banachraum (über $\mathbb{K}$).

- Sind $U \subset \mathbb{K}$ und $f : U \to E$, so heißt f differenzierbar an $a \in U$, falls a Häufungspunkt von U ist und
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) =: f'(a)$$
existiert. Außerdem definiert man Differenzierbarkeit auf einer Teilmenge und höhere Ableitungen wie im skalaren Fall.

- Ist (c_k) eine Folge in E so, dass die Folge (s_n) mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$ konvergent in E ist, so spricht man von Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ und setzt
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k\,.$$
Dabei gilt: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} ||c_k|| < \infty$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent, d. h. absolute Konvergenz impliziert Konvergenz.

  Denn: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass
$$\sum_{k=n+1}^{m} ||c_k|| < \varepsilon \qquad (m > n \geq N_\varepsilon)\,.$$

Also folgt für $m > n \geq N_\varepsilon$

$$||s_m - s_n|| = ||\sum_{k=n+1}^{m} c_k|| \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||c_k|| < \varepsilon\,.$$

Damit ist (s_n) eine Cauchy-Folge in E. Da $(E, d_{||\cdot||})$ vollständig ist, konvergiert (s_n).

- Ist (c_k) eine Folge in E, so heißt

$$R := \sup\{|h| : h \in \mathbb{K} \text{ so, dass } \sum_{k=0}^{\infty} h^k c_k \text{ konvergiert}\}$$

Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} h^k c_k$. Die Reihe ist dann absolut konvergent für alle h mit $|h| < R$. Ist $a \in \mathbb{K}$ und ist $f : U_R(a) \to E$ definiert durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^k c_k,$$

so ist f (sogar beliebig oft) differenzierbar auf $U_R(a)$ mit

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^k (k+1) c_{k+1}\,.$$

- Es sei nun $(E, ||\cdot||)$ spezieller eine (unitäre) Banachalgebra, d. h. es existiert zusätzlich eine Abbildung $\cdot : E \times E \to E$ so, dass $(E, +, \cdot)$ ein Ring ist und dass zudem für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $A, B \in E$ gilt

$$\lambda(A \cdot B) = \lambda A \cdot B = A \cdot \lambda B \quad \text{und} \quad ||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||.$$

Dann ist für jede konvergente Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k$ in E und $A \in E$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A \cdot C_k = A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot A = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} C_k\Big) \cdot A\,,$$

Denn:

$$||A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k - \sum_{k=0}^{n} A \cdot C_k|| \leq ||A|| \cdot ||\sum_{k=0}^{\infty} C_k - \sum_{k=0}^{n} C_k|| \to 0 \quad (n \to \infty)\,,$$

also $\sum\limits_{k=0}^{n} A \cdot C_k \to A \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k$.
Entsprechend argumentiert man im Falle der zweiten Gleichheit.

- In Banachalgebren ist A^k (mit $A^0 := 1_E$) für $A \in E$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert. Ist $C_k = A^k/k!$, so folgt aus $||A^k|| \leq ||A||^k$, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} h^k C_k$ den Konvergenzradius ∞ hat. Definiert man

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad (A \in E),$$

so gilt für festes $A \in E$ und $u \in \mathbb{R}$ nach obigen Bemerkungen

$$(e^{(\cdot - u)A})' = A \cdot e^{(\cdot - u)A} = e^{(\cdot - u)A} \cdot A.$$

- Vertauschen $A, B \in E$, gilt also $AB = BA$, so sieht man wie im skalaren Fall: Aus der Gültigkeit der binomischen Formel

$$(A+B)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} A^\nu B^{n-\nu}$$

ergibt sich (durch Cauchy-Produktbildung) die Funktionalgleichung

$$e^A e^B = e^{A+B} .$$

Insbesondere gilt damit $e^{(x+y)A} = e^{xA} e^{yA}$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ und $e^A e^{-A} = e^0 = 1_E$, d. h. e^A ist stets invertierbar mit

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Wichtig zu beachten: Die Gleichung $e^A e^B = e^{A+B}$ gilt nicht für beliebige $A, B \in E$ ([Ü]).

Wir betrachten im Weiteren meist $E = \mathbb{K}^{d \times d}$ versehen mit der Operatornorm. Man kann leicht zeigen (siehe Analysis und Lineare Algebra), dass $(\mathbb{K}^{d \times d}, ||\cdot||)$ eine Banachalgebra ist. Dabei ist das Einselement 1_E die d-dimensionale Einheitsmatrix $I = I_d$. Die Nützlichkeit der obigen Betrachtungen belegt folgender

Satz 3.8 *Es seien $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$ und $u \in \mathbb{R}$. Dann ist für alle $v \in \mathbb{K}^d$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$x'(t) = Ax(t) , \qquad x(u) = v$$

gegeben durch

$$\varphi(t, u, v) = e^{(t-u)A} \cdot v \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

Außerdem ist $t \mapsto e^{(t-u)A}$ eine Fundamentalmatrix für (3.4).

Beweis. Es gilt

$$(e^{(\cdot - u)A} \cdot v)' = (e^{(\cdot - u)A})' \cdot v = Ae^{(\cdot - u)A} \cdot v ,$$

auf $\mathbb{R}$, d. h. $t \mapsto e^{(t-u)A} \cdot v$ ist Lösung von (3.4). Außerdem ist

$$e^{(u-u)A} \cdot v = e^{0A} \cdot v = I_d v = v .$$

Also ist $\varphi(\cdot, u, v) = e^{(\cdot - u)A} \cdot v$.
Wählt man speziell $v = e_k$, wobei e_k den k-ten Einheitsvektor bezeichnet, so ist $e^{(t-u)A} \cdot e_k$ die k-te Spalte von $e^{(t-u)A}$, d. h. jede Spalte ist Lösung von (3.4). Da $e^{0A} = I_d$ gilt, sind die Spalten nach B. 3.3 linear unabhängig. Folglich ist $e^{(\cdot - u)A} e_1, ..., e^{(\cdot - u)A} e_d$ ein Fundamentalsystem, d.h. $e^{(\cdot - u)A}$ eine Fundamentalmatrix. □

Im Prinzip haben wir also Fundamentalmatrizen für (3.4) gefunden (nämlich etwa e^{tA}). Es stellt sich allerdings dabei die Frage, wie man e^A „konkret“ berechnen kann. Dazu versucht man, die Berechnung von e^A für allgemeines A auf die Berechnung von e^B für gewisse einfache Matrizen B zurück zu führen. Wir zeigen dazu zunächst:

Satz 3.9 *Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$.*

1. *Sind A und B ähnlich, so sind auch e^A und e^B ähnlich. Genauer gilt: Ist C invertierbar mit $A = CBC^{-1}$, so ist*
$$e^A = e^{CBC^{-1}} = Ce^BC^{-1}\,.$$

2. *Hat A Blockdiagonalform*
$$A = \mathrm{diag}(A_1, ..., A_m) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{A_m} \end{pmatrix},$$
mit $A_k \in \mathbb{K}^{d_k\times d_k}$ für $k = 1, \ldots, m$, so gilt
$$e^A = \mathrm{diag}(e^{A_1}, ..., e^{A_m})\,.$$

Beweis. 1. Per Induktion sieht man, dass
$$(CBC^{-1})^\nu = CB^\nu C^{-1} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0).$$
gilt. Also erhalten wir
$$Ce^BC^{-1} = C\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}B^\nu\right)C^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}CB^\nu C = e^{CBC^{-1}}\,.$$
2. Ist $A = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_m)$, so ist nach Definition der Matrixmultiplikation auch
$$A^\nu = \mathrm{diag}(A_1^\nu, \ldots, A_m^\nu)$$
für $\nu \in \mathbb{N}_0$. Damit ergibt sich 2. aus der Tatsache, dass für beliebige Matrizen $A_\nu = (a_{jk}^{(\nu)})$ Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} A_\nu$ in $\mathbb{K}^{d\times d}$ gleichbedeutend mit der Konvergenz aller Reihen $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{jk}^{(\nu)}$ in $\mathbb{K}$ ist, und dass dann $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} A_\nu = \left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{jk}^{(\nu)}\right)$ gilt. □

Bemerkung 3.10 Es sei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ diagonalisierbar, d. h. es existieren (nicht notwendig paarweise verschiedene) Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_d$ von A und eine Basis $c_1, \dots, c_d$ aus zugehörigen Eigenvektoren. Dann ist mit $\Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_d)$ und $C := (c_1, \dots, c_d)$

$$A = C\Lambda C^{-1}$$

Also ist mit S. 3.9

$$e^{tA} = Ce^{t\Lambda}C^{-1} = C \cdot \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_d t})C^{-1} .$$

Dann ist aber auch ([Ü])

$$e^{tA}C = C \cdot \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_d t}) = \left(e^{\lambda_1 t}c_1, \dots, e^{\lambda_d t}c_d\right)$$

eine Fundamentalmatrix.

Beispiel 3.11 1. Wir betrachten das lineare System

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = Ax\,.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

also haben wir die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -2$. Weiter rechnet man nach, dass $c_1 = (1,0,1)^\top$ und $c_2 = (0,1,1)^\top$ (linear unabhängige) Eigenvektoren zu 1 sind, und dass $c_3 = (-1,-1,1)^\top$ Eigenvektor zu -2 ist. Also ist mit $C = (c_1, c_2, c_3)$ nach B. 3.10

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ein Fundamentalystem. Außerdem folgt aus

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

damit

$$\begin{aligned} e^{tA} = Ce^{t\Lambda}C^{-1} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^t & -e^t & e^t \\ -e^t & 2e^t & e^t \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^t + e^{-2t} & -e^t + e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ -e^t + e^{-2t} & 2e^t + e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ e^t - e^{-2t} & e^t - e^{-2t} & 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Wir betrachten das lineare System

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = Ax\,.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1)\,,$$

also haben wir (in $\mathbb{C}$) die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$. Zugehörige Eigenvektoren sind $c_1 = (1,0,0)^\top$, $c_2 = (3-4i, i, 1)^\top$ und $c_3 = \overline{c_2}$. Damit bilden etwa

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 3-4i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 3+4i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von $x' = Ax$ (als Gleichung in $\mathbb{C}$ betrachtet). Ein reelles Fundamentalsystem erhält man, indem man die zweite und dritte Lösung $e^{(1\pm i)t}c_2$ und $e^{(1-i)t}\overline{c_2}$ durch $\mathrm{Re}(e^{(1+i)t}c_2)$ und $\mathrm{Im}(e^{(1+i)t}c_2)$ ersetzt ([Ü]). Außerdem folgt aus

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3-4i & 3+4i \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \\ 0 & i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

hier

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 3-4i & 3+4i \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \\ 0 & i/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 4e^t - 4e^t\cos t + 3e^t \sin t & -3e^t + 3e^t\cos t + 4e^t \sin t \\ 0 & e^t \cos t & -e^t \sin t \\ 0 & e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schwieriger wird die Berechnung eines Fundamentalsystems natürlich dann, wenn A nicht diagonalisierbar ist. Wir definieren für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $r \in \mathbb{N}$ die **Jordan-Matrix** $J(\lambda) \in \mathbb{K}^{r\times r}$ durch

$$J(\lambda) := J_r(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ O & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{r\times r}$$

falls $r > 1$ und $J(\lambda) := J_1(\lambda) := (\lambda)$ für $r = 1$. Aus der Linearen Algebra verwenden wir, dass jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ (die natürlich auch rein reelle Einträge haben kann) ähnlich zu einer Blockdiagonalmatrix der Form

$$B = \operatorname{diag}(J_{r_1}(\lambda_1), \ldots, J_{r_m}(\lambda_m))$$

ist, also $A = CBC^{-1}$ für eine Matrix C mit $\det(C) \neq 0$ gilt. Dabei ist die Darstellung eindeutig bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke. Nach S. 3.9 reduziert sich die Berechnung der Matrix e^{tA} auf die Berechnung der Matrizen C, C^{-1} sowie $e^{tJ_{r_k}(\lambda_k)}$ für $k = 1, ..., m$. Aus Sicht der Analysis stellt sich damit insbesondere die Frage nach der Berechnung von $e^{tJ(\lambda)}$ für $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir schreiben kurz

$$N := N_r := J_r(0)$$

Dann ist $J(\lambda) = \lambda I + N$.

Satz 3.12 *Ist $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist $e^{tJ(\lambda)} = e^{\lambda t} e^{tN}$ mit*

$$e^{tN} = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} t^\nu N^\nu = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & O & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Man rechnet nach, dass

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & O & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, N^{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & O & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

und $N^\nu = 0$ für $\nu \geq r$ gilt. Hieraus folgt

$$e^{tN} = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} t^\nu N^\nu = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Da λI und N vertauschen, gilt zudem $e^{tJ(\lambda)} = e^{t\lambda I}e^{tN} = e^{t\lambda}Ie^{tN} = e^{t\lambda}e^{tN}$. □

Beispiel 3.13 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

also $A = \operatorname{diag}(J_2(-1), J_1(2))$. Dann ist

$$e^{tA} = \operatorname{diag}(e^{tJ_2(-1)}, e^{tJ_1(2)}) = \operatorname{diag}(e^{-t}e^{tN_2}, e^{2t}e^{tN_1}) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Mit S. 3.12 und den vorangegangenen Überlegungen ergibt sich folgendes Ergebnis über die Struktur des Lösungsraumes von $x'(t) = Ax(t)$.

