Jürgen Müller

Differenzialgleichungen

Skriptum zur Vorlesung
Sommersemester 2010

Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1 Gewöhnliche Differenzialgleichungen: einfache Beispiele und Lösungemethoden

Differenzialgleichungen sind Gleichungen, in denen eine unabhängige Variable, Funktionen und Ableitungen der Funktionen auftauchen. Dabei bezeichnen wir die unabhängige Variable meist mit t (Zeit). Bevor wir uns mit der allgemeinen Theorie beschäftigen, betrachten wir einige einfache Spezialfälle mit Anwendungsbeispielen.

Beispiel 1.1 Wir betrachten ein sehr vereinfachtes Keynesianisches Modell des Wachstums einer Volkswirtschaft. Ist Y das (Volks)einkommen (etwa gemessen als Bruttosozialprodukt), so besagt der Keynesianische Ansatz, dass das die Veränderung Y' proportional zur Differenz von Nachfrage D und Einkommen ist, d.h.

$$Y'(t) = k(D(t) - Y(t)) \qquad \text{oder kurz } Y' = k(D - Y) ,$$

wobei k eine positive Konstante ist. Weiter nimmt man an, dass die Nachfrage D sich als Summe aus privatem Konsum C, Investitionen I und Staatsausgaben G ergibt (geschlossene Volkswirtschaft; ohne Ausland). Ein weiter vereinfachtes Modell geht davon aus, dass I und G konstant sind (man schreibt $I = \bar{I}, G = \bar{G}$), und dass $C(t)$ von der Form $C(t) = c_0 + cY(t)$ mit Konstanten $c_0 > 0$ und $c \in (0, 1)$ ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} Y'(t) &= k(c_0 + cY(t) + \bar{I} + \bar{G} - Y(t)) = \\ &= -k(1-c)Y(t) + k(c_0 + \bar{I} + \bar{G}) =: -\alpha Y(t) + \beta \end{aligned}$$

mit Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. Gesucht ist nun eine Funktion Y, die die Gleichung unter der „Anfangsbedingung“ $Y(0) = Y_0$ löst.

Definition 1.2 Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f : D \to \mathbb{K}^d$ stetig. Wir schreiben ein Element aus $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ meist in der Form (t, y), wobei $t \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{K}^d$ ist.

1. Eine *(gewöhnliche) Differenzialgleichung (1. Ordnung)* ist eine Gleichung der Form
$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1.1}$$
oder kurz
$$y' = f(t, y) ,$$
wobei $y'(t) = (y_1'(t), ..., y_d'(t))$. Ist $d = 1$, so spricht man auch von einer *skalaren Differenzialgleichung*, im Falle $d > 1$ dagegen auch von einem *System gewöhnlicher Differenzialgleichungen (1. Ordnung)*

2. Ist I ein Intervall so heißt eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{K}^d$ bzw. das Paar (φ, I) *Lösung* der Differenzialgleichung (1.1) falls φ differenzierbar auf I ist, falls

$$\mathrm{graph}(\varphi) = \{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subset D$$

gilt, und falls (1.1) für alle $t \in I$ erfüllt ist, d.h.

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad \text{für alle} \quad t \in I\,.$$

3. Ist $(t_0, y^0) \in D$, so heißt ein Gleichungssystem der Form

$$y' = f(t, y) \qquad\qquad y(t_0) = y^0 \tag{1.2}$$

ein *Anfangswertproblem* (für die Differenzialgleichung (1.1)) (kurz: AWP). Ist $t_0 \in I$ und ist (φ, I) eine Lösung von (1.1) mit $\varphi(t_0) = y^0$, so heißt φ bzw. (φ, I) *Lösung des AWP* (1.2).

Eine Klasse von Differenzialgleichungen, bei denen man die Lösungen mittels Integration bestimmen kann, sind (skalare) lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung:
Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sind $a : I \to \mathbb{K}$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetig, so heißt

$$y' = a(t)y + b(t)$$

eine *(skalare) lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung.* Ist $b = 0$, so spricht man von einer *homogenen Gleichung.* Es gilt dafür

Satz 1.3 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und es sei $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Ferner seien $a, b : I \to \mathbb{K}$ stetig. Dann hat für jedes Intervall $I_0 \subset I$ mit $t_0 \in I_0$ das AWP*

$$y' = a(t)y + b(t)\,, \qquad y(t_0) = y_0$$

hat genau eine Lösung φ auf I_0, gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{A(t)}\Big[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\,ds\Big] \qquad (t \in I_0),$$

wobei $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$ $(t \in I)$.

Beweis. Es gilt für $t \in I$

$$\varphi'(t) = e^{A(t)}a(t)\left[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds\right] + \underbrace{e^{A(t)}e^{-A(t)}}_{=1}b(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$$

und
$$\varphi(t_0) = e^{A(t_0)} y_0 = y_0 \,,$$
d.h. φ ist Lösung des AWP auf I (und damit auch auf I_0).
Ist $(\tilde{\varphi}, I_0)$ eine weitere Lösung auf I_0, so betrachten wir
$$\psi(t) := (\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t))e^{-A(t)} \,.$$
Dann gilt
$$\psi'(t) = \underbrace{(\varphi'(t) - \tilde{\varphi}'(t))}_{=a(t)(\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t))} e^{-A(t)} - (\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t))e^{-A(t)} a(t) \equiv 0 \,,$$
also ist $\psi \equiv \psi(t_0) = 0$ auf I_0 und damit (da $e^{-A(t)} \neq 0$) auch $\varphi \equiv \tilde{\varphi}$ auf I_0 . □

Beispiel 1.4 Wir betrachten noch einmal das AWP aus B. 1.1. Nach S. 1.3 (mit $a(t) \equiv -\alpha$ und $b(t) \equiv \beta$) ist durch
$$\varphi(t) = e^{-\alpha t}\Big[Y_0 + \beta \int_0^t e^{\alpha s} ds\Big] = e^{-\alpha t}\Big[Y_0 + \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha s}|_0^t\Big] = \frac{\beta}{\alpha} - e^{-\alpha t}\Big[\frac{\beta}{\alpha} - Y_0\Big] \qquad (t \in \mathbb{R})$$
die (eindeutig bestimmte) Lösung auf $\mathbb{R}$ gegeben.

Wir betrachten einen zweiten Typ skalarer Gleichungen, bei denen ggfs. Lösungen per Integration berechnet werden können.
Ist $D = I \times J$ mit Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ und f von der Form
$$f(t, y) = h(t)g(y)$$
mit $h : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$, so spricht man von einer *Differenzialgleichung mit getrennten Veränderlichen* (oder von einer *separierbaren Differenzialgleichung*).
Ist $g(y_0) = 0$ für ein $y_0 \in J$, so ist offenbar $\varphi(t) \equiv y_0$ eine Lösung von $y' = h(t)g(y)$ auf I (sog. triviale oder stationäre Lsüng).
Interessanter ist der Fall $g(y_0) \neq 0$:

Satz 1.5 *Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, und es seien $h : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetig. Ferner gelte*
$$g(y) \neq 0 \qquad (y \in J) \,.$$
Ist $t_0 \in I$, $y_0 \in J$ und
$$H(t) := \int_{t_0}^t h(s) ds \quad (t \in I), \qquad G(y) := \int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)} \quad (y \in J),$$

so hat das AWP

$$y' = h(t)g(y)\,, \qquad y(t_0) = y_0$$

auf jedem Intervall $I_0 \subset I$ *mit* $t_0 \in I_0$ *und* $H(I_0) \subset G(J)$ *genau eine Lösung* (φ, I_0), *und diese ergibt sich durch Auflösen der Gleichung*

$$G(y) = H(t)$$

nach y *(d.h.* $\varphi(t) = G^{-1}(H(t))$ $(t \in I_0)$*).*

Beweis. 1. Da $G'(y) = 1/g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ gilt, ist nach dem Zwischenwertsatz $G' > 0$ oder $G' < 0$ durchgehend auf J (da G' stetig auf J) und damit G streng monoton (wachsend oder fallend) auf J. Also besitzt G eine Umkehrfunktion G^{-1} : $G(J) \to J$. Ist $I_0 \subset I$ mit $t_0 \in I_0$ und $H(I_0) \subset G(J)$, so betrachten wir $\varphi : I_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(t) = G^{-1}(H(t)) \qquad (t \in I_0)\,.$$

Dann gilt

$$\varphi'(t) = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(t)))} \cdot H'(t) = g(\varphi(t))h(t) \qquad (t \in I_0)$$

und $\varphi(t_0) = G^{-1}(H(t_0)) = G^{-1}(0) = y_0$, d.h. (φ, I_0) löst das AWP.
2. Ist (ψ, I_0) eine weitere Lösung des AWP, so gilt

$$\frac{\psi'(t)}{g(\psi(t))} = h(t) \qquad (t \in I_0)$$

und damit für alle $t \in I_0$ (Substitution $u = \psi(s)$)

$$G(\psi(t)) = \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)}{g(\psi(s))} ds = \int_{t_0}^{t} h(s) ds = H(t)$$

d.h.

$$\psi(t) = G^{-1}(H(t)) = \varphi(t)\,.$$

□

Satz 1.5 erweist sich als äußerst nützlich, da die Aussage „konstruktiv“ ist, d.h. es wird ein Verfahren zur Berechnung der Lösung geliefert. Im Wesentlichen hat man zwei Stammfunktionen (H und G) zu berechnen und die Umkehrfunktion von G anzuwenden. Oft geht man lokal vor: Ist nur $g(y_0) \neq 0$, so existert ein offenes Intervall $J_0 \subset J$ mit $g(y) \neq 0$ auf J_0. S. 1.5 (mit J_0 statt J) liefert dann die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des AWP jedenfalls für $|t - t_0|$ genügend klein (für solche t ist $H(t) \in G(J_0)$.

Beispiel 1.6 1. Wir betrachten die in der Populationsdynamik zur Modellierung von Tier- oder Pflanzenpopulationen oft verwendete sogenannte logistische Gleichung

$$y' = g(y) = y(b-y)\,,$$

wobei $b > 0$ eine Konstante ist. Wir suchen die Lösung des AWP

$$y' = g(y)\,, \qquad y(0) = y_0$$

mit $y_0 > 0$. Ist $y_0 = b$, so ist $g(y_0) = 0$, und damit ist $y \equiv b$ eine Lösung des AWP. Es sei nun $y_0 \neq b$. Dann erhalten wir nach S. 1.5 die Lösung aus

$$\begin{aligned} t = \int_0^t ds \;&=\; \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s(b-s)} = \frac{1}{b}\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s} + \frac{1}{b}\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{b-s} \\ &=\; \frac{1}{b}\big[\ln|y| - \ln|b-y| + \ln|b-y_0| - \ln|y_0|\big] \end{aligned}$$

d.h.

$$\left|\frac{y}{b-y}\right| = e^{bt}\left|\frac{y_0}{b-y_0}\right|.$$

Für $y_0 < b$ erhalten wir (da dann auch $y(t) < b$ für $|t|$ klein)

$$\frac{y}{b-y} = \frac{b}{b-y} - 1 = e^{bt}\cdot\frac{y_0}{b-y_0}$$

bzw.

$$y = y(t) = b\left(\frac{e^{bt}\frac{y_0}{b-y_0}}{1+e^{bt}\frac{y_0}{b-y_0}}\right) = \frac{b}{1+(\frac{b}{y_0}-1)e^{-bt}}\,.$$

Nachrechnen zeigt, dass dadurch eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ gegeben ist.
Eine entsprechende Rechnung gilt für $y_0 > b$. Man beachte, dass nun die Funktion

$$y(t) = \frac{b}{1+(\frac{b}{y_0}-1)e^{-bt}}$$

nur auf $(\ln(1-b/y_0), \infty)$ definiert (und Lösung) ist. Man sieht, dass die Lösung i.A. nur auf einem echten Teilintervall von I ($=\mathbb{R}$ hier) existiert.
2. Wir betrachten mit $I = J = \mathbb{R}$ das AWP

$$y' = h(t)g(y) = e^t(1+y^2)\,, \qquad y(0) = 0\,.$$

Die Lösung ergibt sich wieder nach S. 1.5 (auf einer Umgebung von $t_0 = 0$) aus

$$\underbrace{e^t - 1}_{=H(t)} = \int_0^t e^s ds = \int_0^y \frac{ds}{1+s^2} = \underbrace{\arctan(y)}_{=G(y)},$$

also

$$y = y(t) = \tan\left(e^t - 1\right)$$

Es gilt dabei $G(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$, also ist $H(t) \in G(\mathbb{R})$ falls $t < \ln(1+\pi/2)$.

Das folgende Beispiel zeigt, dass unter Umständen (auch lokal) mehrere Lösungen existieren können.

Beispiel 1.7 Es sei

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{y}\,, & \text{falls } y \geq 0 \\ 0\,, & \text{falls } y < 0 \end{cases} .$$

Dann ist offenbar $\varphi(t) \equiv 0$ eine Lösung des AWP

$$y' = g(y)\ , \qquad y(0) = 0$$

auf $\mathbb{R}$. Man rechnet nach, dass auch die Funktionen

$$\varphi_c(t) := \begin{cases} (t-c)^2/4\,, & \text{falls } t \geq c \\ 0\,, & \text{falls } t < c \end{cases}$$

für alle $c \geq 0$ Lösungen des AWPs auf $\mathbb{R}$ darstellen. Also haben wir unendlich viele Lösungen. Außdem sieht man, dass auch keine lokale Eindeutigkeit vorliegt, d. h. auch auf jeder (beliebig kleinen) Umgebung der 0 existieren schon unendlich viele Lösungen.

Zum Abschluss wollen wir uns noch mit einer Klasse von Differenzialgleichungen beschäftigen, in denen höhere Ableitungen auftreten. Zunächst wieder ein Beispiel aus der Ökonomie.