Satz 3.14 *Es sei* $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ *mit* $A = C\operatorname{diag}\big(J_{r_1}(\lambda_1), \ldots, J_{r_m}(\lambda_m)\big)C^{-1}$. *Dann ist für* $k = 1, \ldots, m$ *und* $\ell = 1, \ldots, r_k$ *mit* $s_k := \sum\limits_{j=1}^{k-1} r_j$ *die* $(\ell + s_k)$*-te Spalte* $e^{tA}Ce_{\ell+s_k}$ *der Fundamentalmatrix* $e^{tA}C$ *von der Form*

$$e^{tA}Ce_{\ell+s_k} = e^{\lambda_k t}P^{(k,\ell)}(t),$$

wobei die Funktionen $P^{(k,\ell)}$ *Polynome vom Grad* $\leq \ell - 1$ *mit Koeffizienten in* $\mathbb{C}^d$ *sind.*[2]

Beweis. Da e^{tA} eine Fundamentalmatrix ist, ist auch $e^{tA}C$ eine Fundamentalmatrix ([Ü]). Mit $C = (c_1, \ldots, c_d)$ ist

$$e^{tA}C = (c_1, \ldots, c_{r_1}, c_{1+r_1}, \ldots, c_{r_2+r_1}, \ldots, c_d) \cdot \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}e^{tN_{r_1}}, ..., e^{\lambda_m t}e^{tN_{r_m}}).$$

Die ersten r_1 Spalten haben die Form

$$e^{\lambda_1 t}c_1, e^{\lambda_1 t}(tc_1 + c_2), \ldots, e^{\lambda_1 t}\Big(\frac{t^{r_1-1}}{(r_1-1)!}c_1 + \frac{t^{r_1-2}}{(r_1-2)!}c_2 + \cdots + c_{r_1}\Big)$$

und (falls $m > 1$) für $k = 2, \ldots, m$ die Spalten $1 + s_k, \ldots, r_k + s_k$ entsprechend mit $e^{\lambda_k t}$ und $c_{1+s_k}, \ldots, c_{r_k+s_k}$. □

Wir kommen zum Abschluss des Abschnitts zurück zum inhomogenen System (3.1). Für $v \in \mathbb{K}^d$ gilt

$$\varphi_b(\cdot, u, v) = \varphi_0(\cdot, u, v) + \varphi_b(\cdot, u, 0)$$

[2] Genauer ist $P^{(k,\ell)}(t) = \sum\limits_{\mu=1}^{\ell} \frac{t^{\ell-\mu}}{(\ell-\mu)!}Ce_{\mu+s_k}$.

und nach S. 3.6 ist dabei $\varphi_0(\cdot, u, v) = \Phi(\cdot)\Phi^{-1}(u)v$, wobei $\Phi(\cdot)$ eine beliebige Fundamentalmatrix ist. Auch die spezielle Lösung $\varphi_b(\cdot, u, 0)$ der inhomogenen Gleichung lässt sich aus $\Phi(\cdot)$ per Integration bestimmen:

Satz 3.15 ***(Variation der Konstanten)***
Es sei $\Phi(\cdot)$ eine Fundamentalmatrix von (3.2). Dann ist für $u \in I$

$$\varphi_b(t, u, 0) = \Phi(t) \int_u^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds \qquad (t \in I).$$

Beweis. Da Φ eine Fundamentalmatirix ist, gilt $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ für $t \in I$ ([Ü]). Mit $\psi(t) := \Phi(t) \int_u^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds$ ergibt sich nach der Produktregel für matrixwertige Funktionen ([Ü]) dem Hauptsatz über Integralfunktionen

$$\psi'(t) = \Phi'(t) \int_u^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) = A(t)\Phi(t) \int_u^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + b(t)$$

für $t \in I$. Also ist ψ Lösung von (3.1) auf I mit $\psi(u) = 0$, d. h. $\psi = \varphi_b(\cdot, u, 0)$. □

Beispiel 3.16 Wir betrachten wieder A aus B. 3.7. Ferner sei

$$b(t) = \begin{pmatrix} -1/t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t > 0)\,.$$

Dann ist für $u = 1/\pi$ mit Φ aus B. 3.7 nach S. 3.15

$$\varphi_b\Big(t, 1/\pi, 0\Big) = \Phi(t) \int_{1/\pi}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\,.$$

Weiter gilt

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(1/t) & \sin(1/t) \\ -\sin(1/t) & \cos(1/t) \end{pmatrix},$$

also

$$\int_{1/\pi}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds = \int_{1/\pi}^t \begin{pmatrix} -\cos(1/s)/s^2 \\ \sin(1/s)/s^2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ \cos(1/t) + 1 \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$\Phi(t) \int_{1/\pi}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds = \begin{pmatrix} \cos(1/t) & -\sin(1/t) \\ \sin(1/t) & \cos(1/t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ \cos(1/t) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(1/t) \\ 1 + \cos(1/t) \end{pmatrix}.$$

4 Lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung

Wir wollen nun die Ergebnisse des letzten Abschnitts auf lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung anwenden: Sind $a_0, a_1, ..., a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetig, so heißt eine Gleichung der Form

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} + b(t) \tag{4.1}$$

eine **(skalare) lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung**. Die Gleichung

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} \tag{4.2}$$

heißt **zugehörige homogene** Gleichung. Entsprechende Anfangswertprobleme sind von der Form

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} + b(t), \qquad x^{(k)}(u) = v_k \quad (k = 0, ..., n-1) \tag{4.3}$$

mit $u \in I, v := (v_0, ..., v_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.
In B. 1.11 hatten wir gesehen, dass man solche Gleichungen bzw. Anfangswertprobleme in Systeme 1. Ordnung umschreiben kann. Hier ist das entsprechende System

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

linear.

Bemerkung 4.1 Nach B. 1.11 lassen sich sämliche Ergebnisse über Lösungen des Systems (4.4) in Ergebnisse über die Lösungen von (4.1) übertragen. Insbesondere erhalten wir aus S. 3.1: Für jedes $(u, v) \in I \times \mathbb{K}^n$ hat das Anfangswertproblem (4.3) genau eine Lösung auf I und jede weitere Lösung ist Einschränkung dieser Lösung. Wir schreiben für diese (maximale) Lösung wieder

$$\varphi(\cdot; u; v_0, ..., v_{n-1}) = \varphi(\cdot, u, v)$$

und auch φ_b statt φ, falls die Abhängigkeit von b hervorgehoben werden soll. Damit gilt $\varphi_b(\cdot, u, v) = \varphi_b(\cdot, u, 0) + \varphi_0(\cdot, u, v)$ für $(u, v) \in I \times \mathbb{K}^n$.

Um eine S. 3.2, B./D. 3.5 und S. 3.15 entsprechende Aussage über die Lösungsgesamtheit machen zu können, unterscheiden wir auch wieder

$$M_0 := \{\psi : \psi \text{ löst (4.2) auf } I\} \quad \text{und} \quad M_b := \{\psi : \psi \text{ löst (4.1) auf } I\}.$$

Die wesentlichen Ergebnisse sind im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 4.2 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a_0, a_1, ..., a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetig.*

1. *M_0 ist ein n-dimensionaler Unterraum von $C(I, \mathbb{K})$ und für $u \in I$ gilt*

$$M_0 = \{\varphi_0(\cdot, u, v) : v = (v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\}.$$

   *Eine Basis von M_0 heißt wieder ein **Fundamentalsystem** der homogenen Gleichung.*

2. *Für jedes $\psi_b \in M_b$ ist $M_b = \psi_b + M_0$.*

3. *Sind $\psi_1, ..., \psi_n \in M_0$, so sind $\psi_1, ..., \psi_n$ genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die **Wronski-Determinante** $W(u) := \det \Phi(u)$, wobei*

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \psi_1(t) & \ldots & \ldots & \psi_n(t) \\ \psi_1'(t) & \ldots & \ldots & \psi_n'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \ldots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

   für ein $u \in I$ nicht verschwindet. In diesem Fall ist schon $W(u) \neq 0$ für alle $u \in I$.

4. *(Variation der Konstanten) Ist $\psi_1, ..., \psi_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, so ist mit*

$$W_j(s) := \det \begin{pmatrix} \psi_1 & \ldots & \psi_{j-1} & \psi_{j+1} & \ldots & \psi_n \\ \psi_1' & & \psi_{j-1}' & \psi_{j+1}' & & \psi_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_1^{(n-2)} & \ldots & \psi_{j-1}^{(n-2)} & \psi_{j+1}^{(n-2)} & \ldots & \psi_n^{(n-2)} \end{pmatrix} (s) .$$

   für jedes $u \in I$ [3]

$$\varphi_b(t, u, 0) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t)(-1)^{n+j} \int_u^t \frac{b(s)W_j(s)}{W(s)} ds \qquad (t \in I). \tag{4.5}$$

Beweis. Wir bezeichnen die Lösungsmenge des linearen Systems(4.4) wieder mit L_b. Die ersten drei Aussagen ergeben sich alle aus den entsprechenden Ergebnissen für (4.4) durch Anwendung der bijektiven (!) und im Falle $b = 0$ linearen Abbildung $j = j_b : M_b \to L_b$ mit

$$j(\psi) = (\psi, \psi', ..., \psi^{(n-1)})^\top \qquad (\psi \in M_b) .$$

[3] Diese Darstellung erklärt den Namen „Variation der Konstanten“: Während jede Lösung der homogenen Gleichung von der Form $\sum_{j=1}^n \lambda_j \psi_j(t)$ ist (also Linearkombination der $\psi_1, ..., \psi_n$), ist hier

$$\varphi_b(t, u, 0) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \psi_j(t) ,$$

also Linearkombination der $\psi_1(t), ..., \psi_n(t)$ mit Koeffizienten $\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t)$, die mit t variieren.

Zur 4. Aussage: Da $(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ die erste Zeile von $\Phi(t)$ und die Inhomogenität hier $b(t)e_n$ ist, folgt aus S. 3.15

$$\varphi_b(t,u,0) = \big(\psi_1(t), ..., \psi_n(t)\big) \cdot \int\limits_u^t b(s)\Phi^{-1}(s)e_n \, ds \qquad (t \in I).$$

Um die letzte Spalte $\Phi^{-1}(s)e_n$ von $\Phi^{-1}(s)$ zu bestimmen hat man hat das lineare Gleichungssystem

$$\Phi(s) \begin{pmatrix} c_1(s) \\ \vdots \\ c_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Man erhält hier aus der Cramerschen Regel

$$\begin{aligned} c_j(s) &= \frac{1}{\det \Phi(s)} \det \begin{pmatrix} \psi_1 & \ldots & \psi_{j-1} & 0 & \psi_{j+1} & \ldots & \psi_n \\ \psi_1' & & \psi_{j-1}' & 0 & \psi_{j+1}' & & \psi_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)} & \ldots & \psi_{j-1}^{(n-1)} & 1 & \psi_{j+1}^{(n-1)} & \ldots & \psi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} (s) \\ &= \frac{1}{W(s)}(-1)^{n+j} W_j(s)\,. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.3 (**harmonischer Oszillator**) Für $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nennt man die lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$x'' + x = b(t)$$

Gleichung des harmonischen Oszillators mit Anregung b. Man rechnet sofort nach, dass

$$\psi_1(t) = e^{it}\,, \qquad \psi_2(t) = e^{-it} \qquad\qquad (t \in \mathbb{R})$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $x'' + x = 0$ ist. Also erhalten wir mit

$$\begin{aligned} W(t) &= \det \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ e^{-it} & -e^{-it} \end{pmatrix} = -2i \\ W_1(t) &= \det(e^{-it}) = e^{-it}, \qquad W_2(t) = \det(e^{it}) = e^{it} \end{aligned}$$

für den **Resonanzfall** $b(t) := e^{it}$ nach (4.5) die spezielle Lösung $\psi_b := \varphi_b(\cdot; 0; 0, 0)$ als

$$\psi_b(t) = -e^{it} \int\limits_0^t \frac{e^{is}e^{-is}}{-2i} ds + e^{-it} \int\limits_0^t \frac{e^{is}e^{is}}{-2i} ds = \frac{1}{2i}\Big(e^{it}t - e^{-it}\frac{e^{2is}}{2i}\Big|_0^t\Big) = \frac{1}{2i}(te^{it} - \sin t)\,.$$

Damit ergibt sich für $\cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it}) = \mathrm{Re}(b(t))$ auch

$$\varphi_{\mathrm{Re}(b)}(t; 0; 0, 0) = \mathrm{Re}\,\psi_b(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(te^{it} - \sin t) = \frac{t}{2}\sin t.$$

Wieder zeigen die obigen Ergebnisse, dass es von zentraler Bedeutung ist, Fundamentalsysteme zu finden. Wie bei linearen Systemen stößt man hier sehr schnell an Grenzen.
Kennt man – woher auch immer – bereits eine nichtverschwindende Lösung einer linearen Differenzialgleichung der Ordnung n, so lässt sich dies nutzen, um weitere Lösungen aus einer linearen Differenzialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung zu bestimmen. Man spricht dann von Reduktion der Ordnung. Wir beschränken uns bei der Darstellung dieses Ansatzes auf den Fall $n = 2$.