Beispiel 1.8 Wir betrachten wieder ein dynamisches Modell einer Volkswirtschaft: Das Einkommen Y verändere sich proportional zur Differenz aus Nachfrage D und Einkommen, d.h.

$$Y'(t) = k(D(t) - Y(t))\,.$$

Weiter betrachten wir das Zinsniveau r, dessen Veränderung proportional zur Differenz aus Geldnachfrage und Geldangebot ist. Geht man weiter davon aus, dass die Geldnachfrage proportional zu Y und das Geldangebot konstant ($M = \bar{M}$) sind, so erhalten wir

$$r'(t) = m(dY(t) - \bar{M})\,.$$

Schließlich ergibt sich – nach dem Modell – die Nachfrage D als Summe von privatem Konstum C, der als proportional zu Y angenommen wird ($C = cY$), und Investitionen I, die ihrerseits als $I = a_0 - ar$ mit positiven Konstanten a, a_0 angesetzt sind. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} Y'(t) & = & -k(1-c)Y(t) + ka_0 - kar(t) \\ r'(t) & = & mdY(t) - m\bar{M} \end{array} .$$

(also ein System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung). Differenziert man die erste Gleichung und setzt die zweite ein, so folgt

$$Y''(t) = -k(1-c)Y'(t) - kar'(t) = -k(1-c)Y'(t) - kamdY(t) + kam\bar{M} \qquad .$$

Dies ist eine sogenannte Differenzialgleichung 2. Ordnung, in der erste und zweite Ableitungen auftauchen.

Allgemeiner betrachten wir nun Gleichungen n-ter Ordnung:

Definition 1.9 Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, und es sei $f \in C(D, \mathbb{K})$. Eine Gleichung der Gestalt

$$y^{(n)}(t) = f\big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big) \tag{1.3}$$

oder kurz

$$y^{(n)} = f\big(t, y, y', ..., y^{(n-1)}\big)$$

heißt *(gewöhnliche) Differenzialgleichung n-ter Ordnung.*
Es sei I ein Intervall. Eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{K}$ (bzw. das Paar (φ, I)) heißt *Lösung* von (1.3), falls φ n-mal differenzierbar auf I ist mit $(t, \varphi(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)) \in D$ und

$$\varphi^{(n)}(t) = f\big(t, \varphi(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)\big) \qquad \text{für alle} \quad t \in I\,.$$

Ist $(t_0, \eta_0, ..., \eta_{n-1}) \in D$, so heißt ein Gleichungssystem der Form

$$y^{(n)} = f\big(t, y, ..., y^{(n-1)}\big), \quad y(t_0) = \eta_0, ..., y^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1} \tag{1.4}$$

ein *Anfangswertproblem* (AWP) für (1.3). Schließlich heißt eine Lösung (φ, I) von (1.3) *Lösung des AWP* (1.4), falls

$$\varphi(t_0) = \eta_0, ..., \varphi^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1}$$

gilt.

Beispiel 1.10 Das AWP

$$y'' = -y, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

hat die Lösung $\varphi(t) = \cos t$ auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.11 Man kann eine DGL n-ter Ordnung stets auf ein System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung wie aus D. 1.2 umschreiben:

Betrachten wir $F : D \to \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{array}{rcl} F_1(t, y_1, ..., y_n) & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n-1}(t, y_1, ..., y_n) & = & y_n \\ F_n(t, y_1, ..., y_n) & = & f(t, y_1, ..., y_n) \end{array},$$

so sieht man sofort: Ist $\varphi : I \to \mathbb{K}$ eine Lösung von (1.3) (bzw. (1.4)), so ist

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \\ \vdots \\ \Phi_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in I)\,,$$

eine Lösung von

$$y' = F(t, y)$$

(bzw. $y' = F(t, y)$ und $y(t_0) = (\eta_0, ..., \eta_{n-1})^T$). Ist umgekehrt $\Phi : I \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $y' = F(t, y)$ (bzw. $y' = F(t, y)$ und $y(t_0) = (\eta_0, ..., \eta_{n-1})^T$), so ist $\varphi := \Phi_1 : I \to \mathbb{K}$ (also die 1. Komponente von Φ) eine Lösung von (1.3) (bzw. (1.4)), auf I.
Dies zeigt, dass man sich bei einer allgemeinen Lösungstheorie auf Gleichungen 1. Ordnung beschränken kann. Einer solchen allgemeinen Lösungstheorie wenden wir uns als nächstes zu.

2 Lösungstheorie für allgemeine gewöhnliche Differenzialgleichungen

Wir studieren nun allgemeine Anfangswertprobleme wie in (1.2), d.h. für eine gegebene Funktion $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$, wobei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen ist, und für $(t_0, y^0) \in D$ betrachten wir das AWP

$$y' = f(t,y) \qquad y(t_0) = y^0 .$$

In 1.7 hatten wir gesehen, dass nicht jedes solche AWP eine eindeutige Lösung besitzt. Im folgenden wollen wir zeigen, dass unter etwas stärkeren Voraussetzungen an f (außer der Stetigkeit) stets genau eine sog. maximale Lösung des AWPs existiert.

Definition 2.1 Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f : D \to K^d$. Man sagt, f *genügt* auf D *einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich* y (oder auch kurz f ist *lokal Lipschitz-stetig bezüglich* y*), wenn zu jedem* $(t_0, y^0) \in D$ *eine Umgebung* $U = U(t_0, y^0)$ *von* (t_0, y^0) *und eine Konstante* $L = L(U)$ *existieren mit*

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \le L|y - \tilde{y}| \qquad \textit{für alle} \quad (t,y),(t,\tilde{y}) \in U$$

(wobei $|\cdot|$ *stets die euklidische Norm ist).*

Bemerkung 2.2 1. Genau dann genügt f auf D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y wenn für alle $K \subset D$, K kompakt, eine Konstante $L = L(K)$ mit

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \le L|y - \tilde{y}|$$

für alle (t,y) und $(t,\tilde{y}) \in K$ existiert.
(Denn: Da jede Umgebung eines Punktes in D eine kompakte Umgebung enthält, ist die Implikation $\Leftarrow$ klar.
Zu $\Rightarrow$: Es sei $K \subset D$ kompakt. Angenommen, es existiert keine Konstante L wie gewünscht. Dann existieren Folgen $(t_n, y^{(n)})$ und $(t_n, \tilde{y}^{(n)})$ in K mit

$$|f(t_n, y^{(n)}) - f(t_n, \tilde{y}^{(n)})|/|y^{(n)} - \tilde{y}^{(n)}| \to \infty \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

Da K kompakt ist, besitzt $(t_n, y^{(n)})$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert (t_0, y^0) in K. O. E. können wir annehmen, dass die Folge $(t_n, y^{(n)})$ selbst konvergiert. Aus

$$|f(t_n, y^{(n)}) - f(t_n, \tilde{y}^{(n)})| \le 2 \max_{(t,y)\in K} |f(t,y)| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

folgt, dass $|y^{(n)} - \tilde{y}^{(n)}| \to 0$ und damit auch $(t_n, \tilde{y}^{(n)}) \to (t_0, y^0)$ gilt. Nach Voraussetzung existieren eine Umgebung U von (t_0, y^0) und ein $L > 0$ mit

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \le L|y - \tilde{y}| \qquad \text{für alle } (t,y),(t,\tilde{y}) \in U .$$

Da $(t_n, y^{(n)})$ und $(t_n, \tilde{y}^{(n)})$ für n genügend groß in U liegen, ergibt sich ein Widerspruch.)

2. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Existiert für jedes $(t, y) \in D$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(t,y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_d}(t,y) \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial y_1}(t,y) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial y_d}(t,y) \end{pmatrix}$$

und sind sämtliche partiellen Ableitungen $\partial f_j/\partial y_k : D \to \mathbb{R}$ stetig auf D, so genügt f auf D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y.
(Denn: Aus Eigneschaften der Operatornorm folgt sofort, dass $\partial f/\partial y : D \to \mathbb{R}^{d\times d}$ stetig ist (wobei $\mathbb{R}^{d\times d}$ mit der von der Operatornorm herkommenden Metrik versehen ist). Ist $(t_0, y^0) \in D$, so existiert eine Kugel $U := U_\delta(t_0, y^0)$ mit $\overline{U} \subset D$. Da $\overline{U}$ kompakt ist, existiert

$$L := L(U) := \max_{(t,y)\in\overline{U}} \| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \| \ .$$

Wir setzen $V_t := \{y \in \mathbb{R}^d : (t, y) \in U\}$ für $t \in \mathbb{R}$ und definieren für alle t mit $V_t \neq \emptyset$

$$g_t(y) := f(t,y) \qquad (y \in V_t)\ .$$

Dann ist V_t konvex und es gilt $Jg_t = (\partial f/\partial y)(t, \cdot)$ auf V_t.
Sind $(t, y),\ (t, \tilde{y}) \in U$, so existiert (siehe A 17.5) ein $\xi \in I(y, \tilde{y}) \subset V_t$ so, dass

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| = |g_t(y) - g_t(\tilde{y})| \le ||Jg_t(\xi)|| \cdot |y - \tilde{y}| \le L|y - \tilde{y}|\ .)$$

Beispiel 2.3 1. Es sei

$$f(t,y) = e^t(1 + y^2) \qquad (t, y \in \mathbb{R})$$

(vgl. B. 1.6.3). Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = e^t 2y \qquad (t, y \in \mathbb{R})\ .$$

Insbesondere ist $\partial f/\partial y$ stetig auf $\mathbb{R}^2$. Nach B. 2.2.2 genügt f auf $\mathbb{R}^2$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y.
Man beachte jedoch: Für $t_0 \in \mathbb{R}$ fest existiert <u>kein</u> $L > 0$ so, dass

$$|f(t_0,y) - f(t_0,\tilde{y})| = e^{t_0}|y + \tilde{y}||y - \tilde{y}| \le L|y - \tilde{y}|$$

für alle $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ erfüllt ist (f genügt keiner sog. globalen Lipschitz-Bedingung bzgl. y).

2. Es sei

$$f(t,y) := \begin{cases} \sqrt{y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

(vgl B. 1.7). Dann gilt für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y > 0$

$$|f(t_0,y) - f(t_0,0)| = |\sqrt{y} - 0| = \frac{|y-0|}{\sqrt{y}}\,.$$

Aus $1/\sqrt{y} \to \infty$ für $y \to 0^+$ folgt, dass <u>keine</u> Umgebung U von $(t_0,0)$ und $L \geq 0$ so existieren, dass

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \qquad \text{für alle} \quad (t,y),(t,\tilde{y}) \in U$$

erfüllt ist. Folglich genügt f auf keiner offenen Menge D mit $D \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \emptyset$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y.
Ist andereseits $D = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$, so ist $\partial f/\partial y$ offenbar stetig auf D. Also genügt f dort einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. y.

Wir zeigen nun, dass das AWP (1.2) äquivalent ist zu einer gewissen Integralgleichung. Um dies für $\mathbb{K}^d$-wertige Funktionen formulieren zu können, setzen wir für $f = (f_1, ..., f_d)^T : [a,b] \to \mathbb{K}^d$, mit $f_j \in R[a,b]$ für $j = 1, ..., d$

$$\int_a^b f(s)ds := \left(\int_a^b f_1(s)ds, ..., \int_a^b f_d(s)ds \right)^T.$$

Dann hat $\int$ die üblichen Eigenschaften skalarer Integrale; einzig nichttrivial ist dabei $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$:
Es gilt für alle $f = (f_1, ..., f_d)^T$ mit $f_j \in R[a,b]$

$$\Big|\int_a^b f(s)ds\Big| \leq \int_a^b |f(s)|ds\,.$$

(Denn: Es sei

$$u := \int_a^b f(s)ds \in \mathbb{K}^d\,.$$

Dann gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |u|^2 &= \bar{u}^T u = \sum_{j=1}^d \bar{u}_j \int_a^b f_j(s)ds = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^d \bar{u}_j f_j(s) \right) ds \\ &= \int_a^b \bar{u}^T f(s)ds = \mathrm{Re} \int_a^b \bar{u}^T f(s)ds = \int_a^b \mathrm{Re}(\bar{u}^T f(s))ds \\ &\leq \int_a^b |\bar{u}^T f(s)|ds \leq \int_a^b |u|\,|f(s)|ds\,, \end{aligned}$$

also

$$|u| \leq \int_a^b |f(s)| ds \,.)$$

Satz 2.4 *Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Ferner sei $(t_0, y^0) \in D$. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$, so sind für $\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d)$ äquivalent:*

a) (φ, I) ist eine Lösung von (1.2), d.h. $\varphi(t_0) = y^0$ und

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad (t \in I)\,.$$

b) Es ist graph$(\varphi) \subset D$ und für alle $t \in I$ gilt

$$\varphi(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds\,.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_d)$, $y^0 = (y_1^0, ..., y_d^0)$. Aus $\varphi_j'(s) = f_j(s, \varphi(s))$ und $\varphi_j(t_0) = y_j^0$ ergibt sich durch Aufintegrieren und Anwendung des HDI, Teil 2, für alle $t \in I$ und $j = 1, ..., d$

$$\varphi_j(t) - y_j^0 = \varphi_j(t) - \varphi_j(t_0) = \int_{t_0}^t \varphi_j'(s) ds = \int_{t_0}^t f_j(s, \varphi(s)) ds\,.$$

(Man beachte dabei φ_j' ist stetig auf I, da $s \mapsto f_j(s, \varphi(s))$ stetig ist.)
b) $\Rightarrow$ a): Da φ stetig auf I und f stetig auf D sind, ist $s \mapsto f(s, \varphi(s))$ stetig auf I. Also ergibt sich a) wieder durch Anwendung des HDI, diesmal Teil 1. □

Damit können wir folgende (zunächst „lokale“) Version eines Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Anfangswertprobleme beweisen.

Satz 2.5 *(Picard-Lindelöf; lokale Version)*
Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Ferner genüge f auf D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y. Dann existiert für jedes $K \subset D$, K kompakt, ein $\alpha = \alpha(K) > 0$ so, dass das AWP

$$y' = f(t, y)\,, \qquad y(\xi) = \eta$$

für jedes $(\xi, \eta) \in K$ und jedes Intervall $I \subset [\xi - \alpha, \xi + \alpha]$ mit $\xi \in I$ genau eine Lösung auf I besitzt.