Satz 4.4 ***(Reduktion der Ordnung)***
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und es seien $a_0, a_1 : I \to \mathbb{K}$ stetig. Weiter seien $J \subset I$ ein offenes Intervall und (φ, J) eine Lösung der Differenzialgleichung

$$x'' = a_1(t)x' + a_0(t)x$$

mit $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Ist $\psi : J \to \mathbb{K}$ eine nichtkonstante Stammfunktion einer Lösung der linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung $x' = a(t)x$ mit

$$a(t) := a_1(t) - 2\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \qquad (t \in J),$$

so bilden $\varphi, \psi\varphi$ ein Fundamentalsytem der Ausgangsgleichung auf J.

Beweis. Mit $\varphi'' = a_1\varphi' + a_0\varphi$ und $\psi'' = (a_1 - 2\varphi'/\varphi)\psi'$ erhält man

$$(\psi\varphi)'' - a_1(\psi\varphi)' - a_0\psi\varphi = \psi''\varphi + 2\psi'\varphi' + \varphi''\psi - a_1\psi'\varphi - a_1\psi\varphi' - a_0\psi\varphi = 0\,,$$

d. h. $\psi\varphi$ ist ebenfalls Lösung (auf J). Da ψ nicht konstant auf J ist sind φ und $\psi\varphi$ linear unabhängig. □

Beispiel 4.5 Wir betrachten die lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$x'' = \frac{2t}{1-t^2}x' - \frac{2}{1-t^2}x$$

auf $I = (-1, 1)$. Man sieht sofort, dass durch $\varphi(t) := t$ eine Lösung auf $(-1, 1)$ gegeben ist. Also erhalten wir nach S. 4.4 eine zweite, linear unabhängige Lösung $\psi\varphi$ etwa auf $J = (0, 1)$, falls $\psi' \neq 0$ eine Lösung von $x' = a(t)x$ mit

$$a(t) = a_1(t) - 2\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{2t}{1-t^2} - \frac{2}{t}$$

ist. Da durch

$$\alpha(t) := -\ln((1-t^2) - 2\ln(t) = \ln\left(\frac{1}{1-t^2}\right) + 2\ln\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (t \in (0,1))$$

eine Stammfunktion zu a auf J gegeben ist, löst

$$x(t) := e^{\alpha(t)} = \frac{1}{(1-t^2)t^2} \qquad (t \in (0,1))$$

die Gleichung $x' = a(t)x$. Wegen

$$\frac{1}{(1-t^2)t^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\Big) + \frac{1}{t^2}$$

ist durch

$$\psi(t) := \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) - \frac{1}{t} \qquad (t \in (0,1))$$

eine Stammfunktion zu x gegeben. Folglich bilden $t \mapsto t, t \mapsto \psi(t)t$ ein Fundamentalsystem der Ausgangsgleichung (zunächst auf $(0,1)$, aber tatsächlich auch auf $(-1,1)$).

Im manchen Fällen ist es möglich, Lösungen einer Differenzialgleichung durch einen sogenannten Potenzreihenansatz zu gewinnen. Wir erläutern die zu Grunde liegende Idee wieder nur für den Fall linearer Differenzialgleichungen 2. Ordnung.

Satz 4.6 *Es seien $r > 0$ und*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k\,, \qquad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$$

Potenzreihen mit Konvergenzradius $\geq r$. Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit

$$(k+1)(k-p_0)a_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} (j\,p_{k+1-j} + q_{k-j})a_j \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

und hat auch die Potenzreihe $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ einen Konvergenzradius $\geq r$, so ist

$$z\varphi''(z) = p(z)\varphi'(z) + q(z)\varphi(z) \qquad (|z| < r)$$

und damit insbesondere φ eine Lösung der Differenzialgleichung $x'' = (p(t)/t)x' + (q(t)/t)x$ auf $(0,r)$ und auf $(-r,0)$.

Beweis. Für $|z| < r$ gilt

$$\varphi'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} z^k$$

und

$$\varphi''(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k a_{k+1} z^{k-1}\,.$$

Also erhalten wir mit Hilfe des Cauchy-Produktes für $|z| < r$

$$\begin{aligned}
p(z)\varphi'(z) + q(z)\varphi(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}z^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Big(\sum_{j=0(-1)}^{k} (j+1)a_{j+1}p_{k-j}\Big) + \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=0}^{k} q_{k-j}a_j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Big((k+1)p_0 a_{k+1} + \sum_{j=0}^{k}(j\, p_{k+1-j} + q_{k-j})a_j\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)k\, a_{k+1}z^k = z\varphi''(z).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.7 Gilt $p_0 \notin \mathbb{N}_0$, so ergeben sich mit beliebigem Startwert $a_0 \in \mathbb{K}$ die weiteren Koeffizienten rekursiv aus

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k-p_0)} \sum_{j=0}^{k}(j\, p_{k+1-j} + q_{k-j})a_j \tag{4.6}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Gilt $p_0 = q_0 = 0$, so kann man auch den Wert $a_1 \in \mathbb{K}$ wählen und (4.6) gilt dann für $k \in \mathbb{N}$.
Man kann beweisen, dass die Potenzreihe φ stets einen Konvergenzradius $\geq r$ hat (falls dies für p und q gilt). Wir verzichten auf den mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln etwas aufwändigen Beweis. In den Beispielen ist die Konvergenz typischerweise direkt zu sehen.

Beispiel 4.8 Wir betrachten für feste $a, b \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$x'' = \frac{t-b}{t}x' + \frac{a}{t}x$$

(Kummersche Differenzialgleichung). Hier ist

$$p(t) = t - b, \qquad q(t) = a\,,$$

d. h. $p_0 = -b$, $p_1 = 1$, $p_k = 0$ für $k \geq 2$ sowie $q_0 = a$, $q_k = 0$ für $k \geq 1$. Im Falle $-b \notin \mathbb{N}_0$ ergibt die Rekursionsformel (4.6)

$$a_{k+1} = \frac{k+a}{(k+1)(k+b)} \cdot a_k \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Wählen wir $a_0 = 1$, so ergibt sich

$$a_1 = \frac{a}{b}, \quad a_2 = \frac{(1+a)a}{2(1+b)b}, \quad a_3 = \frac{(2+a)(1+a)a}{3!(2+b)(1+b)b}, \quad \ldots\,.$$

also mit $(c)_k := c(c+1)\dots(c+k-1)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $(c)_0 := 1$

$$M(a,b,z) := \varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

Die Potenzreihe konvergiert auf $\mathbb{C}$ (warum?). Die Funktion M heißt **Kummer-Funktion** oder auch **konfluente hypergeometrische Funktion**.

Wie im Abschnitt vorher wollen wir uns auch hier gesondert mit (skalaren) linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschäftigen: Es seien $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Dann heißt eine Gleichung der Form

$$x^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = 0 \tag{4.7}$$

eine **(homogene) lineare Differenzialgleichung $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**. Im Prinzip kann man zur Berechnung eines Fundamentalsystems auf $\mathbb{R}$ so vorgehen, dass man die Matrix e^{tA} für das entsprechende lineare System (4.4) mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

bestimmt. Dann ist die erste Zeile von e^{tA} ein Fundamentalsystem (vgl. S. 4.2). Wir wollen hier jedoch eine direkte Methode herleiten, die auf folgender Idee beruht:
Es seien $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$ ein Polynom vom Grad n und I ein Intervall. Dann ist die (lineare) Abbildung $P(D) : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ definiert durch

$$P(D)\varphi := \sum_{k=0}^{n} p_k D^k \varphi,$$

wobei $D^k\varphi := \varphi^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $D^0\varphi = \varphi$. Für das **charakteristische Polynom** P von (4.7), definiert durch

$$P(z) := z^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k,$$

also $p_k = -a_k$ für $k = 0, \dots, n-1$ und $p_n = 1$ gilt damit: $\varphi \in C^\infty(I)$ ist Lösung von (4.7) auf I genau dann, wenn $P(D)\varphi = 0$ auf I.

Bemerkung 4.9 1. Es seien $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$ und $Q(z) = \sum\limits_{j=0}^{m} q_j z^j$ Polynome vom Grad n bzw. m. Dann gilt

$$P(D) \circ Q(D) = (P \cdot Q)(D).$$

Denn: Für $\varphi \in C^\infty(I)$ ist

$$\begin{aligned}\big(P(D) \circ Q(D)\big)\varphi &= \sum_{k=0}^{n} p_k D^k \,\big(Q(D)\varphi\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_k q_j D^{k+j}\varphi = (P \cdot Q)(D)\varphi.\end{aligned}$$

Insbesondere vertauschen damit $P(D)$ und $Q(D)$.
2. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt: Ist $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad n mit führendem Koeffizienten 1, so ist

$$P(z) = \prod_{\lambda \in Z(P)} (z-\lambda)^{\alpha(\lambda)} \qquad (z \in \mathbb{C}) \qquad \text{mit} \qquad \sum_{\lambda \in Z(P)} \alpha(\lambda) = n\,,$$

wobei $Z(P)$ die Menge der Nullstellen von P und $\alpha(\lambda)$ die Ordnung der Nullstelle λ bezeichnet. Nach 1. gilt mit $\mathrm{id} := \mathrm{id}_{C^\infty(I)} = D^0$

$$P(D) = \prod_{\lambda \in Z(P)} (D - \lambda\,\mathrm{id})^{\alpha(\lambda)}.$$

3. Sind λ, μ in $\mathbb{C}$ und ist $e_\lambda(t) := e^{\lambda t}$ für $t \in \mathbb{R}$, so gilt für $g \in C^\infty(I)$

$$(D - \mu\,\mathrm{id})(e_\lambda g) = e_\lambda \cdot ((\lambda-\mu)g + Dg),$$

also insbesondere $(D - \lambda\,\mathrm{id})(e_\lambda g) = e_\lambda Dg$.

Satz 4.10 *Es seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $P(z) = z^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$. Dann ist durch*

$$t \mapsto e^{\lambda t} t^\ell \qquad (\lambda \in Z(P); \ell = 0, \dots, \alpha(\lambda)-1)$$

ein Fundamentalsystem von (4.7) auf $\mathbb{R}$ gegeben.

Beweis. 1. Für $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $g_\ell(t) := t^\ell$. Sind $\ell \in L_\lambda := \{0, \dots, \alpha(\lambda)-1\}$ und $\lambda \in Z(P)$, so folgt aus B. 4.9.3 (induktiv angewandt)

$$(D - \lambda\,\mathrm{id})^{\alpha(\lambda)}(e_\lambda g_\ell) = e_\lambda D^{\alpha(\lambda)} g_\ell = 0.$$

Damit ist nach B. 4.9.2 auch $P(D)(e_\lambda g_\ell) = 0$. Also sind die Funktionen $e_\lambda g_\ell$ für $\ell \in L_\lambda$ und $\lambda \in Z(P)$ Lösungen von (4.7) auf $\mathbb{R}$.
2. Da der Lösungsraum M_0 von (4.7) n-dimensional ist und da $\sum_{\lambda \in Z(P)} \alpha(\lambda) = n$ gilt, reicht es, zu zeigen: $\{g_\ell\, e_\lambda : \ell \in L_\lambda, \lambda \in Z(P)\}$ ist linear unabhängig (in $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). Dazu seien $c_{\lambda,\ell} \in \mathbb{C}$ mit

$$0 = \sum_{\lambda \in Z(P)} \sum_{\ell \in L_\lambda} c_{\lambda,\ell}\, g_\ell\, e_\lambda \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Wir haben zu zeigen: $c_{\lambda,\ell} = 0$ für $\lambda \in Z(P), \ell \in L_\lambda$. Es gilt mit $Q_\lambda = \sum_{\ell \in L_\lambda} c_{\lambda,\ell} g_\ell$ für $\lambda \in Z(P)$

$$0 = \sum_{\lambda \in Z(P)} e_\lambda Q_\lambda \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der g_ℓ reicht es also, zu zeigen: $Q_\lambda = 0$ für $\lambda \in Z(P)$. Es sei dazu $\lambda \in Z(P)$ fest. Ist

$$P_\lambda(z) = P(z)/(z-\lambda)^{\alpha(\lambda)} = \prod_{Z(P) \ni \mu \neq \lambda} (z-\mu)^{\alpha(\mu)} ,$$

so folgt $P_\lambda(D)(e_\mu Q_\mu) = 0$ für $\mu \in Z(P)$, $\mu \neq \lambda$ aus 1. (angewandt auf P_λ statt P) und damit

$$0 = P_\lambda(D)0 = P_\lambda(D)(\sum_{\mu \in Z(P)} e_\mu Q_\mu) = P_\lambda(D)(e_\lambda Q_\lambda) .$$

Ist Q ein Polynom vom Grad d, so gilt $(D - \mu\,\mathrm{id})(e_\lambda Q) = e_\lambda \cdot ((\lambda-\mu)Q + DQ)$ für $\mu \neq \lambda$, wobei $(\lambda-\mu)Q + DQ$ wieder ein Polynom vom Grad d ist (beachte: DQ hat Grad $< d$ falls $Q \neq 0$). Nach B. 4.9.2 ist folglich

$$0 = P_\lambda(D)(e_\lambda Q_\lambda) = e_\lambda R$$

mit einem Polynom R vom gleichen Grad wie Q_λ. Aus $e_\lambda R = 0$ folgt $R = 0$, also $\deg(R) = -\infty$ und damit auch $\deg(Q_\lambda) = -\infty$, d. h. $Q_\lambda = 0$. □

Bemerkung 4.11 Ist P reell, d. h. sind $a_0, \ldots, a_{n-1}$ reell und ist $\lambda = \mu + i\sigma$ eine nichtreelle α-fache Nullstelle von P, so ist auch $\overline{\lambda} = \mu - i\sigma$ eine α-fache Nullstelle von P. In diesem Fall haben wir also die 2α Lösungen

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} t^\ell &= e^{\mu t} e^{i\sigma t} t^\ell \\ e^{\overline{\lambda} t} t^\ell &= e^{\mu t} e^{-i\sigma t} t^\ell \end{aligned} \qquad (\ell = 0, ..., \alpha - 1) .$$

Ein reelles Fundamentalsystem erhält man dann, indem man für alle solchen Nullstellen diese Lösungen ersetzt durch ([Ü])

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(e^{\lambda t} t^\ell) &= e^{\mu t} \cos(\sigma t) t^\ell \\ \mathrm{Im}(e^{\lambda t} t^\ell) &= e^{\mu t} \sin(\sigma t) t^\ell \end{aligned} \qquad (\ell = 0, ..., \alpha - 1) .$$

Beispiel 4.12 Wir betrachten noch einmal B. **??** mit $k = m = 1$. Dort hatten wir für Y die (inhomogene) lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$Y''(t) + (1-c)Y'(t) + a\ell Y(t) = a\bar{M}$$

hergeleitet. Mit $s := 1 - c$ gilt für das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung

$$P(z) = z^2 + sz + a\ell ,$$

also $P(\lambda) = 0$ genau dann, wenn

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -s/2 \pm \sqrt{s^2/4 - a\ell}\,, & \text{falls } s^2/4 - a\ell \geq 0 \\ -s/2 \pm i\sqrt{a\ell - s^2/4}\,, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Nach S. 4.10 und B. 4.11 ist

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t}\,, &\quad \text{falls} \quad s^2/4 - a\ell > 0 \\ e^{-st/2},\ te^{-st/2}\,, &\quad \text{falls} \quad s^2/4 - a\ell = 0 \\ e^{-st/2}\cos(\sigma t),\ e^{-st/2}\sin(\sigma t)\,, &\quad \text{falls} \quad \sigma^2 := a\ell - s^2/4 > 0 \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung. Da in allen Fällen $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ gilt, konvergieren sämtliche auftretenden Exponentialfunktionen gegen 0 für $t \to \infty$. Offensichtlich ist

$$Y_b(t) = \bar{M}/\ell$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Daher würde nach diesem Modell das Einkommen $Y(t)$ sich stets (also für beliebige Anfangswerte) für $t \to \infty$ der Konstante $\bar{M}/\ell$ annähern, d. h. ist $\bar{M}$ (Geldangebot) groß und ℓ (Verhältnis von Geldnachfrage zu Einkommen) klein, so wird das Einkommen im Zeitverlauf groß werden – die Philosophie der EZB in den vergangenen Jahren.

5 Stabilität und Abhängigkeit von Anfangswerten

Ein wesentlicher Untersuchungsgegenstand bei Differenzialgleichungen ist die Frage nach dem Verhalten von Lösungen wenn t sich einem der Randpunkte des maximalen Lösungsintervalls nähert. Wir beschränken uns ab nun auf **autonome Systeme**, also Differenzialgleichungen der Form

$$x' = g(x),$$

wobei $G \subset \mathbb{K}^d$ offen und $g \in C(G, \mathbb{K}^d)$ ist (d. h. hier ist $f(t,x) = g(x)$ auf $D = \mathbb{R} \times G$). Ist g lokal Lipschitz-stetig auf G, d. h. existieren für alle $v \in G$ eine Umgebung U von v in G und ein $L = L(U) \geq 0$ mit

$$\left|g(x) - g(y)\right| \leq L|x - y| \qquad (x, y \in U),$$

so existiert nach S. 2.11 genau eine maximale Lösung $\varphi(\cdot, 0, v) =: \varphi(\cdot, v)$ des Anfangswertproblems

$$x' = g(x), \qquad x(0) = v \in G$$

auf $I(0, v) =: I(v)$ (bei autonomen Gleichungen kann man sich auf den Fall $u = 0$ beschränken, da sich die Lösung für allgemeines u durch eine Verschiebung im Argument aus dem Spezialfall ergibt, d. h. $\varphi(t, u, v) = \varphi(t - u, 0, v)$ für $t - u \in I(v)$).

Wir betrachten zunächst sehr speziell lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten. Hier interessiert also das Verhalten für $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$. Wir beschränken uns auf den Fall $t \to \infty$. Als Anwendung von S. 3.14 erhalten wir

Satz 5.1 *Es sei $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$, $\sigma(A) := \{\lambda : \lambda$ Eigenwert von $A\}$ und $s(A) := \max \mathrm{Re}(\sigma(A))$.*

1. *Ist $\mu > s(A)$, so existiert ein $M > 0$ mit $||e^{tA}|| \leq Me^{\mu t}$ für $t \geq 0$.*
2. *(**Stabilitätskriterium**) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   a) *Es existieren $M, \alpha > 0$ mit $||e^{tA}|| \leq Me^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$.*
   b) *für alle Lösungen ψ von (3.4) gilt $\psi(t) \to 0$ $(t \to \infty)$.*
   c) *$s(A) < 0$.*

Beweis. 1. Zunächst ergibt sich für beliebge Matrizen $B \in \mathbb{K}^{d\times d}$ für $x = \sum\limits_{j=1}^{d} x_j e_j$ mit $|x| \leq 1$

$$|Bx| \leq \sum_{j=1}^{d} |x_j| \cdot |Be_j| \leq \sum_{j=1}^{d} |Be_j|,$$

also $||B|| \leq \sum\limits_{j=1}^{d} |Be_j|$. Nach S. 3.14 ist die j-te Spalte $e^{tA}Ce_j$ von $e^{tA}C$ von der Form $t \mapsto e^{\lambda_j t}P_j(t)$ mit $\lambda_j \in \sigma(A)$ und einem Polynom P_j. Da exponentielles Wachstum polynomiales

„schlägt“, existiert eine Konstante $M_j > 0$ mit $|P_j(t)| \leq M_j e^{(\mu - \mathrm{Re}\lambda_j)t}$ für $t \geq 0$. Also folgt

$$||e^{tA}|| \leq ||e^{tA}C|| \cdot ||C^{-1}|| \leq |C^{-1}|| \cdot \sum_{j=1}^{d} |e^{tA}Ce_j| \leq e^{\mu t}||C^{-1}|| \sum_{j=1}^{d} M_j \; .$$

2. a) $\Rightarrow$ b): Ist $\psi(0) = v$, so ist $\psi(t) = \varphi_0(t, v) = e^{tA}v$, also $|\psi(t)| \leq ||e^{tA}|| \cdot |v| \to 0$ $(t \to \infty)$.
b) $\Rightarrow$ c): Angenommen, es existiert ein Eigenwert λ von A mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Ist $c \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor, so ist $\psi(t) = e^{\lambda t}c$ eine Lösung von (3.4) mit $|\psi(t)| = e^{t\mathrm{Re}\lambda}|c| \geq |c|$ für alle $t \geq 0$. Widerspruch zu $\psi(t) \to 0$ für $t \to \infty$.
c) $\Rightarrow$ a): Aus 1. folgt $||e^{tA}|| \leq Me^{ts(A)/2}$ für $t \geq 0$. Also ist $\alpha := -s(A)/2$ geeignet. $\square$

Bemerkung 5.2 Hat man ein (inhomogenes) lineares System mit konstanter Koeffizientenmatrix A, also

$$x' = Ax + b(t)$$

mit $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$ und $b : I \to \mathbb{K}^d$ stetig, so erhält man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung nach S. 3.15 durch

$$\varphi_b(t, u, 0) = e^{tA} \int_u^t e^{-sA} b(s) ds \; .$$

Ist auch die rechte Seite b unabhängig von t, also $b(t) = b$ auf $I = \mathbb{R}$, so ist die Gleichung autonom und man erhält dabei, falls A invertierbar ist,

$$\varphi_b(t, 0) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA}\, ds \cdot b = e^{tA}(-e^{-tA}A^{-1}b + A^{-1}b) = e^{tA}A^{-1}b - A^{-1}b \; .$$

Ist also $s(A) < 0$, so gilt $\varphi_b(t, 0) \to -A^{-1}b$ $(t \to \infty)$ und damit für alle $v \in \mathbb{K}^d$ auch

$$\varphi_b(t, v) = e^{tA}v + \varphi_b(t, 0) \to -A^{-1}b \quad (t \to \infty).$$

Beispiel 5.3 Wir betrachten das lineare System aus B. **??** mit $k = m = 1$ (vgl. auch B. 4.12), d. h.

$$\begin{pmatrix} Y' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & -a \\ \ell & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ -\overline{M} \end{pmatrix}$$

(mit Konstanten $s := 1 - c, a, a_0, \ell, \overline{M} > 0$). Es gilt

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-s - \lambda)(-\lambda) + a\ell = \lambda^2 + s\lambda + a\ell$$

wie in B. 4.12. Daher gilt auch hier in allen Fällen

$$\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0 \, .$$

Folglich konvergieren nach S. 5.1 alle Lösungen der homogenen Gleichung gegen 0 für $t \to \infty$ (mit exponentieller Geschwindigkeit). Außerdem gilt $||e^{tA}|| \to 0$ für $t \to \infty$. Also erhalten wir mit B. 5.2 für alle Lösungen (Y, r) der inhomogenen Gleichung

$$\begin{pmatrix} Y(t) \\ r(t) \end{pmatrix} \to -A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & -1/\ell \\ 1/a & s/(\ell a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ -\overline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{M}/\ell \\ (a_0\ell - s\overline{M})/(\ell a) \end{pmatrix} \; (t \to \infty)\,.$$

Wir betrachten jetzt wieder nichtlineare Gleichungen und schreiben $I(v) =: (t^-(v), t^+(v))$, d. h. $t^-(v) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ bzw. $t^+(v) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sind linker bzw. rechter Randpunkt von $I(v)$.

Bemerkung und Definition 5.4 Sind $g \in C(G, \mathbb{K}^d)$ und $v^* \in G$ mit $g(v^*) = 0$, so ist $\varphi(t, v^*) = v^*$ für $t \in I(v^*) = \mathbb{R}$. Nullstellen von g nennen wir auch **stationäre Punkte** der Gleichung $x' = g(x)$. Entsprechend heißen die konstanten Lösungen **stationär** oder **trivial**. Weiter heißt v^*

1. **attraktiv**, falls ein $\delta > 0$ so existiert, dass $t^+(v) = \infty$ und $\varphi(t, v) \to v^*$ für $t \to \infty$ und $v \in U_\delta(v^*)$ gilt,
2. **stabil**, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass $t^+(v) = \infty$ und $\varphi(t, v) \in U_\varepsilon(v^*)$ für alle $v \in U_\delta(v^*), t \geq 0$,
3. **asymptotisch stabil**, falls v^* attraktiv und stabil ist.

Bezeichnet Jg die Jacobi-Matrix von g, so gilt folgendes zentrale Ergebnis.

Satz 5.5 ***(linearisierte asymptotische Stabilität)***
Es sei $G \subset \mathbb{R}^d$ offen, $g \in C^1(G, \mathbb{R}^d)$. Ferner sei v^* ein stationärer Punkt von $x' = g(x)$ mit

$$s(Jg(v^*)) < 0.$$

Ist $0 < \alpha < -s(Jg(v^*))$, so existieren eine Umgebung U von v^* und ein $M \geq 0$ so, dass für alle $v \in U$ gilt: $t^+(v) = \infty$ und

$$|\varphi(t, v) - v^*| \leq M|v - v^*|e^{-\alpha t} \tag{5.1}$$

für $t \geq 0$. Insbesondere ist v^* asymptotisch stabil.