Unser Beweis beruht auf einer geeigneten Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes. Dazu stellen zunächst einige kleinere Vorüberlegungnen topologischer Art an.
Ist (X, d) ein metrischer Raum, so setzen wir für $A, B \subset X$ (mit $\inf \emptyset := \infty$)

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} .$$

Es gilt dabei ([Ü]): Ist A abgeschlossen und B kompakt mit $A \cap B = \emptyset$, so ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.
Ist $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, so definieren wir für $A, B \subset X$

$$A + B := \{a + b : a \in A,\, b \in B\} \ (\subset X).$$

Hier gilt (wieder [Ü]): Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.

Beweis. 1. Es sei $K \subset D$ kompakt und es seien $\alpha' > 0, \beta > 0$ so, dass mit

$$Q_{\alpha',\beta} := \{(t, y) :\ |t| \leq \alpha',\ |y| \leq \beta\}$$

die Menge $K + Q_{\alpha',\beta}$ Teilmenge von D ist (wichtig dabei: aus $\operatorname{dist}(K, \partial D) > 0$ folgt die Existenz solcher $\alpha', \beta > 0$). Nach der Vorbemerkung ist außerdem $K + Q_{\alpha',\beta}$ kompakt. Wir setzen weiter

$$M := \max_{(t,y)\in K+Q_{\alpha',\beta}} |f(t, y)|$$

und mit $L = L(K + Q_{\alpha',\beta})$ wie in B. 2.2.1 (und $\varrho/0 := \infty$ für $\varrho > 0$)

$$\alpha := \min\left(\alpha', \frac{\beta}{M}, \frac{1}{2L}\right) .$$

2. Es sei $(\xi, \eta) \in K$ fest, und es sei I ein Intervall mit $\xi \in I$ und

$$I \subset [\xi - \alpha, \xi + \alpha] .$$

Wir setzen

$$A := \{\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d) : |\varphi(t) - \eta| \leq \beta \text{ für alle } t \in I\} .$$

Nach A 11.15 ist $(B(I, \mathbb{K}^d), d)$ mit

$$d(f, g) := \|f - g\|_\infty$$

ein vollständiger metrischer Raum. Weiter ist $A \subset B(I, \mathbb{K}^d)$ abgeschlossen.
(Denn: Es sei $(\varphi_n)_n$ eine Folge in A mit $\varphi_n \to \varphi$ für ein $\varphi \in B(I, \mathbb{K}^d)$. Dann ist nach A 11.6 φ stetig auf I, d.h. $\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d)$. Außerdem gilt für alle $t \in I$, $n \in \mathbb{N}$

$$|\varphi(t) - \eta| \leq \underbrace{|\varphi_n(t) - \eta|}_{\leq \beta} + \underbrace{|\varphi_n(t) - \varphi(t)|}_{\to 0 \quad (n\to\infty)} ,$$

also auch $|\varphi(t) - \eta| \leq \beta$ und damit $\varphi \in A$. Damit ist A abgeschlossen.)

Als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes $(B(I,\mathbb{K}^d),d)$ ist (A,d) ebenfalls vollständig ([Ü]).
3. Wir definieren für $\varphi \in A$

$$T\varphi(t) := \eta + \int\limits_\xi^t f(s,\varphi(s))ds \qquad (t \in I)\,.$$

(Man beachte: aus $\varphi \in A$ folgt $(s,\varphi(s)) \in K + Q_{\alpha',\beta} \subset D$ für alle $s \in I$).
Da $s \mapsto f(s,\varphi(s))$ stetig auf I ist, ist auch $T\varphi$ stetig auf I nach dem HDI (sogar differenzierbar). Weiter gilt für $t \in I$

$$\begin{aligned} |T\varphi(t)-\eta| &= \Big|\int\limits_\xi^t f(s,\varphi(s))ds\Big| \le \Big|\int\limits_\xi^t \underbrace{|f(s,\varphi(s))|}_{\le M} ds\Big| \\ &\le M\cdot|t-\xi| \le M\cdot\alpha \le \beta\,, \end{aligned}$$

also ist $T\varphi \in A$. Damit gilt $T : A \to A$.
4. Behauptung: $T : A \to A$ ist eine 1/2-Kontraktion.
Denn: Für $\varphi, \tilde\varphi \in A$ und $t \in I$ gilt

$$\begin{aligned} |T\varphi(t)-T\tilde\varphi(t)| &\le \Big|\int\limits_\xi^t |f(s,\varphi(s))-f(s,\tilde\varphi(s))|ds\Big| \le \\ &\le L\Big|\int\limits_\xi^t |\varphi(s)-\tilde\varphi(s)|ds\Big| \le L\|\varphi-\tilde\varphi\|_\infty|t-\xi| \\ &\le L\|\varphi-\tilde\varphi\|_\infty\cdot\alpha \le \frac{1}{2}\|\varphi-\tilde\varphi\|_\infty\,. \end{aligned}$$

5. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat T genau einen Fixpunkt $\varphi \in A$, d.h. es existiert genau eine Funktion $\varphi \in A$ mit

$$\varphi(t) = \eta + \int\limits_\xi^t f(s,\varphi(s))ds \qquad (t \in I)\,. \tag{2.5}$$

Da jede Funktion, die das AWP $y' = f(t,y)$, $y(\xi) = \eta$ auf I löst, notwendigerweise in A liegt ([Ü]), ist φ nach S. 2.4 die eindeutig bestimmte Lösung des AWPs $y' = f(t,y)$, $y(\xi) = \eta$ auf I. □

Bemerkung 2.6 Es seien D, f wie in S. 2.5.
1. Insbesondere ergibt sich aus S. 2.5, dass zu jedem Punkt $(t_0,y^0) \in D$ eine Umgebung U von t_0 so existert, dass das AWP $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y^0$ auf jedem Intervall $I \subset U$

genau eine Lösung hat (wähle $K = \{(t_0, y^0)\}$). In diesem Fall sagt man, dass AWP sei *lokal eindeutig lösbar*.
Man kann zeigen, dass auch ohne die Voraussetzung einer lokalen Lipschitz-Bedingung die Existenz einer Lösung des AWP auf einer Umgebung von t_0 gesichert ist. (Existenzsatz von Peano). Wie etwa B. 1.7 zeigt, sind die Lösungen in diesem Fall allerdings i. A. nicht mehr eindeutig. Auf den Beweis des Satzes von Peano, der weitergehende Hilfsmittel der Analysis erfordert, wollen wir nicht eingehen.

2. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis zu S. 2.5 ergibt sich mit dem Banachschen Fixpunktsatz folgendes iterative Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Lösung des AWP (1.2) auf einer Umgebung von t_0:
Ist $\varphi_0 \in A$ (etwa $\varphi_0(t) \equiv y^0$), so konvergiert die Folge (φ_n) in A mit

$$\varphi_{n+1}(t) := T\varphi_n(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))ds$$

für $t \in I$ (gleichmäßig) gegen die Lösung φ. Außerdem ergibt sich aus dem Banachschen Fixpunktsatz eine Abschätzung für den Fehler $\|\varphi - \varphi_n\|_\infty$. Dieses Näherungsverfahren zur Bestimmung der Lösung heißt „Picard-Lindelöfsches Iterationsverfahren“ oder auch „Methode der sukzessiven Approximationen“. Für das einfache Beispiel $y' = y$, $y(0) = 1$ erhalten wir etwa mit $\varphi_0 \equiv 1$

$$\varphi_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{t^\nu}{\nu!},$$

also $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^t$ (hier sogar für alle $t \in \mathbb{R}$).

Definition 2.7 1. Es seien (φ, I) und $(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$ Lösungen des AWP (1.2). Dann heißt $(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$ (*echte*) *Fortsetzung* von (φ, I) bzw. (φ, I) (*echte*) *Einschränkung* von $(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$, falls $\tilde{I} \supset I$ ($\tilde{I} \neq I$) und $\tilde{\varphi}_{|I} = \varphi$ gilt.
2. Eine Lösung (φ_0, I_0) von (1.2) heißt *maximal*, falls (φ_0, I_0) keine echte Fortsetzung hat. Das Intervall I_0 heißt dann ein *maximales Lösungsintervall* des AWP.

Beispiel 2.8 Wir betrachten wieder B. 1.7. Hier sind alle Funktionen $(\varphi_c, \mathbb{R})$ maximale Lösungen des AWP. Insbesondere sieht man, dass unendlich viele maximale Lösungen existieren können.

Bemerkung und Definition 2.9 Ist das AWP (1.2) für jedes $(t_0, y^0) \in D$ lokal eindeutig lösbar, so existiert zu jedem $(t_0, y^0) \in D$ genau eine maximale Lösung (φ_0, I_0)

des AWPs (1.2) und jede Lösung ist Einschränkung von (φ_0, I_0). Ist dies der Fall, so sagen wir, dass AWP sei *global eindeutig lösbar*.
(Denn:
1. Wir zeigen zunächst: Sind (φ_1, I_1) und (φ_2, I_2) Lösungen von (1.2), so gilt

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \qquad (t \in I_1 \cap I_2)\,.$$

Angenommen, es existiert ein $\bar{t} \in I_1 \cap I_2$ mit $\varphi_1(\bar{t}) \neq \varphi_2(\bar{t})$. O.E. betrachten wir den Fall $\bar{t} > t_0$. Dann setzen wir

$$\bar{s} := \inf\{t \in I_1 \cap I_2 : t > t_0,\ \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\}\,.$$

Nach Voraussetzung ist $t_0 < \bar{s} (\leq \bar{t})$ und nach Definition gilt

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \qquad \text{für alle} \quad t \in [t_0, \bar{s})\,.$$

Da φ_1 und φ_2 stetig auf $[t_0, \bar{s}] \subset I_1 \cap I_2$ sind, gilt auch

$$\varphi_1(\bar{s}) = \varphi_2(\bar{s})$$

und damit insbesondere $\bar{s} < \bar{t}$. Damit ist $\bar{s}$ kein Randpunkt von $I_1 \cap I_2$ und φ_1 und φ_2 sind Lösungen von $y' = f(t, y)$, $y(\bar{s}) = \varphi_1(\bar{s}) (= \varphi_2(\bar{s}))$ auf einer Umgebung von $\bar{s}$. Nach Voraussetzung muss dann aber $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ auf einer Umgebung von $\bar{s}$ gelten, im Widerspruch zur Definition von $\bar{s}$.
2. Es sei I_0 die Vereinigung aller Intervalle I mit $t_0 \in I$ und so, dass auf I eine Lösung $\varphi = \varphi_I$ existiert (solche Intervalle existieren nach Voraussetzung). Für $t \in I_0$ setzen wir

$$\varphi_0(t) := \varphi_I(t) \qquad \text{falls} \quad t \in I\,.$$

Dann ist φ_0 nach 1. wohldefiniert, denn sind $\varphi = \varphi_I$ und $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_{\tilde{I}}$ zwei Lösungen mit $t \in I \cap \tilde{I}$, so gilt $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$.
Außerdem ergibt sich aus der Definition, dass (φ_0, I_0) maximale Lösung von (1.2) ist und dass jede Lösung Einschränkung davon ist.)

Es gilt damit

Satz 2.10 *(Picard-Lindelöf, globale Version)*
Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Ferner genüge f auf D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y. Dann ist das AWP (1.2) für jedes $(t_0, y^0) \in D$ global eindeutig lösbar. Weiter gilt: Ist (φ_0, I_0) die maximale Lösung, so ist I_0 offen, und die maximale Lösung „verlässt jede kompakte Teilmenge von D“, d.h., zu jedem $K \subset D$, K kompakt, existieren $T_1, T_2 \in I_0$, $T_1 < T_2$ mit

$$(t, \varphi_0(t)) \notin K$$

für alle $t < T_1$ und $t > T_2$.

Beweis. Nach B. 2.6.1 ist das AWP (1.2) für jedes (t_0, y^0) lokal eindeutig lösbar. Aus B./D. 2.9 folgt die global eindeutige Lösbarkeit.
Es sei $K \subset D$ kompakt. Angenommen, es existiert kein T_2 wie gefordert. Ist $b \in (t_0, \infty]$ der rechte Randpunkt von I_0, so existiert damit eine Folge (t_n) in I_0 mit $t_0 < t_n \uparrow b$ und

$$(t_n, \varphi_0(t_n)) \in K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann ist insbesondere $b < \infty$.
Es sei nun $\alpha = \alpha(K)$ wie in S. 2.5. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $t_N > b - \alpha$. Nach S. 2.5 hat das AWP

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_N) = \varphi_0(t_N)$$

eine Lösung $\tilde{\varphi}$ auf $[t_N - \alpha, t_N + \alpha]$. Ist (ψ, J) die maximale Lösung dieses AWPs, so ist (ψ, J) Fortsetzung von (φ_0, I_0) und von $(\tilde{\varphi}, [t_N - \alpha, t_N + \alpha])$. Da $t_N + \alpha > b$ gilt und da (ψ, J) auch Lösung von (1.2) ist, ergibt sich ein Widerspruch zur Maximalität von (φ_0, I_0).
Damit ist insbesondere auch $b \notin I_0$, denn sonst wäre $[t_0, b] \times \varphi_0([t_0, b])(\subset D)$ kompakt als Bild der stetigen Funktion $t \mapsto (t, \varphi_0(t))$ unter der kompakten Menge $[t_0, b]$. Dies widerspricht aber dem eben bewiesenen.
Eine entsprechende Argumentation für den linken Randpunkt a von I_0 zeigt die Existenz eines T_1 wie gefordert und damit insbesondere auch $a \notin I_0$. □

Bemerkung 2.11 Unter den Voraussetzungen von S. 2.10 existiert also zu jedem Punkt $(t_0, y^0) \in D$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung (φ_0, I_0). Wir schreiben statt φ_0 auch $\varphi(\cdot, t_0, y^0)$ und statt I_0 auch $I_{(t_0, y^0)}$. Die dadurch definierte Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}^d$ mit

$$\Omega := \{(t, t_0, y^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d : t \in I(t_0, y^0),\ (t_0, y^0) \in D\}$$

betrachten wir als die „allgemeine Lösung“ der Differenzialgleichung $y' = f(t, y)$.