Beweis. 1. Ohne Einschränkung sei $v^* = 0$. Wir setzen $A := Jg(0)$. Da g differenzierbar an $v^* = 0$ ist, gilt

$$g(x) = A \cdot x + r(x)$$

mit $r(x)/|x| \to 0$ $(x \to 0)$. Es sei $\delta > 0$ so, dass $\alpha + \delta < -s(A)$, also $\mu := -(\alpha + \delta) > s(A)$. Nach S. 5.1 existiert ein $M > 0$ mit

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{\mu t} \qquad (t \geq 0)\,.$$

Wir setzen $c := \delta/M$. Dann existiert ein $\rho > 0$ mit $U_\rho(0) \subset G$ und

$$|r(x)| < c|x| \qquad (|x| < \rho).$$

Für $v \in U_\rho(0)$ definieren wir

$$\tau(v) := \sup\big\{t \in \big[0, t^+(v)\big) : \big|\varphi(s,v)\big| < \rho \text{ für alle } s \in [0,t)\big\}$$

und zeigen anschließend in Beweisschritt 2.: Ist $v \in U_\rho(0)$, so gilt (5.1) für $t \in [0, \tau(v))$. Dann folgt insbesondere $\big|\varphi(t,v)\big| \leq M|v|$ für alle $t \in \big[0, \tau(v)\big)$. Ist also

$$v \in U := U_{\rho/(2M+1)}(0) \subset U_\rho(0),$$

so ist $\big|\varphi(t,v)\big| \leq \rho/2$ für $t \in [0, \tau(v))$. Hieraus folgt $\tau(v) = t^+(v)$ (denn sonst wäre $\big|\varphi(\tau(v),v)\big| \geq \rho$, was der Stetigkeit von $\varphi(\cdot, v)$ an $\tau(v)$ widerspräche). Da $B_{\rho/2}(0) \subset G$ kompakt ist, ergibt sich aus dem globalen Satz von Picard-Lindelöf (S. 2.11) mit $D = \mathbb{R} \times G$ dann auch $\tau(v) = t^+(v) = \infty$. Also gilt (5.1) für alle $v \in U$ und $t \in [0, \infty)$.
2. Da $\varphi(\cdot, v)$ Lösung von $x' = g(x) = Ax + r(x)$ ist, gilt

$$\varphi'(t,v) = A\varphi(t,v) + r\big(\varphi(t,v)\big) \qquad \big(t \in I(v)\big).$$

Also ist $\varphi(\cdot, v)$ Lösung des *linearen* Systems $x' = Ax + b(t)$ mit $b(t) := r\big(\varphi(t,v)\big)$ für $t \in I(v)$. Damit ergibt sich nach B. 5.2 (also Variation der Konstanten)

$$\varphi(t,v) = \varphi_0(t,v) + \varphi_b(t,0) = e^{tA}v + \int_0^t e^{(t-s)A} r\big(\varphi(s,v)\big)ds \qquad \big(t \in I(v)\big).$$

Aus 1. folgt für $t \in \big[0, \tau(v)\big)$

$$\big|\varphi(t,v)\big| \leq \|e^{tA}\| \cdot |v| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\| \big|r(\varphi((s,v))\big|\, ds \leq e^{\mu t}\Big(M|v| + Mc \int_0^t e^{-\mu s}\big|\varphi(s,v)\big|\, ds\Big),$$

d. h. mit $\psi(t) := e^{-\mu t}\big|\varphi(t,v)\big|$ und $Mc = \delta$

$$\psi(t) \leq M|v| + \delta \int_0^t \psi(s)\, ds \qquad \big(t \in \big[0, \tau(v)\big)\big).$$

Mit dem Gronwall-Lemma (S. 2.14) erhält man

$$e^{(\alpha+\delta)t}\big|\varphi(t,v)\big| = \psi(t) \leq M|v|e^{\delta t} \qquad \big(t \in \big[0, \tau(v)\big)\big)$$

und damit auch (5.1) für $t \in [0, \tau(v))$. $\square$

Beispiel 5.6 1. (logistische Gleichung; vgl. B 1.7.2) Es sei $G = \mathbb{R}$ und $g(x) = x(1-x)$. Hier sind 0 und 1 die stationären Punkte. Dabei gilt

$$g'(0) = 1, \qquad g'(1) = -1.$$

Also ist $v^* = 1$ nach S. 5.5 asymptotisch stabil. Genauer gilt: Die maximale Lösung des Anfangswertproblems $x' = x(1-x)$, $x(0) = v \in \mathbb{R}$, ist gegeben durch

$$\varphi(t,v) = \frac{v}{v + e^{-t}(1-v)} \qquad \big(t \in I(v)\big),$$

wobei

$$I(v) = \big(t^-(v), t^+(v)\big) = \begin{cases} \Big(\log(1-1/v), \infty\Big), \ v > 1 \\ \mathbb{R}, \ v \in [0,1] \\ \Big(-\infty, \log(1-1/v)\Big), \ v < 0\,. \end{cases} .$$

Man sieht: Für alle $v \in U := (0,\infty)$ gilt hier $t^+(v) = \infty$ und $\varphi(t,v) \to 1$ $(t \to \infty)$ mit exponentieller Geschwindigkeit.

2. (**gedämpfte Schwingung**) Wir betrachten die Gleichung

$$x'' + 2ax' + \omega^2 \sin x = 0$$

mit $\omega, a > 0$ (a ist der sogenannte Dämpfungsparameter). Nach B. 1.11 kann man alternativ das System

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 \sin x_1 - 2ax_2 \end{pmatrix}$$

betrachten. Hier sind $v_m := (m\pi, 0)$ für $m \in \mathbb{Z}$ die stationären Punkte. Weiter ist

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x_1 & -2a \end{pmatrix},$$

also

$$Jg(v_m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(-1)^m \omega^2 & -2a \end{pmatrix}$$

und damit $P(\lambda) = \det(Jg(v_m) - \lambda I) = \lambda^2 + 2a\lambda + (-1)^m \omega^2$. Also gilt für die Eigenwerte im Falle m gerade

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -a \pm \sqrt{a^2 - \omega^2} & , \text{ falls } a \geq \omega\,, \\ \\ -a \pm i\sqrt{\omega^2 - a^2} & , \text{ falls } \omega > a \end{cases}$$

und im Falle m ungerade

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + \omega^2}.$$

Für m gerade ist $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$, also v_m asymptotisch stabil nach S. 5.5.

Der folgende Satz zeigt, dass die Lösungen (autonomer) Differenzialgleichungen stetig von den Anfangswerten abhängen.

Satz 5.7 *Es seien $G \subset \mathbb{K}^d$ offen und $g : G \to \mathbb{K}^d$ lokal Lipschitz-stetig. Dann ist*

$$\Omega := \bigcup_{v \in G} (I(v) \times \{v\}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$$

offen und die Abbildung $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}^d$ ist stetig.

Beweis. 1. Es seien $K \subset G$ kompakt und $L = L(K)$ eine entsprechende Lipschitz-Konstante. Weiter sei J ein Intervall mit $0 \in J$ und Länge $|L|$. Sind $x, y \in G$ mit $J \subset I(x) \cap I(y)$ sowie $\varphi(J, x) \cup \varphi(J, y) \subset K$, so gilt für $0 < t \in J$ mit der Integraldarstellung aus S. 2.5

$$\big|\varphi(t,x) - \varphi(t,y)\big| \le |x-y| + \int_0^t \big|g\big(\varphi(s,x)\big) - g\big(\varphi(s,y)\big)\big|\, ds \le |x-y| + L\int_0^t \big|\varphi(s,x) - \varphi(s,y)\big|\, ds\,.$$

Mit dem Gronwall-Lemma (S. 2.14), angewandt auf $\psi(t) := \big|\varphi(t,x) - \varphi(t,y)\big|$, folgt

$$\big|\varphi(t,x) - \varphi(t,y)\big| \le |x-y| \le e^{L|J|} \quad (0 < t \in J)$$

Durch eine entsprechende Überlegung sieht man, dass die Abschätzung auch für negative $t \in J$ gilt.

2. Es sei $(u, v) \in \Omega$ gegeben, wobei wir zunächst $u \ge 0$ voraussetzen. Ist $\alpha > 0$ mit $J := [0, u + \alpha] \subset I(v)$, so ist $\varphi(J, v) \subset G$ kompakt, also (mit $\eta := 1$ für $G = \mathbb{K}^d$)

$$\eta := \mathrm{dist}\big(\varphi(J,v), \partial G\big)/2 > 0$$

und damit $K := \{w \in \mathbb{K}^d : \mathrm{dist}(w, \varphi(J,v)) \le \eta\} \subset G$ kompakt. Sind $L = L(K)$ und $\delta := \eta e^{-L(u+\alpha)}$, so gilt $[0, u+\alpha] \subset I(x)$ für alle $x \in B_\delta(v)$ nach 1. und dem globalen Satz von Picard-Lindelöf (wäre $t^+(x) \le u + \alpha$, so wäre $\varphi(t,x) \in K$ für alle $0 \le t \in I(x)$). Damit ist

$$[0, u+\alpha] \times B_\delta(v) \subset \Omega$$

und es gilt für $(t, x) \in [0, u+\alpha] \times B_\delta(v)$

$$\begin{aligned} \big|\varphi(t,x) - \varphi(u,v)\big| &\le \big|\varphi(t,x) - \varphi(t,v)\big| + \big|\varphi(t,v) - \varphi(u,v)\big| \\ &\le |x-v|\, e^{L(u+\alpha)} + \big|\varphi(t,v) - \varphi(u,v)\big| \to 0 \quad ((t,x) \to (u,v)). \end{aligned}$$

Mit entsprechender Argumentation kann man zeigen, dass im Falle $u \le 0$

$$[u-\alpha, 0] \times B_\delta(v) \subset \Omega$$

für geeignete $\alpha > 0$ und $\delta > 0$ gilt. Insbesondere ist damit Ω offen. Außerdem gilt für $(t,x) \in [u-\alpha, 0] \times B_\delta(v)$ dann wie oben

$$\varphi(t,x) \to \varphi(u,v) \quad ((t,x) \to (u,v)).$$

Damit ist φ stetig auf Ω. □

Bemerkung 5.8 Man kann zeigen, dass die Abhängigkeit vom Anfangswert v bei glattem g auch glatt ist. Setzt man $\partial_2\varphi(t,v) = J(\varphi(t,\cdot))(v)$, so gilt genauer:
Ist $g \in C^1(G, \mathbb{R}^d)$, so existiert $\partial_2\varphi(t,v)$ für alle $(t,v) \in \Omega$ und $\partial_2\varphi(\cdot,v)$ ist Lösung des (Matrix-)Anfangswertproblems

$$X' = Jg\big(\varphi(t,v)\big) \cdot X, \qquad X(0) = I_d$$

mit Parameter v. Einen Beweis findet man etwa in dem Lehrbuch *gewöhnliche Differentialgleichungen* von B. Aulbach (Spektrum Verlag, Heidelberg, 1997).

6 Mannigfaltigkeiten

Im Zusammenhang mit partiellen Differenzialgleichungen, also Differenzialgleichungen, bei denen partielle Ableitungen auftauchen, spielen Integralsätze eine wesentliche Rolle. Auch wenn wir nicht auf die Theorie partieller Differenzialgleichungen eingehen, werden wir eine kurze Einführung in Mannigfaltigkeiten und Integralsätze geben.

Definition 6.1 Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $d \geq k$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ heißt ***k*-dimensionale Untermannigfaltigkeit** (von $\mathbb{R}^d$), wenn es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ von a und eine Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{d-k})$ gibt[4] mit

1. $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$,
2. a ist eine reguläre Stelle von f (d. h. die lineare Abbildung $f'(a)$ ist surjektiv bzw. die Jacobi-Matrix $Jf(a)$ hat vollen Rang $d-k$).

Ist speziell $k = d-1$, also $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, so heißt M **Hyperfläche** in $\mathbb{R}^d$.

Beispiel 6.2 1. Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^2 - 1$. Dann ist

$$\mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = 0\},$$

die $(d-1)$-dimensionale **Einheitssphäre**. Wegen $\nabla f(x) = 2x \neq 0$ für $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ sind alle $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ reguläre Stellen von f, also $\mathbb{S}^{d-1}$ eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$.
2. Für $0 < r < R$ sei $f : R^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) := (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x_1^2 + x_2^2)$$

Dann heißt

$$M = M_{r,R} := \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 = r^2\}$$

ein (2-dimensionaler) **Torus**. M ist eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^3$ ([Ü]).

Bemerkung 6.3 1. Sind $S \subset \mathbb{R}^k$ offen und $g \in C^1(S, \mathbb{R}^{d-k})$, so ist

$$\operatorname{graph}(g) = \big\{(s, g(s)) : s \in S\big\}$$

eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$.

> Denn: Betrachtet man $f : U := S \times \mathbb{R}^{d-k} \to \mathbb{R}^{d-k}$ mit $f(x) = f(s, y) = y - g(s)$, wobei $x = (s, y)$ mit $s \in S$, $y \in \mathbb{R}^{d-k}$, so ist $\operatorname{graph}(g) = \{x \in U : f(x) = 0\}$ und $Jf(x) = (-Jg(s), I_{d-k})$ hat vollen Rang $d-k$ für alle $x \in U$.

[4]Dabei ist $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ der Nullraum.

2. Nicht jede Untermannigfaltigkeit der Dimension k ist Graph *einer* Funktion von k reellen Variablen (etwa $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 0\}$), aber es gilt trotzdem folgende lokale Aussage, nichts anderes als eine Interpretation des Hauptsatzes über implizite Funktionen darstellt: Sind $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$, so gibt es nach eventueller „Umnummerierung der Koordinaten“ $s = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$, $y = (x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(d)})$ mit einer Permutation σ von $\{1, \ldots, d\}$ (so gewählt, dass $\det(Jf(s, \cdot)(a)) \neq 0$ gilt) offene Umgebungen V von b und W von c, wobei $a = (b, c)$, und eine Funktion $g \in C^1(V, \mathbb{R}^{d-k})$ mit

$$M \cap (V \times W) = \big\{\big(s, g(s)\big) : s \in V\big\}.$$

Definition 6.4 1. Es seien $S \subset \mathbb{R}^k$ offen und $d \geq k$. Dann heißt eine Abbildung $\varphi \in C^1(S, \mathbb{R}^d)$ eine **Immersion**, falls $\varphi'(s)$ injektiv für alle $s \in S$ ist, also $J\varphi(s)$ für alle s vollen Rang ($= k$) hat.
2. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt **topologisch**, falls φ bijektiv ist und φ sowie φ^{-1} stetig sind. Man nennt dann φ auch einen **Homöomorphismus** von X nach Y. Sind dabei $X, Y \subset \mathbb{R}^k$ offen, so heißt φ ein **Diffeomorphismus**, falls zusätzlich φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind. In diesem Falle sind nach der Kettenregel $\varphi'(x)$ und $(\varphi^{-1})'(y)$ für alle $x \in X$ bzw. $y \in Y$ bijektiv ([Ü]). Nach dem Hauptsatz über lokale Umkehrbarkeit impliziert die Bijektivität von $\varphi'(x)$ für alle x schon die von $\varphi^{-1}(y)$ für alle y.

Beispiel 6.5 1. (Polarkoordinaten) Es sei $S = \mathbb{R}$. Dann ist durch

$$\varphi(t) := (\cos t, \sin t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

wegen $\varphi'(t) \neq 0$ für alle t eine Immersion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert mit $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$. Man beachte, dass φ nicht injektiv ist, dass aber für jedes $\beta \in \mathbb{R}$ eine offene Umgebung V von β so existiert, dass $\varphi : V \to \varphi(V) =: M$ ein Homöomorphismus ist, nämlich etwa $V = (\beta - \pi, \beta + \pi)$. In diesem Fall unterscheiden sich M und $\mathbb{S}^1$ durch einen Punkt.
2. (Kugelkoordinaten; sphärische Polarkoordinaten) Es sei $\varphi : S = \mathbb{R} \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(s, t) = \begin{pmatrix} \cos s \cdot \sin t \\ \sin s \cdot \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \big((s, t) \in S\big).$$

Hier ist

$$J\varphi(s, t) = \begin{pmatrix} -\sin s \sin t & \cos s \cos t \\ \cos s \sin t & \sin s \cos t \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}.$$

Da $\sin t \neq 0$ für $t \in (0, \pi)$ ist, hat $J\varphi(s, t)$ vollen Rang (=2), d. h. φ ist eine Immersion. Es gilt dabei $\varphi(S) = \mathbb{S}^2$. Wieder ist φ nicht injektiv. Ist jedoch $(\beta, \gamma) \in S$ und betrachtet man etwa $V = (\beta - \pi, \beta + \pi) \times (0, \pi)$, so ist $\varphi : V \to \varphi(V) =: M$ ein Homöomorphismus. Dabei unterscheiden sich M und $\mathbb{S}^2$ durch einen Meridian.

Bemerkung 6.6 Es sei g wie in B. 6.3.2. Dann ist $\varphi : V \to \mathbb{R}^d$ mit $\varphi(s) := \big(s, g(s)\big)$ für $s \in V$ eine Immersion, die V bijektiv auf $M \cap (V \times W)$ abbildet. Dabei ist auch φ^{-1} als Einschränkung der Projektion $(s, y) \mapsto s$ stetig. Also ist $\varphi : V \to M \cap (V \times W)$ ein Homöomorphismus.

Satz 6.7 *Es sei $S \subset \mathbb{R}^k$ offen und es sei $\varphi : S \to \mathbb{R}^d$ eine Immersion. Dann existiert zu jedem $\beta \in S$ eine offene Umgebung V von β so, dass $\varphi_\beta : V \to \varphi(V) =: M$ mit $\varphi_\beta(s) := \varphi(s)$ für $s \in V$ ein Homöomorphismus und M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$ ist.*

Beweis. Nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten (falls nötig) können wir wieder davon ausgehen, dass φ von der Form $\varphi = (h, g)^\top$ mit $\det Jh(\beta) \neq 0$ ist, wobei $h := (\varphi_{\sigma(1)}, \dots, \varphi_{\sigma(k)})$ und $g = (\varphi_{\sigma(k+1)}, \dots, \varphi_{\sigma(d)})$ für eine Permutation σ.
Nach dem Hauptsatz über lokale Umkehrbarkeit existiert eine offene Umgebung V von β so, dass $h : V \to V' := h(V)$ ein Diffeomorphismus ist. Definiert man $\Phi : V \times \mathbb{R}^{d-k} \to V' \times \mathbb{R}^{d-k}$ durch

$$\Phi(s, u) := \begin{pmatrix} h(s) \\ g(s) + u \end{pmatrix},$$

so ist Φ ebenfalls ein Diffeomorphismus, denn zum einen sieht man leicht, dass Φ bijektiv ist, und zum anderen gilt

$$\det J\Phi(s, u) = \begin{vmatrix} Jh(s) & 0 \\ Jg(s) & I_{d-k} \end{vmatrix} = \det Jh(s) \neq 0\ .$$

Weiter folgt aus $\Phi(s, 0) = (h(s), g(s))^\top = \varphi(s)$ für $s \in V$, dass φ_β injektiv (und damit bijektiv) ist mit stetiger Umkehrfunktion, und dass $\Phi(V \times \{0\}) = \varphi(V) = \varphi_\beta(V)(= M)$ gilt. Schließlich ergibt sich für $U := V' \times \mathbb{R}^{d-k}$ und $f := (\Phi^{-1}_{k+1}, \dots, \Phi^{-1}_d)$

$$M = \Phi(V \times \{0\}) = \big\{x \in U : \Phi^{-1}_{k+1}(x) = \ldots = \Phi^{-1}_d(x) = 0\big\} = \{x \in U : f(x) = 0\}.$$

Da $J\Phi^{-1}(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist, hat für die Jacobi-Matrix

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} (\nabla\Phi^{-1}_{k+1})^T(x) \\ \vdots \\ (\nabla\Phi^{-1}_d)^T(x) \end{pmatrix}$$

vollen Rang $(= d - k)$ für alle $x \in U$. □

Satz 6.8 *Es seien $d, k \in \mathbb{N}$ mit $d \geq k$ und $M \subset \mathbb{R}^d$. Dann ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$ genau dann, wenn zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^d$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^k$ und eine topologische Immersion $\varphi : V \to M \cap U$ existieren.*

Beweis. Die Aussage $\Rightarrow$ ergibt sich aus B. 6.6 mit $U = V \times W$. Umgekehrt folgt $\Leftarrow$ aus S. 6.7, da Untermannigfaltigkeiten lokal definiert sind. $\square$

Bemerkung und Definition 6.9 Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$, so heißt jede Abbildung φ wie in S. 6.8 eine **Karte** oder auch **lokale Parameterdarstellung** von M (zum Punkt a). Es gilt dafür: Sind

$$\varphi : V_\varphi \to M \cap U_\varphi, \qquad \psi : V_\psi \to M \cap U_\psi$$

Karten mit $N := M \cap U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$, so sind $V := \varphi^{-1}(N) \subset V_\varphi$ und $W := \psi^{-1}(N) \subset V_\psi$ offen (auch in $\mathbb{R}^k$) und $\psi^{-1} \circ \varphi : V \to W$ ist ein Difffeomorphismus.

> Denn: N ist offen in M, da $M \cap U_\varphi$ und $M \cap U_\psi$ offen in M sind. Da V_φ und V_ψ offen in $\mathbb{R}^k$ sind, sind auch V, W offen in $\mathbb{R}^k$. Außerdem ist $\psi^{-1} \circ \varphi : V \to W$ als Verknüpfung injektiver Abbildungen injektiv und nach Definition auch surjektiv. Es bleibt zu zeigen, dass $\psi^{-1} \circ \varphi \in C^1(V, \mathbb{R}^k)$ ist mit invertierbarer Jacobi-Matrix $J(\psi^{-1} \circ \varphi)(s)$ für alle $s \in V$.
>
> Dazu sei $\beta \in V$ gegeben. Sind Φ zu φ und b sowie Ψ zu ψ und $(\psi^{-1} \circ \varphi)(\beta)$ wie im Beweis zu S. 6.7, so folgt: Ist U eine offene Umgebung von $\varphi(\beta)$, die in den Wertebereichen von Φ und Ψ enthalten ist, so sind $\Phi : \Phi^{-1}(U) \to U$ und $\Psi : \Psi^{-1}(U) \to U$ Difffeomorphismen. Damit ist auch $\Psi^{-1} \circ \Phi : \Phi^{-1}(U) \to \Psi^{-1}(U)$ ein Difffeomorphismus. Auf einer Umgebung von β gilt
>
> $$(\psi^{-1} \circ \varphi)(s) = ((\Psi_1^{-1}, \ldots, \Psi_k^{-1}) \circ \Phi)(s, 0)$$
>
> und
>
> $$J(\Psi^{-1} \circ \Phi)(s, 0) = \begin{pmatrix} J(\psi^{-1} \circ \varphi)(s) & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$
>
> (vgl. Beweis zu S. 6.7). Hieraus folgt, dass $\psi^{-1} \circ \varphi$ stetig differenzierbar ist und dass mit $\det J(\Psi^{-1} \circ \Phi)(\beta, 0) \neq 0$ auch $\det J(\psi^{-1} \circ \varphi)(\beta) \neq 0$ ist.

Definition 6.10 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ist $a \in M$, so heißt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ ein **Tangentialvektor** an M in a, falls ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ und eine Funktion $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$ existieren mit $\gamma(I) \subset M$, $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Die Menge

$$T_a M := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{v} \text{ Tangentialvektor an } M \text{ in } a\}$$

heißt **Tangentialraum** von M in a.

Satz 6.11 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $a \in M$. Dann gilt:*

1. *T_aM ist ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^d$.*

2. *Ist $\varphi : V \to M \cap U$ ein Karte von M mit $\varphi(\beta) = a$, so ist $(\partial\varphi/\partial s_j)(\beta)$ $(j = 1, \ldots, k)$ eine Basis von T_aM.*

3. *Sind $U \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Umgebung von a und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{d-k})$ mit $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$, so gilt*

$$\begin{aligned} T_aM &= \big\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d : (\nabla f_j)^\top(a) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (j = 1, \ldots, d-k)\big\} \\ &= \big\{\nabla f_j(a) : j = 1, \ldots, d-k\big\}^\perp \end{aligned}$$

Beweis. Wir setzen

$$T_1 := \operatorname{span}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}(\beta), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial s_k}(\beta)\right\}, \quad T_2 := \big\{\nabla f_j(a) : j = 1, \ldots, d-k\big\}^\perp$$

und zeigen $T_1 \subset T_aM \subset T_2$. Da T_1 und T_2 k-dimensional sind, folgt $T_1 = T_aM = T_2$.
$T_1 \subset T_aM$: Es sei

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial\varphi}{\partial s_j}(\beta) = J\varphi(\beta) \cdot \lambda \in T_1.$$

Ist $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\beta + t\lambda \in V$ für $|t| < \varepsilon$ gilt, so ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(t) := \varphi(\beta + t\lambda)$ stetig differenzierbar mit $\gamma(0) = \varphi(\beta) = a$ und

$$\gamma'(0) = J\varphi(\beta) \cdot \lambda = \mathbf{v}.$$

$T_aM \subset T_2$: Es sei $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(I) \subset M$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\gamma\big((-\varepsilon, \varepsilon)\big) \subset M \cap U$, also $f\big(\gamma(t)\big) = 0$ für $|t| < \varepsilon$. Mit der Kettenregel folgt

$$0 = (f_j \circ \gamma)'(0) = (\nabla f_j)^\top(a) \cdot \gamma'(0)$$

für $j = 1, \ldots, d-k$, d. h. $\gamma'(0) \in T_2$. □

Bemerkung und Definition 6.12 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für $a \in M$ setzen wir $N_aM := (T_aM)^\perp$. Die Vektoren $\mathbf{w} \in N_aM \setminus \{0\}$ heißen **Normalenvektoren** in a (bezüglich M). Ist f wie in D. 6.1, so ist $\nabla f_j(a)$ $(j = 1, \ldots, d-k)$ nach S. 6.11 eine Basis von N_aM .

Bemerkung und Definition 6.13 Eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt **glatt berandet** oder auch **C^1-berandet**, falls zu jedem $a \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ von a und ein $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ existieren mit

(i) $A \cap U = f^{-1}((-\infty, 0])$,

(ii) $\nabla f(x) \neq 0$ für $x \in U$.