Beispiel 2.12 1. Es sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Für festes $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das AWP

$$y' = \lambda y\,, \qquad y(t_0) = y_0$$

für $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die maximale Lösung

$$\varphi_0(t) = \varphi(t, t_0, y_0) = y_0 e^{\lambda(t - t_0)} \quad \text{auf } I_0 = I_{(t_0, y_0)} = \mathbb{R}\,.$$

2. Es sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir betrachten das AWP

$$y' = y^2\,, \qquad y(t_0) = y_0$$

für $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nach S. 1.5 ergibt sich die Lösung (jedenfalls lokal) für $y_0 \neq 0$ durch Auflösen von

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} ds = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0}\,,$$

also

$$y = y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0(t - t_0)} \qquad \text{für } |t - t_0| \text{ klein}\,.$$

Man sieht (durch Differenzieren), dass dabei gilt

$$\varphi(t, t_0, y_0) = \frac{y_0}{1 - y_0(t - t_0)} \quad \text{für} \begin{cases} t > t_0 + 1/y_0\,, & \text{falls } y_0 < 0 \\ t \in \mathbb{R}\,, & \text{falls } y_0 = 0 \\ t < t_0 + 1/y_0\,, & \text{falls } y_0 > 0 \end{cases}\,,$$

also

$$I_{(t_0,y_0)} = \begin{cases} (t_0 + 1/y_0, \infty)\,, & \text{falls } y_0 < 0 \\ (-\infty, \infty)\,, & \text{falls } y_0 = 0 \\ (-\infty, t_0 + 1/y_0) & \text{falls } y_0 > 0 \end{cases}\,.$$

Obwohl $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist, sind die maximalen Lösungsintervalle dabei i.A. nicht ganz $\mathbb{R}$; die Lösungen haben eine „endliche Entweichzeit“.
Man beachte auch: Alle Lösungen verlassen jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, sowohl, wenn t sich dem rechten Randpunkt, als auch, wenn t sich dem linken Randpunkt von $I_{(t_0,y_0)}$ annähert. Genauer gilt hier

$$\varphi(t, t_0, y_0) \to \begin{cases} -\infty & \text{für } t \to (t_0 + 1/y_0)^+\,, & \text{falls } y_0 < 0 \\ \infty & \text{für } t \to (t_0 + 1/y_0)^-\,, & \text{falls } y_0 > 0 \end{cases}\,.$$

Komplizierter ist das Randverhalten bei folgendem Beispiel.
3. Es sei $D = (0, \infty) \times \mathbb{C}$ und

$$z' = -iz/t^2, \qquad z(1/\pi) = z_0 \in \mathbb{C}\,.$$

Dann ist

$$\varphi(t, 1/\pi, z_0) = -z_0 e^{i/t} \qquad (t \in (0, \infty))$$

die maximale Lösung des AWP ([Ü]). Hier existiert $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t, 1/\pi, z_0)$ im Falle $z_0 \neq 0$ nicht!

Unter starken Voraussetzungen an f kann man eine Aussage über die Größe der maximalen Lösungsintervalle machen.

Satz 2.13 *Es sei $D = I \times \mathbb{K}^d$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Ferner genüge $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y, und es gelte*

$$|f(t,y)| \leq \varrho(t)|y| + \sigma(t) \qquad ((t,y) \in I \times \mathbb{K}^d)$$

mit stetigen Fuktionen $\varrho, \sigma : I \to [0,\infty)$. Dann gilt für alle $(t_0, y^0) \in D$:

$$I_{(t_0,y^0)} = I\,.$$

Beim Beweis verwenden wir das äußerst nützliche sogenannte „Lemma von Gronwall“:

Satz 2.14 *Es sei $\psi \in C([0,T))$ für ein $T > 0$, und es gelte*

$$\psi(t) \leq A + B \int_0^t \psi(s)ds \qquad (t \in [0,T))$$

für gewisse Konstanten $A \in \mathbb{R}$ und $B \geq 0$. Dann ist

$$\psi(t) \leq Ae^{Bt} \qquad (t \in [0,T))\,.$$

Beweis. Es sei $\delta > 0$ und

$$g(t) = g_\delta(t) = (A+\delta)e^{Bt} \qquad (t \in [0,T))\,.$$

Dann gilt

$$g(t) = A + \delta + B \int_0^t g(s)ds \qquad (t \in [0,T))\,.$$

Wir zeigen: $\psi(t) < g(t)$ auf $[0,T)$. (Da $\delta > 0$ beliebig war, ergibt sich hieraus die Behauptung.)
Für $t = 0$ ist jedenfalls $\psi(0) < g(0)$. Angenommen, es existiert ein $\bar{t} > 0$ mit $\psi(\bar{t}) \geq g(\bar{t})$. Für

$$t_1 := \inf\{t > 0,\ \psi(t) \geq g(t)\} \quad (> 0)$$

gilt dann $\psi(t_1) = g(t_1)$ und $\psi(s) \leq g(s)$ für $s \in [0,t_1]$ und deshalb

$$\psi(t_1) \leq A + B \int_0^{t_1} \psi(s)ds < A + \delta + B \int_0^{t_1} g(s)ds = g(t_1)\,.$$

Widerspruch! □

Beweis. (**zu S. 2.13**) Angenommen, $(\alpha,\beta) := I_{(t_0,y^0)} \neq I =: (a,b)$. O.E. sei dann $\beta < b$. Wir setzen

$$R := \max_{t \in [t_0,\beta]} \varrho(t), \qquad S := \max_{t \in [t_0,\beta]} \sigma(t)\,.$$

Dann gilt für $t_0 \leq t < \beta$

$$\varphi_0(t) = \varphi(t, t_0, y^0) = y^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))ds$$

und damit

$$|\varphi_0(t)| \leq |y^0| + S(\beta - t_0) + R \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_0(s)|ds \qquad (t \in [t_0, \beta))\,.$$

Nach dem Lemma von Gronwall (angewandt auf $\psi(t) := |\varphi_0(t + t_0)|$) gilt

$$\begin{aligned} |\varphi_0(t)| &\leq (|y^0| + S(\beta - t_0))e^{R(t-t_0)} \\ &\leq (|y^0| + S(\beta - t_0))e^{R(\beta-t_0)} \qquad (t \in [t_0, \beta))\,, \end{aligned}$$

also ist φ_0 beschränkt auf $[t_0, \beta)$. Das widerspricht aber der Tatsache, dass φ_0 nach S. 2.10 für $t \to \beta^-$ jede kompakte Teilmenge von $D = I \times \mathbb{K}^d$ verlässt. $\square$

Bemerkung 2.15 Der Beweis zeigt, dass es reicht, statt der Existenz der stetigen Funktionen ϱ und σ folgendes zu fordern:
Für alle kompakten Intervalle $J \subset I$ existieren Konstanten $R = R(J)$ und $S = S(J)$ so, dass

$$|f(t, y)| \leq R|y| + S \qquad ((t, y) \in J \times \mathbb{K}^d)\,.$$

Hieraus folgt ([Ü]): Ist $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$ so, dass f auf $D = I \times \mathbb{K}^d$ einer globalen Lipschitz-Bedingung bzgl. y genügt, d. h. existiert zu jedem kompakten Intervall $J \subset I$ eine Konstante $L = L(J)$ mit

$$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \quad ((t, y), (t, \tilde{y}) \in J \times \mathbb{K}^d)\,,$$

so ist $I_{(t_0, y^0)} = I$ für alle $(t_0, y^0) \in D$.

3 Allgemeine lineare Differenzialgleichungen

Bereits in Abschnitt 1 hatten wir uns kurz mit (skalaren) linearen Differenzialgleichungen beschäftigt. Wir untersuchen jetzt den wesentlich allgemeineren Fall von Systemen linearer Differenzialgleichungen.
Es seien im Folgenden stets $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$A = (a_{jk}) : I \to \mathbb{K}^{d \times d}$$

sowie

$$b : I \to \mathbb{K}^d$$

stetig. Eine Differenzialgleichung der Form

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{3.1}$$

nennen wir ein *lineares System* (von Differenzialgleichungen) oder kurz *lineare Differenzialgleichung*. Die Gleichung

$$y' = A(t)y \tag{3.2}$$

heißt *zugehörige homogene Gleichung*. Ist $b = 0$, so heißt (3.1) *homogen*. Meist betrachten wir auch jetzt wieder zugehörige AWPe der Form

$$y' = A(t)y + b(t)\,, \qquad y(\xi) = \eta \tag{3.3}$$

für $\xi \in I, \eta \in \mathbb{K}^d$.
Aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes erhalten wir unmittelbar

Satz 3.1 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{K}^{d \times d}, b : I \to \mathbb{K}^d$ stetig. Dann hat für jedes $(\xi, \eta) \in I \times \mathbb{K}^d$ das AWP (3.3), genau eine maximale Lösung $\varphi(\cdot, \xi, \eta)$ mit $I_{(\xi,\eta)} = I$.*

Beweis. Wir betrachten $f : I \times \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}^d$

$$f(t, y) := A(t)y + b(t) \qquad (t \in I, y \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Dann ist f stetig (warum ?), und es gilt

$$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| = |A(t)(y - \tilde{y})| \leq ||A(t)||\, |y - \tilde{y}| \qquad (t \in I, y \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Ist $J \subset I$ kompakt, so existiert

$$L := \max_{t \in J} ||A(t)||\,.$$

Also gilt

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \le L|y-\tilde{y}| \qquad (t \in J,\ y,\tilde{y} \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Mit B. 2.15 ergibt sich die Behauptung. □

Wir wollen uns nun die Struktur der Lösungsmenge von (3.1) genauer anschauen. Dazu betonen wir die Abhängigkeit von der Inhomogenität b und schreiben $\varphi_b(\cdot,\xi,\eta)$ für die maximale Lösung von (3.3). Außerdem setzen wir

$$L_b := \{\psi : \psi \,\text{löst (3.1) auf}\, I\}\,,$$

also insbesondere

$$L_0 = \{\psi : \psi \,\text{löst (3.2) auf}\, I\}\,.$$

Dann gilt für $\xi \in I$ fest (beachte $\psi = \varphi_b(\cdot,\xi,\psi(\xi))$ für alle $\psi \in L_b$)

$$L_b = \{\varphi_b(\cdot,\xi,\eta) : \eta \in \mathbb{K}^d\}$$

und insbesondere

$$L_0 := \{\varphi_0(\cdot,\xi,\eta) : \eta \in \mathbb{K}^d\}\,.$$

Weiter erhalten wir

Satz 3.2 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{K}^{d\times d}, b : I \to \mathbb{K}^d$ stetig.*

1. *L_0 ist ein d-dimensionaler Unterraum von $C(I,\mathbb{K}^d)$, und für jedes $\xi \in I$ ist die Abbildung $\eta \mapsto \varphi_0(\cdot,\xi,\eta)$ von $\mathbb{K}^d$ auf L_0 ein Isomorphismus (linear und bijektiv).*

2. *Ist $\psi_b \in L_b$ fest, so gilt*

$$L_b = \psi_b + L_0 \;(:= \{\psi_b + \psi_0 : \psi_0 \in L_0\})\,,$$

d.h. L_b ist ein (d-dimensionaler) affiner Unterraum von $C(I,\mathbb{K}^d)$.

Beweis. 1. Wir zeigen: Die Abbildung $T = T_\xi : \mathbb{K}^d \to C(I,\mathbb{K}^d)$ mit

$$T(\eta) = \varphi_0(\cdot,\xi,\eta) \qquad (\eta \in \mathbb{K}^d)$$

ist linear und injektiv. (Hieraus folgt, dass T ein Isomorphismus auf $L_0 = \mathrm{Bild}(T)$ und damit L_0 ein d-dimensionaler Unterraum von $C(I,\mathbb{K}^d)$ ist.)
Es gilt für $\eta_1,\eta_2 \in \mathbb{K}^d$ und $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{K}$ mit $\psi^{(1)} := \varphi_0(\cdot,\xi,\eta_1)$ und $\psi^{(2)} := \varphi_0(\cdot,\xi,\eta_2)$

$$\begin{aligned}
(\lambda_1\psi^{(1)} + \lambda_2\psi^{(2)})'(t) &= \lambda_1(\psi^{(1)})'(t) + \lambda_2(\psi^{(2)})'(t) = \\
&= \lambda_1 A(t)\psi^{(1)}(t) + \lambda_2 A(t)\psi^{(2)}(t) = \\
&= A(t)[\lambda_1\psi^{(1)} + \lambda_2\psi^{(2)}](t)
\end{aligned}$$

für alle $t \in I$, sowie

$$(\lambda_1\psi^{(1)} + \lambda_2\psi^{(2)})(\xi) = \lambda_1\varphi_0(\xi,\xi,\eta_1) + \lambda_2\varphi_0(\xi,\xi,\eta_2) = \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2\,.$$

Also ist (Eindeutigkeit der Lösung von (3.3))

$$\lambda_1\varphi_0(\cdot,\xi,\eta_1) + \lambda_2\varphi_0(\cdot,\xi,\eta_2) = \varphi_0(\cdot,\xi,\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2)\,,$$

mit anderen Worten

$$\lambda_1 T(\eta_1) + \lambda_2 T(\eta_2) = T(\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2)\,.$$

Folglich ist T linear.
Ist $T(\eta) = 0$, so gilt

$$\eta = \varphi_0(\xi,\xi,\eta) = 0$$

also ist $\mathrm{Kern}(T) = \{0\}$. Damit ist T injektiv.
2. $\supset$: Es sei $\psi \in \psi_b + L_0$, d.h. $\psi = \psi_b + \psi_0$ für ein $\psi_0 \in L_b$. Dann gilt

$$\psi'(t) = A(t)\psi_b'(t) + b(t) + A(t)\psi_0(t) = A(t)\psi(t) + b(t)$$

auf I, d.h. ψ löst (3.1). Damit ist $\psi \in L_b$.
$\subset$: Es sei $\psi \in L_b$, d.h. $\psi' = A(t)\psi + b(t)$ auf I. Dann gilt $(\psi - \psi_b)' = A(t)(\psi - \psi_b)$, d.h. $\psi - \psi_b \in L_0$. Also ist $\psi = \psi_b + (\psi - \psi_b) \in \psi_b + L_0$. □

Bemerkung und Definition 3.3 Da nach S. 3.2 der Lösungsraum L_0 der homogenen Gleichung $y' = A(t)y$ ein d-dimensionaler linearer Raum ist, reicht es, zur Bestimmung einer beliebigen Lösung eine Basis von L_0 zu kennen (jede Lösung ist dann Linearkombination der Basiselemente). Eine solche Basis heißt *Fundamentalsystem*.
Außerdem zeigt der zweite Teil des Satzes, dass sich die Bestimmung einer beliebigen Lösung des inhomogenen Systems $y' = A(t)y + b(t)$ auf die Bestimmung einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und einer Basis des Lösungsraumes L_0 der zugehörigen inhomogenen Gleichung reduziert.

Wir werden uns zunächst mit homogenen Gleichungen befassen. Der erste Satz zeigt, dass die lineare Unabhängigkeit von Lösungen äquivalent ist zur linearen Unabhängigkeit der Anfangswerte.

Satz 3.4 *Es seien $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(m)} \in L_0$, also Lösungen des homogenen Systems $y' = A(t)y$. Dann sind äquivalent:*

a) $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(m)}$ sind linear unabhängig.

b) Für alle $\xi \in I$ sind $\psi^{(1)}(\xi), ..., \psi^{(m)}(\xi)$ linear unabhängig.

c) Es existiert ein $\xi \in I$ so, dass $\psi^{(1)}(t_0), ..., \psi^{(m)}(t_0)$ linear unabhängig sind.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $\xi \in I$ gegeben. Ist $T = T_\xi$ wie im Beweis zu S. 3.2, so sind $\psi^{(1)} = T(\psi^{(1)}(\xi)), ..., \psi^{(m)} = T(\psi^{(m)}(\xi))$ linear unabhängig. Da T linear ist, sind dann auch $\psi^{(1)}(\xi), ..., \psi^{(m)}(\xi)$ linear unabhängig.
b) $\Rightarrow$ c) ist klar.
c) $\Rightarrow$ a): Ist $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi^{(j)} = 0$, so ist insbesondere auch $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi^{(j)}(t_0) = 0$. Also folgt $\lambda_1 = \ldots \lambda_m = 0$. □

Beispiel 3.5 (vgl. B. 2.12.3) Wir betrachten $I = (0, \infty)$ und

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1/t^2 \\ -1/t^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (t \in (0, \infty)) .$$

Dann ist nach B. 2.12.3 und Ü

$$\psi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \cos(1/t) \\ \sin(1/t) \end{pmatrix} \qquad (t \in (0, \infty))$$

eine Lösung des homogenen Systems

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/t^2 \\ -1/t^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A(t)\, y$$

(genauer gilt $\psi^{(1)}(t) = \varphi_0(t, 1/\pi, \binom{-1}{0})$ für $t > 0$). Man rechnet leicht nach, dass auch

$$\psi^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(1/t) \\ \cos(1/t) \end{pmatrix} \qquad (t > 0)$$

eine Lösung von $y' = A(t)y$ ist (genauer $\psi^{(2)}(t) = \varphi_0(t, 1/\pi, \binom{0}{-1})$).
Da $\psi^{(1)}(1/\pi) = \binom{-1}{0}$ und $\psi^{(2)}(1/\pi) = \binom{0}{-1}$ in $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind, sind auch $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ linear unabhängig, also eine Basis des Lösungsraumes L_0. Folglich ist jede Lösung von $y' = A(t)y$ von der Form

$$\psi = \lambda_1 \psi^{(1)} + \lambda_2 \psi^{(2)}$$

für gewisse $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung und Definition 3.6 1. Sind $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}$ beliebige Lösungen von $y' = A(t)y$ auf I, so bezeichnet man für $t \in I$ die Determinante

$$W(t) := W(\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}; t) := \det \Phi(t) ,$$

wobei

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \psi_1^{(1)}(t) & \dots & \psi_1^{(d)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_d^{(1)}(t) & \dots & \psi_d^{(d)}(t) \end{pmatrix},$$

als *Wronski-Determinante* von $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}$ (an der Stelle t). Es gilt nach S. 3.4: $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}$ ist ein Fundamentalsystem (also eine Basis des Lösungsraumes) genau dann, wenn $W(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$ ist. Außerdem ist in diesem Falle schon $W(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in I$! (Also: Entweder ist $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ oder $W(t) \equiv 0$ auf I.)
2. Bilden $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}$ ein Fundamentalsystem, so heißt die Funktion $\Phi : I \to \mathbb{K}^{d\times d}$ eine *Fundamentalmatrix*. Nach 1. ist $\Phi(\xi)$ für alle $\xi \in I$ invertierbar (da $\det \Phi(\xi) \neq 0$). Es gilt damit

$$\varphi_0(t, \xi, \eta) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(\xi) \cdot \eta \qquad (t \in I) \tag{3.4}$$

d.h. die allgemeine Lösung ergibt sich als Produkt der matrixwertigen Funktion Φ mit dem Vektor $\Phi^{-1}(\xi)\eta$.
(Denn: Für jedes (ξ, η) ist

$$\psi = \Phi\Phi^{-1}(\xi) \cdot \eta$$

eine Linearkombination der Funktionen $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}$, also eine Lösung von $y' = A(t)y$. Außerdem gilt

$$\psi(\xi) = \Phi(\xi)\Phi^{-1}(\xi)\eta = \eta\,,$$

d. h. auch die Anfangsbedingung ist erfüllt. Folglich ist $\psi = \varphi_0(\cdot, \xi, \eta)$.)

Beispiel 3.7 Es sei A wie in B. 3.5. Dann ist

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos(1/\cdot) & -\sin(1/\cdot) \\ \sin(1/\cdot) & \cos(1/\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} \\ \psi_2^{(1)} & \psi_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix. Speziell gilt

$$\Phi\Big(\frac{1}{\pi}\Big) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit auch

$$\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\pi}\Big) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Lösung von $y' = A(t)y$, $y(1/\pi) = \eta$ gegeben durch

$$\varphi_0\Big(t, \frac{1}{\pi}, \eta\Big) = \Phi(t)\begin{pmatrix} -\eta_1 \\ -\eta_2 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} -\eta_1\cos(1/t) + \eta_2\sin(1/t) \\ -\eta_1\sin(1/t) - \eta_2\cos(1/t) \end{pmatrix}.$$

Wir kommen nun zurück zum inhomogenen System (3.1). Es gilt hierfür

Satz 3.8 *(Variation der Konstanten)*
Es sei $\Phi(\cdot)$ eine Fundamentalmatrix von (3.2). Dann ist für $\xi \in I$ die Funktion

$$t \mapsto \Phi(t) \int_{\xi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds$$

ist eine spezielle Lösung von (3.1), nämlich $\varphi_b(t, \xi, 0)$, und es gilt für $\eta \in \mathbb{K}^d$

$$\begin{aligned} \varphi_b(t, \xi, \eta) &= \Phi(t)\Big[\Phi^{-1}(\xi)\eta + \int_{\xi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds\Big] \qquad (t \in I) \qquad (3.5) \\ (&= \varphi_0(t, \xi, \eta) + \varphi_b(t, \xi, 0)\,)\,. \end{aligned}$$

Beweis. Wir schreiben für eine Funktion $C : I \to \mathbb{K}^{d\times d}$ mit $C = (c_{jk})_{j=1,\dots,m,\, k=1,\dots,d}$ und differenzierbaren Funktionen $c_{jk} : I \to \mathbb{K}$ kurz

$$C'(t) := \begin{pmatrix} c'_{11}(t) & \dots & c'_{1d}(t) \\ \vdots & & \\ c'_{m1}(t) & \dots & c'_{md}(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in I)\,.$$

Dann gilt folgende Produktregel für differenzierbares $g : I \to \mathbb{K}^d$

$$(Cg)'(t) = C'(t)g(t) + C(t)g'(t) \qquad (t \in I)\,.$$

(Denn: für $t \in I$ und $j = 1, \dots, m$ ist

$$(Cg)'_j(t) = \Big(\sum_{k=1}^{d} c_{jk}(t) g_k(t)\Big)' = \sum_{k=1}^{d} c'_{jk}(t) g_k(t) + \sum_{k=1}^{d} c_{jk}(t) g'_k(t) = (C'g)_j(t) + (Cg')_j(t)\Big)\,.$$

Folglich gilt auf I für $\psi(t) := \Phi(t) \int_{\xi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds$ (HDI komponentenweise angewandt)

$$\psi'(t) = \Phi'(t) \int_{\xi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t) b(t) \overset{[\ddot{U}]}{=} A(t)\Phi(t) \int_{\xi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds + b(t)$$

d.h. ψ ist Lösung von (3.1) (mit $\psi(\xi) = 0$). Nach S. 3.2 ist $L_b = \varphi_b(\cdot, \xi, 0) + L_0$, und nach (3.4) ist $L_0 = \{\Phi(\cdot)\Phi^{-1}(\xi)\eta : \eta \in \mathbb{K}^d\}$. Da

$$\Phi(\xi)\Big[\Phi^{-1}(\xi)\eta + \int_{\xi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds\Big] = \eta$$

gilt, folgt die Behauptung. □

Beispiel 3.9 Wir betrachten wieder A aus B. 3.7. Ferner sei

$$b(t) = \begin{pmatrix} -1/t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t > 0)\,.$$

Dann ist für $\xi = 1/\pi$ mit Φ aus B. 3.7 nach S. 3.8

$$\varphi_b\Big(t, \frac{1}{\pi}, 0\Big) = \Phi(t) \int\limits_{1/\pi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds\,.$$

Weiter gilt

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(1/t) & \sin(1/t) \\ -\sin(1/t) & \cos(1/t) \end{pmatrix},$$

also

$$\int\limits_{1/\pi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds = \int\limits_{1/\pi}^{t} \begin{pmatrix} -\cos(1/s)/s^2 \\ \sin(1/s)/s^2 \end{pmatrix} ds \overset{1/s=u}{=} \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ \cos(1/t) + 1 \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$\Phi(t) \int\limits_{1/\pi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds = \begin{pmatrix} \cos(1/t) & -\sin(1/t) \\ \sin(1/t) & \cos(1/t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ \cos(1/t) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(1/t) \\ 1 + \cos(1/t) \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Insgesamt ist nach S. 3.8

$$\varphi_b\Big(t, \frac{1}{\pi}, \eta\Big) = \varphi_0\Big(t, \frac{1}{\pi}, \eta\Big) + \begin{pmatrix} -\sin(1/t) \\ 1 + \cos(1/t) \end{pmatrix}$$

mit $\varphi_0(\cdot, 1/\pi, \eta)$ wie in B. 3.7.

Wir wollen nun die obigen Ergebnisse auf lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung anwenden: Sind $a_0, a_1, ..., a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetig, so heißt eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t) y + b(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t) y^{(\nu)} + b(t) \tag{3.6}$$

eine *(skalare) lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung*. Die Gleichung

$$y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t) y^{(\nu)} \tag{3.7}$$

heißt *zugehörige homogene* Gleichung. Entsprechende Anfangswertprobleme sind von der Form

$$y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t) y^{(\nu)} + b(t), \qquad y^{(\nu)}(\xi) = \eta_\nu \quad (\nu = 0, ..., n-1) \tag{3.8}$$

mit $\xi \in I, \eta := (\eta_0, ..., \eta_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.
In B. 1.11 haten wir gesehen, dass man solche Gleichungen bzw. Anfangswertprobleme in Systeme 1. Ordnung umschreiben kann. Hier lautet das entsprechende System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

also ein lineares System. Nach B. 1.11 lassen sich sämliche Ergebnisse über Lösungen dieses Systems in Ergebnisse über die Lösungen von (3.6) übertragen.
Insbesondere erhalten wir aus S. 3.1

Satz 3.10 *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sind $a_0, ..., a_{n-1}, b : I \to \mathbb{K}$ stetig, so hat für jedes $(\xi, \eta) \in I \times \mathbb{K}^n$ das AWP (3.8) genau eine Lösung $v =: u_b(\cdot; \xi; \eta_0, ..., \eta_{n-1}) =: u_b(\cdot; \xi; \eta)$ auf I.*

Um eine S. 3.2 und S. 3.8 entsprechende Aussage über die Lösungsgesamtheit machen zu können, unterscheiden wir auch wieder

$$M_0 := \{v : v \text{ löst } (3.7) \text{ auf } I\} \quad \text{und} \quad M_b := \{v : v \text{ löst } (3.6) \text{ auf } I\}.$$

Die wesentlichen Ergebnisse sind im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 3.11
1. *M_0 ist ein n-dimensionaler Unterraum (von $C(I, \mathbb{K})$) und für $\xi \in I$ gilt $M_0 = \{u_0(\cdot; \xi; \eta) : \eta \in \mathbb{K}^n\}$.*
2. *Für jedes $v_b \in M_b$ ist $M_b = v_b + M_0$.*
3. *Sind $v_1, ..., v_n$ Lösungen der homogenen Gleichung (3.7), d.h. $v_1, ..., v_n \in M_0$, so sind $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig (ein „Fundamentalsystem“), genau dann, wenn die „Wronski-Determinante“ $W(t) = \det \Phi(t)$, wobei*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) & \dots & \dots & v_n(t) \\ v_1'(t) & \dots & \dots & v_n'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(t) & \dots & \dots & v_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

für ein $t_0 \in I$ nicht verschwindet. In diesem Fall ist schon $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