Dann gilt auch

$$U \cap \partial A = f^{-1}(\{0\}).$$

Insbesondere ist ∂A eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$.

> Denn: $\subset$: Ist $x \in U \cap A$ mit $f(x) < 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x') < 0$ für $x' \in U_\delta(x)$, also $U_\delta(x) \subset A$. Damit ist $x \in A^\circ$.
> $\supset$: Ist $x \in A \cap U$ mit $f(x) = 0$, so ist $x \in \partial A$, denn sonst wäre $x \in A^\circ \cap U$ eine lokale Extremstelle von f, also $\nabla f(x) = 0$.

Satz 6.14 *Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ glatt berandet. Dann ist $\dim N_a(\partial A) = 1$ für alle $a \in \partial A$ und es gibt genau einen Vektor $\mathbf{n}(a) \in N_a(\partial A)$ mit $\big|\mathbf{n}(a)\big| = 1$ und $a + t\,\mathbf{n}(a) \notin A$ für $t > 0$ genügend klein. Außerdem ist die Abbildung $\mathbf{n} : \partial A \to \mathbb{R}^d$ stetig.*

Beweis. Da ∂A eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$ ist, ist $\dim T_a(\partial A) = d - 1$, also $\dim N_a(\partial A) = 1$ mit $N_a(\partial A) = \operatorname{span}\big\{\nabla f(a)\big\}$, falls f wie in B./D. 6.13 ist. Wir setzen

$$\mathbf{n}(a) := \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}.$$

Da $\mathbf{n}(a)$ Anstiegsrichtung und $-\mathbf{n}(a)$ Abstiegsrichtung von f ist, ist $\mathbf{n}(a)$ die einzige Richtung in $N_a(\partial A)$, die die Bedingung aus dem Satz erfüllt. Dabei ist auch $\mathbf{n}(x) = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$ für alle $x \in U \cap \partial A$ und damit ist $\mathbf{n}$ insbesondere stetig. $\square$

Definition 6.15 In der Situation von S. 6.14 nennt man $\mathbf{n}(a)$ den **äußeren Einheitsnormalenvektor** von A in a und $\mathbf{n} : \partial A \to \mathbb{R}^d$ **äußeres Einheitsnormalenfeld**.

Bemerkung 6.16 Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ glatt berandet. Ist $a \in \partial A$ und ist $g \in C^1(V, \mathbb{R})$ so, dass ∂A lokal Graph von g ist (vgl. B. 6.3; beachte $d - k = 1$ hier), d. h. ist $(s, y) = x$ nach eventueller Umnummerierung der Variablen und $(\partial A) \cap (V \times I) = \big\{(s, g(s)) : s \in V\big\}$ für $V = U_\delta(b)$ und ein offenes Intervall I mit $c \in I$, so gilt nach dem Zwischenwertsatz entweder

$$A \cap (V \times I) = \big\{(s, y) \in V \times I : y \leq g(s)\big\}$$

oder

$$A \cap (V \times I) = \big\{(s, y) \in V \times I : y \geq g(s)\big\}\ .$$

Also ist $f : U := V \times I \to \mathbb{R}^d$, $f(x) = f(s, y) = y - g(s)$ im ersten bzw. $f(x) = g(s) - y$ im zweiten Fall, wie in B./D. 6.13. Für $s \in V$ ist im ersten Fall damit

$$\mathbf{n}(s, g(s)) = \big(1 + |\nabla g(s)|^2\big)^{-1/2} \begin{pmatrix} -\nabla g(s) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und im zweiten Fall

$$\mathbf{n}(s, g(s)) = \big(1 + |\nabla g(s)|^2\big)^{-1/2} \begin{pmatrix} \nabla g(s) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7 Integrale auf Untermannigfaltigkeiten

Wir wollen nun Integrale für Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten definieren. Grundlegend für die Definition ist die mehrdimensionale Substitutionsregel für Lebesgue-Integrale; https://de.wikipedia.org/wiki/Transformationssatz:
Es seien Ω, S offen in $\mathbb{R}^k$ und $\psi : \Omega \to S$ ein Diffeomorphismus. Ist $g : S \to \mathbb{K}$, so gilt[5] $g \in \mathscr{L}(S)$ genau dann, wenn $(g \circ \psi)\,|\det J\psi| \in \mathscr{L}(\Omega)$ gilt, und in diesem Falle ist

$$\int\limits_S g = \int\limits_\Omega (g \circ \psi)\,|\det J\psi|.$$

Bemerkung und Definition 7.1 1. Es seien $S \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi \in C^1(S, \mathbb{R}^d)$. Dann ist die Matrix $(J\varphi)^\top J\varphi \in \mathbb{R}^{k\times k}$ positiv semidefinit und damit gilt (siehe Lineare Algebra): Es existiert genau eine positive semidefinite Matrix B mit $B^2 = (J\varphi)^\top J\varphi$. Wir schreiben dafür $B =: |J\varphi|$. Nach dem Determinantenmultiplikationssatz ist

$$(\det|J\varphi|)^2 = \det((J\varphi)^\top J\varphi).$$

Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\psi : \Omega \to S$ ein Diffeomorphismus, so ist zudem $|\det J\psi| = \det|J\psi|$.
2. Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit so, dass *eine* Karte (also eine topologische Immersion) $\varphi : S \to M$ existiert. Ist $f : M \to \mathbb{K}$, so sagen wir f sei **integrierbar** auf M, falls $(f \circ \varphi)\det|J\varphi| \in \mathscr{L}(S)$ gilt, und in diesem Fall heißt

$$\int\limits_M f\,d\sigma := \int\limits_S (f \circ \varphi)\det|J\varphi|$$

Oberflächenintegral von f auf M. (Wichtig dabei: Aus B./D. 6.9, der Substitutionsregel und 1. folgt, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Karte ist; [Ü].)
Ist $B \subset M$ so, dass $f1_B$ integrierbar auf M ist, so setzen wir zudem $\int_B f d\sigma := \int_M f 1_B\,d\sigma$. Schließlich heißt im Falle, dass 1_B integrierbar auf M ist,

$$\sigma(B) := \int\limits_B d\sigma = \int\limits_M 1_B d\sigma$$

Oberflächenmaß von A.

Beispiel 7.2 1. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\varphi : I \to M$ eine topologische Immersion. Dann ist $\det|J\varphi| = |\varphi'|$. Falls $1 = 1_B$ integrierbar auf M ist, gilt

$$\sigma(B) = \int\limits_B d\sigma = \int\limits_M 1_B\,d\sigma = \int\limits_I 1_{\varphi^{-1}(B)}|\varphi'|.$$

[5] $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}_1(X)$ bezeichnet die Menge der auf $X \subset \mathbb{R}^k$ Lebesgue-intergrierbaren Funktionen; https://de.wikipedia.org/wiki/Lebesgue-Integral. Ist dabei $X = I$ ein Intervall mit $\alpha = \inf I$, $\beta = \sup I$ und g stetig, so ist $\int_I g = \int_\alpha^\beta g$, wobei $\int_\alpha^\beta$ das Regel- oder Riemann-Integral bezeichnet. Einen Beweis zur Substitutionsregel findet sich etwa in J. Pöschl, Noch mehr Analysis, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2015, Abschnitt 2.3.

Ist etwa $I = (-\pi, \pi)$ und $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, so ist $M = \mathbb{S}^1 \setminus \big\{(-1, 0)\big\}$ und

$$\sigma(M) = \int\limits_{(-\pi,\pi)} (\cos^2 + \sin^2)^{1/2} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 = 2\pi.$$

2. Es seien $S = (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ und $\varphi : S \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} \cos s \cdot \sin t \\ \sin s \cdot \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \big((s,t) \in S\big).$$

Dann ist $\varphi : S \to \mathbb{S}^2 \setminus \big\{(x_1, 0, x_3) : x_1 < 0\big\} =: M$ eine topologische Immersion (vgl. B. 6.5). Hier ist

$$J\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} -\sin s \sin t & \cos s \cos t \\ \cos s \sin t & \sin s \cos t \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix},$$

also

$$((J\varphi)^\top J\varphi)(s,t) = \begin{pmatrix} \sin^2 t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit (da $\sin t > 0$ für $t \in (0, \pi)$)

$$\det |J\varphi|(s,t) = \big(\det((J\varphi)^\top J\varphi)(s,t)\big)^{1/2} = \sin t\,.$$

Also folgt mit dem Satz von Fubini (https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Fubini)

$$\sigma(M) = \int\limits_S \det |J\varphi| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin t \, dt \, ds = 4\pi.$$

3. Es seien $S \subset \mathbb{R}^{d-1}$ offen, $g \in C^1(S, \mathbb{R})$ und $\varphi : S \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $\varphi(s) := \big(s, g(s)\big)$. Dann gilt

$$J\varphi = \begin{pmatrix} I_{d-1} \\ (\nabla g)^\top \end{pmatrix},$$

also

$$(J\varphi)^\top J\varphi = (I_{d-1}, \nabla g) \begin{pmatrix} I_{d-1} \\ (\nabla g)^\top \end{pmatrix} = I_{d-1} + \nabla g \cdot (\nabla g)^\top.$$

Aus $\det(I_m + ab^\top) = 1 + a^\top b$ für $a, b \in \mathbb{R}^m$ (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_determinant_lemma) folgt

$$\det|J\varphi| = \big(\det((J\varphi)^\top J\varphi)\big)^{1/2} = (1 + |\nabla g|^2)^{1/2}\,.$$

Wir beweisen zunächst eine lokale Version des Gaußschen Integralsatzes und gehen gemäß B. 6.16 davon aus, dass $U \cap \partial A$, wobei $U = V \times I$, Graph einer Funktion $g \in C^1(V, \mathbb{R})$

ist mit $A \cap U = \{(s,y) : y \leq g(s)\}$. Hier ist $\varphi : V \to U \cap \partial A$ mit $\varphi(s) := (s, g(s))$ eine topologische Immersion. Also gilt für integrierbare f nach B. 7.2.3

$$\int\limits_{U\cap\partial A} f\,d\sigma = \int\limits_V (f\circ\varphi)\det|J\varphi| = \int\limits_V f(s,g(s))\big(1+|\nabla g(s)|^2\big)^{1/2}\,ds.$$

Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C(\Omega, \mathbb{K}^m)$, so schreiben wir $\operatorname{supp}(f)$ für den **Träger** von f, also den Abschluss der Menge $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ in Ω. Außerdem schreiben wir $C_c(\Omega)$ für die Menge aller $f \in C(\Omega)$ mit kompaktem Träger und $C_c^p(\Omega) := C^p(\Omega) \cap C_c(\Omega)$ für $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Satz 7.3 *Es seien $A \subset \mathbb{R}^d$ glatt berandet, $U = V \times I$ und g wie oben. Dann gilt für alle $f \in C_c^1(U)$*

$$\int\limits_{U\cap A} \nabla f = \int\limits_{U\cap\partial A} f\mathbf{n}\,d\sigma\ .$$

Beweis. Zunächst gilt nach B. 6.16

$$\int\limits_V (f\cdot n_k)\big(s,g(s)\big)\big(1+|\nabla g|^2\big)^{1/2}(s)\,ds = \begin{cases} -\int\limits_V f(s,g(s))\partial_k g(s)\,ds, & \text{falls } k = 1,\dots,d-1 \\ \int\limits_V f\big(s,g(s)\big)\,ds, & \text{falls } k = d \end{cases}.$$

1. Fall: $k \in \{1,\dots,d-1\}$. Wir setzen $\alpha := \inf I$ und definieren $F : U \to \mathbb{C}$ durch

$$F(s,y) = \int\limits_\alpha^y f(s,t)\,dt \qquad (s \in V, y \in I).$$

(Man beachte: Da $f \in C_c^1(U)$ ist, also $f = 0$ außerhalb einer kompakten Teilmenge von $U = V \times I$ verschwindet, ist das Integral nicht uneigentlich). Dann folgt aus dem Hauptsatz über Integralfunktionen

$$\partial_d F(s,y)\Big(=\frac{\partial F}{\partial y}(s,y)\Big) = f(s,y)$$

und mit Differenziation von Parameterintegralen (siehe Analysis)

$$\partial_k F(s,y)\Big(=\frac{\partial F}{\partial s_k}(s,y)\Big) = \int\limits_\alpha^y \partial_k f(s,t)\,dt.$$