4. *(Variation der Konstanten) Ist $v_1, ..., v_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung (3.7), so ist für $\xi \in I$*

$$t \mapsto \big(v_1(t), ..., v_n(t)\big) \cdot \int_\xi^t \Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds \qquad (t \in I)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.6), nämlich $u_b(t;\xi;0)$. Außerdem gilt für $\eta = (\eta_0, ..., \eta_{n-1})^T \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} u_b(t;\xi;\eta) &= (v_1(t), ..., v_n(t)) \left[\Phi^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix} + \int_\xi^t \Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds \right] \\ \Big(&= u_0(t;\xi;\eta) + u_b(t;\xi;0)\ \Big) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Beweis. Die Aussagen ergeben sich alle aus den entsprechenden Ergebnissen für das lineare System (3.9) durch Anwendung der (bijektiven (!) und im Falle $b = 0$ linearen) Abbildung $j = j_b : L_b \to M_b$ mit

$$j(\psi) := \psi_1 \qquad (\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)^T \in L_b)\,,$$

wobei L_b die Lösungsmenge von (3.9) ist, und deren Umkehrabbildung $j^{-1} : M_b \to L_b$, gegeben durch

$$j^{-1}(v) = (v, v', ..., v^{(n-1)}) \qquad (v \in M_b)\,.$$

Man beachte dabei insbesondere, dass die rechte Seite in (3.10) die erste Komponente von (3.5) für das entsprechende System ist. □

Bemerkung 3.12 Will man (3.10) anwenden, so hat man insbesondere $\Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix}$ zu bestimmen, d.h. man hat das lineare Gleichungssystem

$$\Phi(s) \begin{pmatrix} c_1(s) \\ \vdots \\ c_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix}$$

zu lösen. Auf Grund der speziellen Struktur der rechten Seite ist dies mit Hilfe der Cramerschen Regel relativ einfach durchzuführen. Man erhält hier

$$\begin{aligned} c_j(s) &= \frac{1}{\det \Phi(s)} \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_{j-1} & 0 & v_{j+1} & \dots & v_n \\ v_1' & & v_{j-1}' & 0 & v_{j+1}' & & v_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^{(n-1)} & \dots & v_{j-1}^{(n-1)} & b(s) & v_{j+1}^{(n-1)} & \dots & v_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W(s)}(-1)^{n+j} b(s) W_j(s)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$W_j(s) = \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_{j-1} & v_{j+1} & \dots & v_n \\ v_1' & & v_{j-1}' & v_{j+1}' & & v_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^{(n-2)} & \dots & v_{j-1}^{(n-2)} & v_{j+1}^{(n-2)} & \dots & v_n^{(n-2)} \end{pmatrix}$$

ist. Also erhalten wir

$$u_b(t;\xi;0) = \sum_{j=1}^{n} v_j(t)(-1)^{n+j} \int_{\xi}^{t} \frac{b(s)W_j(s)}{W(s)} ds \qquad (t \in I)\,.$$

Diese Darstellung erklärt den Namen „Variation der Konstanten“: Während jede Lösung der homogenen Gleichung von der Form $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j(t)$ ist (also Linearkombination der $v_1, ..., v_n$), ist hier

$$u_b(t;\xi;0) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) v_j(t)\,,$$

also Linearkombination der $v_1(t), ..., v_n(t)$ mit bezüglich t variierenden Koeffizienten $\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t)$.

Beispiel 3.13 Wir betrachten die lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = y + e^t\,.$$

Man rechnet sofort nach, dass

$$v_1(t) = e^t\,, \qquad v_2(t) = e^{-t} \qquad\qquad (t \in \mathbb{R})$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y'' = y$ ist. Also erhalten wir nach B. 3.12 mit

$$\begin{aligned} &b(t) = e^t\,, \\ &W(t) = \det \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} = -2 \\ &W_1(t) = \det(e^{-t}) = e^{-t}, \qquad W_2(t) = \det(e^t) = e^t \end{aligned}$$

die spezielle Lösung

$$u_b(t;0;0,0) = -v_1(t)\int_0^t \frac{b(s)W_1(s)}{W(s)}ds + v_2(t)\int_0^t \frac{b(s)W_2(s)}{W(s)}ds = \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}\,.$$

Weiter ergibt sich, da

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Phi^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

mit (3.10)

$$\begin{aligned} u_b(t;0;\eta_0,\eta_1) &= \big(v_1(t),v_2(t)\big)\Phi^{-1}(0)\binom{\eta_0}{\eta_1} + u_b(t;0;0,0) \\ &= \frac{1}{2}e^t\left(\eta_0+\eta_1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-t}\left(\eta_0-\eta_1+\frac{1}{2}\right) + \frac{t}{2}e^t \end{aligned}$$

Sucht man speziell die Lösung mit der Anfangsbedingung $y(0)=0$, $y'(0)=1$, so ergibt sich

$$u_b(t;0;,0,1) = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{t}{2}e^t\,.$$

Also: Die obigen Ergebnisse zeigen, dass wir zur Lösung linearer Systeme oder linearer Differenzialgleichungen n-ter Ordnung Fundamentalsysteme finden müssen. Leider ist dies ein i A. sehr schwieriges Unterfangen, und es gibt keineswegs eine geschlossene Theorie. Wir werden uns im nächsten Abschnitt intensiv mit dem Fall linearer Gleichungen mit konstanten Koeffzienten (d.h. $A(t)\equiv A$ auf $\mathbb{R}$ bzw. $a_j(t)\equiv a_j$ auf $\mathbb{R}$ für $j=1,...,n$) beschäftigen. Zum Abschluss dieses Abschnittes stellen wir noch kurz zwei mögliche Ansätze für allgemeine lineare Gleichungen vor.
Im manchen Fällen ist es möglich, Lösungen einer Differenzialgleichung durch einen sogenannten Potenzreihenansatz zu gewinnen. Wir erläutern die zu Grunde liegende Idee nur für den Fall linearer Differenzialgleichungen 2. Ordnung.

Satz 3.14 *Es sei $r>0$, und es seien*

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu z^\nu\,, \qquad q(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu z^\nu$$

Potenzreihen mit Konvergenzradius $\geq r$. Ferner sei $p_0 \notin \mathbb{N}$. Sind $\eta_0,\eta_1 \in \mathbb{K}$ beliebig, so definieren wir die Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch

$$\begin{array}{lll} a_0=\eta_0\,, & a_1=\eta_1\,, & \textit{falls} \quad p_0=q_0=0 \\ a_0=\eta_0\,, & a_1=-\frac{q_0}{p_0}a_0\,, & \textit{falls} \quad p_0\neq 0 \\ a_0=0\,, & a_1=\eta_1\,, & \textit{falls} \quad p_0=0, q_0\neq 0 \end{array}$$

sowie

$$a_{\nu+1} := \frac{1}{(\nu+1)(\nu-p_0)} \sum_{\mu=0}^{\nu} (\mu\, p_{\nu+1-\mu} + q_{\nu-\mu}) a_\mu \qquad (\nu \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt: Hat die Potenzreihe $u(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *Konvergenzradius* $\geq r$*, so ist*

$$zu''(z) = p(z)u'(z) + q(z)u(z) \qquad (|z| < r)$$

und damit ist insbesondere u *eine Lösung der Differenzialgleichung*

$$y'' = \frac{p(t)}{t} y' + \frac{q(t)}{t} y$$

auf $(0, r)$ *und auf* $(-r, 0)$*.*

Beweis. Es gilt (siehe Analysis)

$$\left.\begin{aligned} u'(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) a_{\nu+1} z^\nu \\ u''(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\nu+2) a_{\nu+2} z^\nu \end{aligned}\right. \qquad (|z| < r)\,.$$

Also erhalten wir mit Hilfe des Cauchy-Produktes

$$\begin{aligned} & zu''(z) - p(z)u'(z) - q(z)u(z) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\nu\, a_{\nu+1} z^\nu - \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu z^\nu\right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) a_{\nu+1} z^\nu\right) - \left(\sum_{0}^{\infty} q_\nu z^\nu\right) \left(\sum_{0}^{\infty} a_\nu z^\nu\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\nu\, a_{\nu+1} z^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} (\mu+1) a_{\mu+1} p_{\nu-\mu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} q_{\nu-\mu} a_\mu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \underbrace{\left[(\nu+1)\nu\, a_{\nu+1} - (\nu+1) p_0 a_{\nu+1} - \sum_{\mu=0}^{\nu} (\mu\, p_{\nu+1-\mu} + q_{\nu-\mu}) a_\mu \right]}_{=: b_\nu} \end{aligned}.$$

Nach der Rekursionsformel gilt $b_\nu = 0$ $(\nu \in \mathbb{N})$ und für $\nu = 0$ erhalten wir

$$b_0 = -p_0 a_1 - q_0 a_0\,.$$

Die Bedingungen an a_0, a_1 sind gerade so eingerichtet, dass stets $b_0 = 0$ ist. □

Bemerkung 3.15 1. Man kann beweisen, dass die Potenzreihe u stets Konvergenzradius $\geq r$ hat (falls dies für p und q gilt). Wir verzichten auf den (mit den uns derzeit

zur Verfügung stehenden Mitteln etwas aufwändigen) Beweis. In den Beispielen ist die Konvergenz typischerweise direkt zu sehen.
2. Gilt $p_0 = q_0 = 0$, so folgt

$$\tilde{p}(t) = \frac{p(t)}{t} = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu t^{\nu-1}\,, \tilde{q}(t) = \frac{q(t)}{t} = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu t^{\nu-1}\,,$$

d.h. wir können die Differenzialgleichung

$$y'' = \tilde{p}(t)y' + \tilde{q}(t)y \quad (= \frac{p(t)}{t}y' + \frac{q(t)}{t}y \text{ für } t \neq 0)$$

auf ganz $I = (-r, r)$ betrachten. In diesem Fall erhalten wir, indem wir speziell etwa die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix}\eta_0\\ \eta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix}\eta_0\\ \eta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

als Anfangsbedingungen wählen (man beachte: dann gilt $u(0) = \eta_0, u'(0) = \eta_1$), ein Fundamentalsystem für diese Gleichung.

Beispiel 3.16 1. Wir betrachten für festes $\lambda \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$y'' = 2ty' - \lambda y \qquad \text{auf} \quad I = \mathbb{R}$$

(Hermitesche Differenzialgleichung). Hier ist

$$p(t) = 2t^2 \qquad q(t) = -\lambda t\,,$$

d.h.

$$\begin{array}{lll} p_2 = 2\,, & p_\nu = 0 & \text{sonst} \\ q_1 = -\lambda\,, & q_\nu = 0 & \text{sonst} \end{array}\,.$$

Wir sind also in der Situation von B. 3.15.2 (d. h. $p_0 = q_0 = 0$).
Die Rekursionsformel aus S. 3.14 ergibt hier

$$a_{\nu+1} = \frac{2(\nu-1)-\lambda}{(\nu+1)\nu} a_{\nu-1} \qquad (\nu \in \mathbb{N})\,.$$

Wählen wir speziell $a_0 = \eta_0 = 1, a_1 = \eta_1 = 0$, so erhalten wir

$$u_0(t;0;1,0) = 1 - \frac{\lambda}{2!}t^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}t^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}t^6 \ldots \left(= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^{2\mu}}{(2\mu)!} \prod_{k=0}^{\mu-1}(4k-\lambda)\right)\,.$$

Mit $a_0 = \eta_0 = 0$ und $a_1 = \eta_1 = 1$ ergibt sich entsprechend

$$u_0(t;0;0,1) = t + \frac{2-\lambda}{3!}t^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}t^5 \ldots \left(= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \prod_{k=0}^{\mu-1}(4k+2-\lambda)\right)\,.$$

Beide Potenzreihen konvergieren auf $\mathbb{R}$ und bilden ein Fundamentalsystem der Gleichung.
2. Wir betrachten für feste $a, b \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$y'' = \frac{t-b}{t} y' + \frac{a}{t} y$$

(Kummersche Differenzialgleichung). Hier ist

$$p(t) = t - b, \qquad q(t) = a\,,$$

d.h.

$$\begin{array}{llll} p_0 = -b, & p_1 = 1, & p_\nu = 0 & \text{sonst} \\ q_0 = a, & q_\nu = 0 & \text{sonst.} & \end{array}$$

Für $-b \notin \mathbb{N}_0$ ergibt die Rekursionsformel aus S. 3.14

$$a_1 = \frac{a a_0}{b} \quad \text{und} \quad a_{\nu+1} = \frac{\nu + a}{(\nu+1)(\nu+b)} \cdot a_\nu \qquad (\nu \in \mathbb{N})\,.$$

Wählen wir etwa $\eta_0 = a_0 = 1$, so ergibt sich

$$u(t) = 1 + \frac{a}{b} t + \frac{(1+a)a}{(1+b)b} \frac{t^2}{2} + \frac{(2+a)(1+a)a}{(2+b)(1+b)b} \frac{t^3}{3!} + \dots\,,$$

d.h.

$$u(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu}{(b)_\nu \nu!} t^\nu \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{l} (c)_\nu := c(c+1)\dots(c+\nu-1) \\ (c)_0 := 1 \end{array}\,.$$

Die Potenzreihe konvergiert auf $\mathbb{R}$. Die Funktion u heißt Kummer-Funktion (mit Parametern a, b) oder auch konfluente hypergeometrische Funktion.

Kennt man (woher auch immer) bereits eine nichtverschwindende Lösung einer linearen Differenzialgleichung der Ordnung n, so lässt sich dies nutzen, um weitere Lösungen aus einer linearen Differenzialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung zu bestimmen („Reduktion der Ordnung“). Wir beschränken uns bei der Darstellung dieses Verfahrens wieder auf den Fall $n = 2$.

Satz 3.17 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und es seien $a_0, a_1 : I \to \mathbb{K}$ stetig. Ist (u, I) eine Lösung der Differenzialgleichung*

$$y'' = a_1(t) y' + a_0(t) y$$

mit $u(t) \neq 0$ für alle $t \in J$, wobei $J \subset I$ ein offenes Intervall ist, so erhält man eine zweite, von u linear unabhängige Lösung $v : J \to \mathbb{K}$ durch den Ansatz

$$v(t) = z(t) u(t) \qquad (t \in J)\,,$$

wobei $w = z' \not\equiv 0$ eine Lösung der linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$w' = \Big(a_1(t) - 2\frac{u'(t)}{u(t)}\Big)w$$

ist.

Beweis. Aus $v = zu$ folgt

$$v' = z'u + zu', \qquad v'' = z''u + 2z'u' + u''z,$$

und mit $u'' = a_1u' + a_0u$ erhalten wir, falls $z'' = (a_1 - 2u'/u)z'$ gilt,

$$v'' - a_1v' - a_0v = z''u + 2z'u' + u''z - a_1z'u - a_1zu' - a_0zu = 0,$$

d.h. v ist ebenfalls Lösung (auf J).
Ist $z' \not\equiv 0$, so ist z nicht konstant auf J, und damit sind u und v linear unabhängig. □

Beispiel 3.18 Wir betrachten die lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = \frac{2t}{1-t^2}y' - \frac{2}{1-t^2}y$$

auf $I = (-1, 1)$. Man sieht sofort, dass

$$u(t) = t$$

eine Lösung auf $(-1, 1)$ ist. Also erhalten wir nach S. 3.17 eine zweite, linear unabhängige Lösung v, etwa auf $(0, 1)$ durch

$$v = zu,$$

wobei $w = z'$ Lösung von

$$w' = \Big(a_1 - 2\frac{u'}{u}\Big)w = \Big(\frac{2t}{1-t^2} - \frac{2}{t}\Big)w$$

ist. Nach S. 1.3 ist mit

$$\begin{aligned} A(t) &= \int \frac{2tdt}{1-t^2} - \int \frac{2dt}{t} = \ln\Big(\frac{1}{1-t^2}\Big) - 2\ln(t) \quad [+c] \\ &= \ln\Big(\frac{1}{1-t^2}\Big) + \ln\Big(\frac{1}{t^2}\Big) \quad [+c] \end{aligned}$$

die Funktion

$$w(t) = e^{A(t)} = \frac{1}{(1-t^2)t^2}$$

Lösung, also

$$z(t) = \int \frac{dt}{(1-t^2)t^2} = \int \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\Big) dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big)$$

und damit

$$v(t) = tz(t) = \frac{t}{2}\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) - 1\,.$$

Folglich bilden (u, v) ein Fundamentalsystem der Ausgangsgleichung (zunächst auf $(0, 1)$, aber tatsächlich auch auf $(-1, 1)$).

4 Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Nach den Überlegungen der letzten Abschnitte stellt sich weiter die Frage, wie man Fundamentalsysteme homogener Systeme bestimmen kann. Wir wollen diese Frage (jedenfalls im Prinzip) klären für Systeme der Gestalt

$$y'(t) = Ay(t)\,, \tag{4.1}$$

wobei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ eine feste Matrix ist (also unabhängig von t). Eine solche Gleichung heißt *lineares System mit konstanten Koeffizienten.*
Wir erweitern zunächst einige zentrale Begriffe der Analysis in für das Weitere geeigneter Weise.
Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein Banachraum (über $\mathbb{K}$).

- Sind $M \subset \mathbb{K}$ und $f : M \to E$, so heißt f (wie im skalaren Fall) differenzierbar an $x_0 \in M$, falls x_0 Häufungspunkt von M ist und

  $$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}(f(x) - f(x_0)) =: f'(x_0)$$

  existiert. Ausserdem definiert man Differenzierbarkeit auf einer Teilmenge und höhere Ableitungen wie im skalaren Fall.

- Ist (a_ν) eine Folge in E so, dass die Folge (s_n) mit $s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ konvergent in E ist, so spricht man (wieder wie im skalaren Fall) von Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und setzt

  $$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\,.$$

  Dabei gilt: Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} ||a_\nu|| < \infty$, so ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent, d. h. absolute Konvergenz impliziert Konvergenz.

  (Denn: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass

  $$\sum_{\nu=n+1}^{m} ||a_\nu|| < \varepsilon \qquad (m > n \geq N_\varepsilon)\,.$$

  Also folgt für $m > n \geq N_\varepsilon$

  $$||s_m - s_n|| = ||\sum_{\nu=n+1}^{m} a_\nu|| \leq \sum_{\nu=n+1}^{m} ||a_\nu|| < \varepsilon\,.$$

  Damit ist (s_n) eine Cauchy-Folge in E. Da $(E, d_{||\cdot||})$ vollständig ist, konvergiert (s_n).)

- Ist (a_ν) eine Folge in E, so heißt wie im skalaren Fall
$$R := 1/\limsup_{\nu\to\infty} ||a_\nu||^{1/\nu} \in [0,\infty]$$
Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^\infty (z-z_0)^\nu a_\nu$. Die Reihe ist (absolut) konvergent für alle $z \in U_R(z_0)$ und außerdem ist $f : U_R(z_0) \to E$, definiert durch $f(z) = \sum_{\nu=0}^\infty (z-z_0)^\nu a_\nu$, (beliebig oft) differenzierbar auf $U_R(z_0)$ mit
$$f'(z) = \sum_{\nu=0}^\infty (z-z_0)^\nu (\nu+1) a_{\nu+1} \,.$$

Wir betrachten im Weiteren $E = \mathbb{K}^{m\times d}$ (meist $\mathbb{K}^{d\times d}$) versehen mit der Operatornorm. Man kann leicht zeigen (siehe Analysis):
$(\mathbb{K}^{m\times d}, ||\cdot||)$ ist ein Banachraum.
Außerdem gilt hier für jede Folge (A_n) in $\mathbb{K}^{m\times d}$ mit $\sum\limits_{\nu=0}^\infty ||A_\nu|| < \infty$ und $B \in \mathbb{K}^{p\times m}$, $C \in \mathbb{K}^{d\times q}$
$$\sum_{\nu=0}^\infty BA_\nu = B\sum_{\nu=0}^\infty A_\nu \qquad \text{und} \qquad \sum_{\nu=0}^\infty A_\nu C = \Big(\sum_{\nu=0}^\infty A_\nu\Big)C \,.$$
(Denn: Zunächst gilt $\sum\limits_{\nu=0}^\infty ||BA\nu|| \le ||B|| \sum\limits_{\nu=0}^\infty ||A_\nu|| < \infty$, also ist auch $\sum\limits_{\nu=0}^\infty BA_\nu$ konvergent. Außerdem erhalten wir
$$||\sum_{\nu=0}^n BA_\nu - B\sum_{\nu=0}^\infty A_\nu|| \le ||B||\cdot||\sum_{\nu=0}^n A_\nu - \sum_{\nu=0}^\infty A_\nu|| \to 0 \quad (n\to\infty)\,,$$
d.h. $\sum\limits_{\nu=0}^n BA_\nu \to B\sum\limits_{\nu=0}^\infty A_\nu$.
Entsprechend argumentiert man mit C statt B.)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ fest. Dann hat die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^\infty z^\nu a_\nu$ mit $a_\nu = A^\nu/\nu!$ den Konvergenzradius $R = \infty$, denn aus $||A^\nu|| \le ||A||^\nu$ folgt
$$||a_\nu||^{1/\nu} = (||A^\nu||/\nu!)^{1/\nu} \le ||A||/(\nu!)^{1/\nu} \to 0 \qquad (\nu\to\infty)\,.$$
Wir setzen
$$e^{zA} := \exp(zA) := \sum_{\nu=0}^\infty \frac{z^\nu}{\nu!}A^\nu \qquad (z\in\mathbb{C})\,.$$
Damit ergibt sich
$$\boxed{(e^{zA})' = Ae^{zA} = e^{zA}A.}$$
(Denn: Ist $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^\infty \dfrac{z^\nu}{\nu!}A^\nu$, so folgt aus obigen Bemerkungen
$$f'(z) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{z^\nu(\nu+1)}{(\nu+1)!}A^{\nu+1} = \begin{cases} A\sum\limits_{\nu=0}^\infty \dfrac{z^\nu}{\nu!}A^\nu \\ \Big(\sum\limits_{\nu=0}^\infty \dfrac{z^\nu}{\nu!}A^\nu\Big)A \end{cases}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$).
Es sei schließlich noch bemerkt, dass die eintragsweise Definition der Ableitung einer matrixertigen Funktion aus dem vorigen Abschnitt in Falle $E = \mathbb{K}^{m\times d}$ mit der obigen übereinstimmt.
Die Nützlichkeit dieser Betrachtungen belegt folgender

Satz 4.1 *Es sei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$. Dann ist für alle $\eta \in \mathbb{K}^d$ die maximale Lösung des AWP*

$$y'(t) = Ay(t)\,, \qquad y(0) = \eta$$

gegeben durch

$$\varphi(t, 0, \eta) = e^{tA} \cdot \eta \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Außerdem ist $t \mapsto e^{tA}$ eine Fundamentalmatrix für (4.1).

Beweis. Es gilt

$$\frac{d}{dt}(e^{tA} \cdot \eta) = (e^{tA})' \cdot \eta = Ae^{tA} \cdot \eta \qquad (t \in \mathbb{R})\,,$$

d.h. $t \mapsto e^{tA} \cdot \eta$ ist Lösung von (4.1). Außerdem ist

$$e^{tA} \cdot \eta|_{t=0} = e^{0A} \cdot \eta = E_d\eta = \eta\,.$$

Also ist $\varphi(t, 0, \eta) = e^{tA} \cdot \eta$.
Wählt man speziell $\eta = e^{(k)}$, wobei $e^{(k)}$ den k-ten Einheitsvektor bezeichnet, so ist $e^{tA} \cdot e^{(k)}$ die k-te Spalte von e^{tA}, d.h. jede Spalte ist Lösung von (4.1). Da $e^{0A} = E_d$ gilt, sind die Spalten (nach S. 3.4 mit $\xi = 0$) linear unabhängig. Folglich ist $e^{tA}e^{(1)}, ..., e^{tA}e^{(d)}$ ein Fundamentalsystem, d.h. e^{tA} eine Fundamentralmatrix. □

Im Prinzip haben wir also ein Fundamentalsystem für (4.1) gefunden (nämlich das System $e^{tA}e^{(1)}, ..., e^{tA}e^{(d)}$). Es stellt sich allerdings dabei die Frage, wie man e^{tA} „konkret“ berechnen kann. Dazu versucht man, die Berechnung von e^{tA} für allgemeines A auf die Berechnung von $e^{t\tilde{A}}$ für gewisse einfache Matrizen $\tilde{A}$ zurück zu führen.
Um in diese Richtung weitergehen zu können, brauchen wir zunächst einige Rechenregeln für die Matrixexponentialfunktion.

Satz 4.2 *Es seien $A, B, C \in \mathbb{K}^{d\times d}$.*

1. *Gilt $AB = BA$, so folgt $e^Ae^B = e^{A+B}$.*

   (Insbesondere gilt damit $e^{(z+w)A} = e^{zA}e^{wA}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $e^Ae^{-A} = e^0 = E_d$, d. h. e^A ist stets invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.)

2. Ist C invertierbar, so gilt

$$e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C\,.$$

3. Hat A Blockdiagonalform

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{A_m} \end{pmatrix},$$

d.h. $A = \operatorname{diag}(A_1, ..., A_m)$, so gilt

$$e^A = \operatorname{diag}(e^{A_1}, ..., e^{A_m})\,.$$

Beweis. 1. Aus der absoluten Konvergenz ergibt sich durch Cauchy-Produktbildung (wie im skalaren Fall)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} A^\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} B^\nu\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{\nu!}\,\frac{1}{(n-\nu)!}}_{=\frac{1}{n!}\binom{n}{\nu}} A^\nu B^{n-\nu} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} A^\nu\, B^{n-\nu}\,. \end{aligned}$$

Für

$$S_n := \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} A^\nu B^{n-\nu}$$

folgt aus $AB = BA$ die Gültigkeit der binomischen Formel $S_n = (A+B)^n$ und damit ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n/n! = e^{A+B}$.

2. Es gilt

$$(C^{-1}AC)^\nu = C^{-1}A^\nu C \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)$$

(Beweis per Induktion). Also erhalten wir

$$C^{-1}e^A C = C^{-1}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} A^\nu\right) C = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} C^{-1}A^\nu C = e^{C^{-1}AC}\,.$$

3. Ist

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & O \\ & & \ddots & \\ & O & & \boxed{A_m} \end{pmatrix} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)\,,$$

so ist

$$A^\nu = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^\nu} & & & \\ & \boxed{A_2^\nu} & O & \\ & & \ddots & \\ & O & & \boxed{A_m^\nu} \end{pmatrix} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)\,,$$

also ergibt sich 3. aus der Tatsache, dass für beliebige Matrizen $A_\nu = (a_{jk}^{(\nu)})$ in Falle der Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} A_\nu$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{jk}^{(\nu)} \right).$$

□

Bemerkung 4.3 Es sei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ diagonalisierbar, d.h. es existieren eine Diagonalmatrix $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_d)$ sowie eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mit

$$A = C\Lambda C^{-1}$$

(dabei sind $\lambda_1, ..., \lambda_d$ die Eigenwerte von A und die Spalten von C, also $Ce^{(1)}, ..., Ce^{(d)}$, bilden eine Basis aus Eigenvektoren von A).
Dann gilt mit S. 4.2

$$e^{tA} = Ce^{t\Lambda}C^{-1} = C \cdot \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_d t})C^{-1}\,.$$

Die Spalten bilden nach S. 4.1 ein Fundamentalsystem. Außerdem ist mit $c^{(k)} := Ce^{(k)}$ auch

$$e^{\lambda_1 t}c^{(1)}, \ldots, e^{\lambda_d t}c^{(d)}$$

ein Fundamentalsystem (folgt etwa daraus, dass auch $e^{tA}C = C \cdot \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_d t})$ eine Fundamentalmatrix ist).