Definiert man $h : V \to \mathbb{C}$ durch

$$h(s) := \int\limits_\alpha^{g(s)} f(s,t)\,dt \ = F(s,g(s)) \qquad (s \in V)\,,$$

so hat auch $h \in C^1(V)$ kompakten Träger. Mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ergibt sich ([Ü])

$$\int\limits_V \partial_k h = 0.$$

Weiter folgt aus der Kettenregel mit $\varphi(s) := (s, g(s))^\top$

$$\begin{aligned}\partial_k h(s) &= \partial_k (F \circ \varphi)(s) = \Big((\nabla F)^\top (\varphi(s)) \begin{pmatrix} I_{d-1} \\ (\nabla g)^\top (s) \end{pmatrix} \Big)_k \\ &= \partial_k F\big(s, g(s)\big) + \partial_d F\big(s, g(s)\big) \cdot \partial_k g(s) \\ &= \int\limits_\alpha^{g(s)} \partial_k f(s,t)\, dt + f\big(s, g(s)\big)\, \partial_k g(s).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit dem Satz von Fubini

$$\int\limits_{A\cap U} \partial_k f = \int\limits_V \int\limits_\alpha^{g(s)} \partial_k f(s,t)\, dt\, ds = \underbrace{\int\limits_V \partial_k h(s)\, ds}_{=0} - \int\limits_V f\big(s, g(s)\big)\, \partial_k g(s)\, ds = \int\limits_{U\cap\partial A} f n_k\, d\sigma\ .$$

2. Fall: $k = d$. Da für jedes $s \in V$ die Funktion $y \mapsto f(s, y)$ außerhalb einer kompakten Teilmenge von I verschwindet, folgt aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\int\limits_\alpha^{g(s)} \partial_d f(s,t)\, dt = f(s,t)\Big|_{t=\alpha}^{g(s)} = f\big(s, g(s)\big).$$

Also folgt wieder mit dem Satz von Fubini

$$\int\limits_{A\cap U} \partial_d f = \int\limits_V \int\limits_\alpha^{g(s)} \partial_d f(s,t)\, dt\, ds = \int\limits_V f\big(s, g(s)\big)\, ds = \int\limits_{U\cap\partial A} f n_d\, d\sigma$$

und damit die Behauptung auch im Fall $k = d$. □

Bemerkung und Definition 7.4 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und es sei $(U_\iota)_{\iota\in J}$ eine offene Überdeckung von M. Dann existiert aufgrund der Überdeckungskompaktheit von M eine endliche Menge $E \subset J$ so, dass $\bigcup_{\iota\in E} M \cap U_\iota = M$. Weiter existiert eine der Überdeckung $(U_\iota)_{\iota\in E}$ untergeordnete, glatte Zerlegung $(\tau_\iota)_{\iota\in E}$ der Eins auf M, d. h. eine Familie von Funktionen $\tau_\iota \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ mit folgenden Eigenschaften:[6]

- Für jedes ι ist $0 \le \tau_\iota \le 1$ und $\operatorname{supp} \tau_\iota \subset U_\iota$.
- Für jeden Punkt $x \in M$ ist $\sum\limits_{\iota\in E} \tau_\iota(x) = 1$.

[6] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Zerlegung_der_Eins. Einen Beweis der Existenz findet man wieder zum Beispiel in J. Pöschl, Noch mehr Analysis, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2015, Abschnitt 2.2.

Es sei nun $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit und $(\varphi_\iota)_{\iota \in E}$ eine endliche Familie von Karten $\varphi_\iota : V_\iota \to M \cap U_\iota$ mit $\bigcup_{\iota \in E} M \cap U_\iota = M$ (eine solche existiert aufgrund der Überdeckungskompaktheit). Wir wählen eine der Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in E}$ von M untergeordnete, glatte Zerlegung $(\tau_\iota)_{\iota \in E}$ der Eins. Ist $f : M \to \mathbb{K}$ so dass, $f\tau_\iota$ für alle $\iota \in E$ integrierbar auf $M \cap U_\iota$ ist, so heißt f **integrierbar auf** M und

$$\int\limits_M f\, d\sigma := \sum_{\iota \in E} \int\limits_{M \cap U_\iota} f\tau_\iota\, d\sigma$$

Oberflächenintegral von f auf M. (Wichtig dabei: Man kann man zeigen, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Zerlegung der Eins ist.) Ist $f1_B$ für $B \subset M$ integrierbar, so setzen wir $\int\limits_B f\, d\sigma := \int_M f1_B\, d\sigma$. Schließlich heißt wieder

$$\sigma(B) := \int\limits_B d\sigma = \int\limits_M 1_B\, d\sigma$$

Oberflächenmaß von A.

Für $a \in \mathbb{K}^m$ und $b \in \mathbb{K}^d$ heißt $a \otimes b := ab^\top = (a_j b_k)_{j,k} \in \mathbb{K}^{m \times d}$ **dyadisches Produkt** oder auch **Tensorprodukt** von a und b. Außerdem schreiben wir im Falle $m = d$ für das Skalarprodukt $a^\top b$ auch kurz $a \cdot b$.

Satz 7.5 *Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und glatt berandet. Sind $\Omega \supset A$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{K}^m)$, so gilt* [7]

$$\int\limits_A Jf = \int\limits_{\partial A} (f \otimes \mathbf{n})\, d\sigma\ .$$

Beweis. Es sei $x \in \partial A$. Dann existieren nach B. 6.3 eine Permutation der Variablen sowie offene Mengen V_x, I_x und $g_x \in C^1(V_x, \mathbb{R})$ wie in B. 6.16. Wir setzen $U_x := V_x \times I_x$. Ist $x \in A^\circ$, so setzen wir $U_x := U_\varepsilon(x)$, wobei $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(x) \subset A^\circ$.
Ist $h \in C_c^1(U_x)$, so gilt (im ersten Fall nach S. 7.3 und im zweiten nach [Ü]; vgl. auch Beweis zu S. 7.3)

$$\int\limits_{A \cap U_x} \nabla h = \begin{cases} \int\limits_{U_x \cap \partial A} h\mathbf{n}\, d\sigma, & \text{falls } x \in \partial A \\ \int\limits_{U_x} \nabla h = 0 \big(= \int\limits_{U_x \cap \partial A} h\mathbf{n}\, d\sigma \big), & \text{falls } x \in A^\circ \end{cases}.$$

Nach Definition ist $(U_x)_{x \in A}$ eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, existiert eine endliche Menge $E \subset A$ so, dass $A \subset \bigcup_{x \in E} U_x$. Wir wählen eine der Überdeckung $(U_x)_{x \in E}$ untergeordnete, glatte Zerlegung $(\tau_x)_{x \in E}$ der Eins auf A.
Es seien nun $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $k \in \{1, \ldots, d\}$. Da $f_j \tau_x|_{U_x} \in C_c^1(U_x)$ gilt, ergibt sich

$$\int\limits_{A \cap U_x} \partial_k (f_j \tau_x) = \int\limits_{U_x \cap \partial A} f_j \tau_x n_k\, d\sigma.$$

[7] Integrale über matrixwertige Funktionen sind jeweils eintragsweise definiert.

Also erhalten wir mit $\sum\limits_{x\in E} \tau_x|_A = 1$

$$\int\limits_A \partial_k f_j = \sum_{x\in E} \int\limits_{A\cap U_x} \partial_k(f_j\tau_x) = \sum_{x\in E} \int\limits_{U_x\cap\partial A} f_j\tau_x n_k\, d\sigma = \int\limits_{\partial A} f_j n_k\, d\sigma.$$

□

Definition 7.6 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Ist $f \in C^1(\Omega, \mathbb{K}^d)$, so heißt

$$\mathrm{div} f := \sum_{k=1}^d \partial_k f_k \ \big(= \mathrm{spur}(Jf)\big)$$

Divergenz von f. Für $u \in C^2(\Omega)$ nennt man

$$\Delta u = \sum_{k=1}^d \partial_k^2 u \ \big(= \mathrm{div}(\nabla u) = \mathrm{spur}(Hu)\big)$$

Laplace von u und $\Delta : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ den **Laplace-Operator** auf Ω. Weiter heißt u **harmonisch** (auf Ω), falls $\Delta u = 0$ auf Ω ist. Schließlich schreiben wir $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ $(= \partial_{\mathbf{n}} u)$ für die Richtungsableitung von u in Richtung $\mathbf{n}$.

Satz 7.7 *Es seien $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und glatt berandet sowie $\Omega \supset A$ offen.*

1. *(**Gaußscher Integralsatz**) Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{K}^d)$ gilt*

$$\int\limits_A \mathrm{div} f = \int\limits_{\partial A} (f \cdot \mathbf{n})\, d\sigma.$$

2. *(**Greensche Formeln**) Für $u, v \in C^2(\Omega)$ gilt*

$$\int\limits_A v\Delta u + \int\limits_A \nabla v \cdot \nabla u = \int\limits_{\partial A} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, d\sigma \quad \text{und} \quad \int\limits_A (v\Delta u - u\Delta v) = \int\limits_{\partial A} \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma.$$

Beweis. 1. Nach S. 7.5 gilt

$$\int\limits_A \mathrm{div} f = \sum_{k=1}^d \int\limits_A \partial_k f_k = \sum_{k=1}^d \int\limits_{\partial A} f_k n_k\, d\sigma = \int\limits_{\partial A} (f \cdot \mathbf{n})\, d\sigma.$$

2. Die erste Gleichung ergibt sich aus 1., angewandt auf $f := v \cdot \nabla u$, da $\nabla u \cdot \mathbf{n} = \partial u / \partial \mathbf{n}$ und

$$\mathrm{div}(v\nabla u) = \sum_{k=1}^d \partial_k(v\partial_k u) = \sum_{k=1}^d \big((\partial_k v)(\partial_k u) + v\partial_k^2 u\big) = \nabla v \cdot \nabla u + v \cdot \Delta u\ .$$

Die zweite Gleichung ergibt sich aus der ersten durch Differenzbildung. □

Beispiel 7.8 Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und glatt berandet, so gilt mit $\operatorname{div} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} = d$ nach dem Gaußschen Integralsatz[8]

$$d\,\lambda(A) = \int_A \operatorname{div} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} = \int_{\partial A} x \cdot n(x)\, d\sigma(x)\ .$$

Im Falle $A = \mathbb{B}_d := B_1(0)$ ergibt sich $\partial A = \mathbb{S}^{d-1}$ und $n(x) = x$ für $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, also $x \cdot n(x) = 1$ für $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, und damit

$$d\,\lambda(\mathbb{B}_d) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} 1\, d\sigma(x) = \sigma(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Wir befassen uns zum Abschluss mit harmonischen Funktionen. Ist u harmonisch auf einer offenen Obermenge von A, so folgt mit $v = 1$ aus S. 7.7.2

$$\int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, d\sigma = 0. \tag{7.1}$$

Eine Folgerung ist

Satz 7.9 ***(Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)***
Es seien $a \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$. Ist u harmonisch auf einer offenen Obermenge von $B_r(a)$, so gilt

$$u(a) = \frac{1}{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(a + r\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir $r = 1$ und $a = 0$ an, also $B_r(a) = \mathbb{B}_d$.
1. Fall: $d > 2$. Dann ist $v : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $v(x) = |x|^{2-d}$ harmonisch mit

$$\nabla v(x) = (2-d)|x|^{-d} \cdot x \qquad (x \neq 0)$$

([Ü]). Es sei nun $0 < \varepsilon < 1$ beliebig. Wir betrachten $A = A_\varepsilon := \mathbb{B} \setminus U_\varepsilon(0)$. Dann ist A kompakt und glatt berandet mit $\partial A = \mathbb{S}^{d-1} \cup \varepsilon\mathbb{S}^{d-1}$. Dabei ist $\mathbf{n}(x) = x$ für $|x| = 1$ und $\mathbf{n}(x) = -x/\varepsilon$ für $|x| = \varepsilon$, also

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(x) = \nabla v(x) \cdot \mathbf{n}(x) = \begin{cases} 2-d, & \text{falls } x \in \mathbb{S}^{d-1} \\ -(2-d)\varepsilon^{1-d}, & \text{falls } x \in \varepsilon\mathbb{S}^{d-1} \end{cases}.$$

Aus S. 7.7.2 und $\Delta u = \Delta v = 0$ ergibt sich

$$0 = (2-d) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u\, d\sigma - (2-d)\varepsilon^{1-d} \int_{\varepsilon\mathbb{S}^{d-1}} u\, d\sigma - \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, d\sigma - \varepsilon^{2-d} \int_{\varepsilon\mathbb{S}^{d-1}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, d\sigma\ .$$

[8] $\lambda = \lambda_d$ bezeichnet das d-dimensionale Lebesgue-Maß.

Nach (7.1), angewandt auf $\mathbb{B}_d$ und $\varepsilon\mathbb{B}_d$, sind die beiden letzten Summanden 0. Mit der mehrdimensionalen Substitutionsregel folgt ([Ü])

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} u\,d\sigma = \varepsilon^{1-d} \int\limits_{\varepsilon\mathbb{S}^{d-1}} u\,d\sigma = \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} u(\varepsilon\zeta)\,d\sigma(\zeta)\ .$$

Ist (ε_k) eine Nullfolge, so konvergiert $\zeta \mapsto u(\varepsilon_k\zeta)$ auf $\mathbb{S}^{d-1}$ gleichmäßig gegen $u(0)$. Damit konvergieren die Integrale auf der rechten Seite gegen $u(0)\sigma(\mathbb{S}^{d-1})$, d. h.

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} u\,d\sigma = u(0)\cdot\sigma(\mathbb{S}^{d-1}).$$

2. Fall: $d = 2$. Hier ergibt sich der Beweis wie im 1. Fall, allerdings jetzt mit $v(x) = \ln|x|$. $\square$