Beispiel 4.4 1. Wir betrachten das lineare System

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} y = Ay\,.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -2\,,$$

also haben wir die Eigenwerte 1 und -2. Weiter rechnet man nach, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(linear unabhängige) Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind, und dass

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = -2$ ist. Also gilt hier

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t & -e^t & e^t \\ -e^t & 2e^t & e^t \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^t + e^{-2t} & -e^t + e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ -e^t + e^{-2t} & 2e^t + e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ e^t - e^{-2t} & e^t - e^{-2t} & 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die Spalten bilden bilden nach S. 4.1 ein Fundamentalsystem.
Einfacher erhält man allerdings (vgl. B. 4.3) das Fundamentalsystem

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Wir betrachten das lineare System

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} y = Ay \, .$$

Es gilt

$$\det(A - AE) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)\,,$$

also haben wir (in $\mathbb{C}$) die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1\,,\quad \lambda_2 = 1+i\,,\quad \lambda_3 = 1-i \quad (=\overline{\lambda_2})\,.$$

Zugehörige Eigenvektoren sind

$$c^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c^{(2)} = \begin{pmatrix} 3-4i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c^{(3)} = \begin{pmatrix} 3+4i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (=\overline{c^{(2)}})\,.$$

Damit bilden etwa

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 3-4i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 3+4i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ (als Gleichung in $\mathbb{C}$ betrachtet).
Ein reelles Fundamentalsystem erhält man, indem man

$$e^{(1\pm i)t} \begin{pmatrix} 3 \mp 4i \\ \pm i \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch

$$\operatorname{Re}\left(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 3-4i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im}\left(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 3-4i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ersetzt. ([Ü])
Außerdem gilt

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 3-4i & 3+4i \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3-4i & 3+4i \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \\ 0 & i/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 4e^t - 4e^t\cos t + 3e^t \sin t & -3e^t + 3e^t \cos t + 4e^t \sin t \\ 0 & e^t \cos t & -e^t \sin t \\ 0 & e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}.$$

Schwieriger wird die Berechnung eines Fundamentalsystems natürlich dann, wenn A nicht diagonalisierbar ist. Aus der Linearen Algebra sollte bekannt sein, dass jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ (die natürlich auch rein reelle Einträge haben kann) ähnlich zu einer Blockdiagonalmatrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & O \\ & & \ddots & \\ & O & & \boxed{J_m} \end{pmatrix}$$

ist (d.h. $A = CBC^{-1}$ für eine Matrix C mit $\det(C) \neq 0$), wobei der Jordan-Block J_k die Form

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ O & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \quad J_k = (\lambda_k)$$

hat. Dabei ist die Darstellung eindeutig bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke.
Nach S. 4.2 reduziert sich die Berechnung der Matrix e^{tA} auf die Berechnung der Matrizen C, C^{-1} sowie e^{tJ_k} ($k = 1, ..., m$). Aus Sicht der Analysis stellt sich dabei insbesondere die Frage nach der Berechnung von e^{tJ}, wobei J eine Jordan-Matrix obiger Gestalt ist.

Satz 4.5 *Es sei*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & O & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_r + N_r \in \mathbb{K}^{r\times r}$$

eine Jordan-Matrix. Dann gilt $e^{tJ} = e^{\lambda t} e^{tN_r}$ *mit*

$$e^{tN_r} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & O & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zunächst ist

$$N_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & O & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{r\times r},$$

also (beachte: λE_r und N_r vertauschen)

$$e^{tJ} = e^{t\lambda E_r} e^{tN_r} = e^{t\lambda} e^{tN_r}.$$

Weiter rechnet man nach, dass

$$N_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & O & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, N_r^{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & O & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N_r^\nu = 0 \ (\nu \geq r)$$

gilt (d.h. die „1-Diagonale rückt jeweils um einen Schritt nach rechts“). Hieraus folgt

$$e^{tN_r} = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} t^\nu N_r^\nu = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel 4.6 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & O \\ O & \boxed{J_2} \end{pmatrix}$$

mit

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = (2).$$

Dann gilt

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassend erhalten wir mit S. 4.5 und den vorangegangenen Überlegungen folgendes Ergebnis über die Struktur des Lösungsraumes.

Satz 4.7 *Es sei $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ und für $k = 1, \ldots, m$ seien $J_k = \lambda_k E_{r_k} + N_{r_k}$ wie oben die zugehörigen Jordanblöcke. Dann existiert ein Fundamentalsystem der Form*

$$t \mapsto e^{\lambda_k t} P^{(k,\ell)}(t) \qquad k = 1, ..., m;\ \ell = 0, ..., r_k - 1\,,$$

wobei die Komponenten $P_1^{(k,\ell)}, ..., P_d^{(k,\ell)}$ von $P^{(k,\ell)}$ Polynome vom Grad $\leq \ell$ sind.

Beweis. Es sei $C \in \mathbb{C}^{d\times d}$ wie oben, d.h.

$$e^{tA}C = C \cdot \operatorname{diag}(e^{tJ_1}, ..., e^{tJ_m}) = C \cdot \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}e^{tN_{r_1}}, ..., e^{\lambda_m t}e^{tN_{r_m}})\,.$$

Da e^{tA} eine Fundamentalmatrix ist, ist

$$e^{tA}Ce^{(1)}, ..., e^{tA}Ce^{(d)}$$

ein Fundamentalsystem. Es gilt mit $C = (c_{jk})$

$$C \cdot \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}e^{tN_{r_1}}, ..., e^{\lambda_m t}e^{tN_{r_m}}) =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1,r_1} & \ldots & c_{1,r_1+r_2} & \ldots & c_{1,d} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{d1} & \ldots & c_{d,r_1} & \ldots & c_{d,r_1+r_2} & \ldots & c_{d,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{e^{\lambda_1 t}e^{tN_{r_1}}} & & & O \\ & \boxed{e^{\lambda_2 t}e^{tN_{r_2}}} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{e^{\lambda_m t}e^{tN_{r_m}}} \end{pmatrix}.$$

Die ersten r_1 Spalten haben die Form

$$\begin{matrix} e^{\lambda_1 t}c_{11} & e^{\lambda_1 t}(c_{11}t + c_{12}) & \ldots & e^{\lambda_1 t}\Big(c_{11}\frac{t^{r_1-1}}{(r_1-1)!} + c_{12}\frac{t^{r_1-2}}{(r_1-2)!} + \cdots + c_{1r_1}\Big) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_1 t}c_{d1} & e^{\lambda_1 t}(c_{d1}t + c_{d2}) & \ldots & e^{\lambda_1 t}\Big(c_{d1}\frac{t^{r_1-1}}{(r_1-1)!} + c_{d2}\frac{t^{r_1-2}}{(r_1-2)!} + \cdots + c_{dr_1}\Big) \end{matrix}$$

und entsprechend in den

$$\begin{matrix} \text{Spalten}\, r_1 + 1, ..., r_1 + r_2 & \text{mit} & e^{\lambda_2 t}(\ldots) \\ \vdots & & \\ \text{Spalten}\ \sum_{j=1}^{m-1} r_j + 1, ..., \sum_{j=1}^{m} r_j = d & \text{mit} & e^{\lambda_m t}(\ldots) \end{matrix}.$$

Damit ergibt sich die Behauptung. □

Wie im Abschnitt vorher wollen wir uns auch hier gesondert mit (skalaren) linearen Differenzialgleichungen höherer Ordnung beschäftigen. Es seien $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Dann heißt eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu y^{(\nu)}$$

bzw.

$$y^{(n)} - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu y^{(\nu)} = 0 \tag{4.2}$$

eine *(homogene) lineare Differenzialgleichung $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.*

Natürlich kann man zur Berechnung eines Fundamentalsystems, also n linear unabhängiger Lösungen von (4.2) auf $\mathbb{R}$, so vorgehen, dass man die Matrix e^{tA} für das entsprechende lineare System (3.9) mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

bestimmt. Dann ist die erste Zeile von e^{tA} nach den Überlegungen aus dem vorigen Abschnitt ein Fundamentalsystem. Wir wollen hier jedoch eine direkte Methode herleiten.

Wir verwenden dazu im Weiteren folgende Schreibweise: Es sei $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu z^\nu$ ein Polynom vom Grad n und führendem Koeffizienten $p_n = 1$. Ist I ein Intervall, so ist $P(D) : C^n(I) \to C(I)$ definiert durch

$$P(D)\varphi := \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu D^\nu \varphi,$$

wobei $D^\nu \varphi := \varphi^{(\nu)}$. Für $P(z) = z^n - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu$, also $p_\nu = -a_\nu$ für $\nu = 0, \dots, n-1$ gilt damit: φ ist Lösung von (4.2) auf I genau dann, wenn $P(D)\varphi = 0$ auf I ist. P heißt dann auch *charakteristisches Polynom* von (4.2).

Bemerkung 4.8
1. Es seien $P(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} p_\nu z^\nu$ und $Q(z) = \sum\limits_{\mu=0}^{m} q_\mu z^\mu$ Polynome (mit führendem Koeffizienten 1). Dann gilt

$$P(D) \circ Q(D) = (P \cdot Q)(D)$$

bzw. genauer eingentlich $P(D) \circ (Q(D)_{|C^{n+m}(I)}) = (PQ)(D)$.
(Denn: Für $\varphi \in C^{n+m}(I)$ gilt

$$\begin{aligned}\big(P(D) \circ Q(D)\big)\varphi &= \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu D^\nu \, \big(Q(D)\varphi\big) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} p_\nu q_\mu D^{\nu+\mu}\varphi = (P \cdot Q)(D)\varphi.)\end{aligned}$$

2. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt: Ist $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad n mit führendem Koeffizienten 1, so ist

$$P(z) = \prod_{\lambda \in Z(P)} (z - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \qquad (z \in \mathbb{C}) \qquad \text{mit} \qquad \sum_{\lambda \in Z(P)} \alpha(\lambda) = n \, ,$$

wobei $Z(P)$ die Menge der Nullstellen von P und $\alpha(\lambda)$ die Ordnung der Nullstelle λ bezeichnet.
Es gilt damit nach 1.

$$P(D)\varphi = \prod_{\lambda \in Z(P)} (D - \lambda \,\mathrm{Id})^{\alpha(\lambda)}\varphi \qquad \big(\varphi \in C^n(I)\big)$$

(man beachte: Aus 1. folgt auch, dass die Reihenfolge der Hintereinanderausführungen beliebig ist!).

Satz 4.9 *Es seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $P(z) = z^n - \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu$. Dann ist durch*

$$t \mapsto t^\ell e^{\lambda t} \qquad \big(\ell = 0, \ldots, \alpha(\lambda) - 1, \lambda \in Z(P)\big)$$

ein Fundamentalsystem von (4.2) auf $\mathbb{R}$ gegeben.

Beweis. 1. Allgemein gilt: Sind $g \in C^n(I)$ und $\alpha \in \{0, \ldots, n\}$, so ist

$$(D - \lambda \,\mathrm{Id})^\alpha (g e^{\lambda \cdot}) = e^{\lambda \cdot} D^\alpha g,$$

wie man sofort per Induktion nachweist. Ist also $\lambda \in Z(P)$ und $g_\ell(t) = t^\ell$ mit $\ell \in \{0, \ldots, \alpha(\lambda) - 1\}$, so folgt

$$(D - \lambda \,\mathrm{Id})^{\alpha(\lambda)} (g e^{\lambda \cdot}) = e^{\lambda \cdot} D^{\alpha(\lambda)} g_\ell = 0.$$

Damit ist auch $P(D)(g_\ell e^{\lambda\cdot}) = 0$. Also sind die Funktionen $t \mapsto t^\ell e^{\lambda t}$ mit ℓ, λ wie oben Lösungen von (4.2) auf $\mathbb{R}$.
2. Da der Lösungsraum M_0 von (4.2) n-dimensional ist und da $\sum\limits_{\lambda\in Z(P)} \alpha(\lambda) = n$ gilt, reicht es, zu zeigen: Das Tupel $\big(t \mapsto t^\ell e^{\lambda t},\ \ell = 0, \dots, \alpha(\lambda) - 1, \lambda \in Z(P)\big)$ ist linear unabhängig (in $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).

Es seien $c_{\lambda,\ell} \in \mathbb{C}$ mit

$$0 \equiv \sum_{\lambda\in Z(P)} \sum_{\ell\in L_\lambda} c_{\lambda,\ell}\, t^\ell\, e^{\lambda t} \quad \text{auf } \mathbb{R},$$

wobei $L_\lambda := \{0, \dots, \alpha(\lambda) - 1\}$. Wir haben zu zeigen: $c_{\lambda,\ell} = 0$ für $\lambda \in Z(P), \ell \in L_\lambda$.
Es gilt mit $Q_\lambda(t) = \sum\limits_{\ell\in L_\lambda} c_{\lambda,\ell} t^\ell$ für $\lambda \in Z(P)$

$$0 \equiv \sum_{\lambda\in Z(P)} e^{\lambda t} Q_\lambda(t) \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Es reicht also (lineare Unabhängigkeit der Monome) zu zeigen: $Q_\lambda = 0$ für $\lambda \in Z(P)$.
Es sei $\lambda \in Z(P)$ fest. Ist

$$P_0(z) = P(z)/(z - \lambda)^{\alpha(\lambda)} = \prod_{Z(P)\ni\mu\neq\lambda} (z - \mu)^{\alpha(\mu)} \,,$$

so folgt aus 1.

$$0 = P_0(D)0 = P_0(D)\Big(\sum_{\mu\in Z(P)} e^{\mu\cdot} Q_\mu\Big) = P_0(e^{\lambda\cdot} Q_\lambda) \,.$$

Weiter ist für $\mu \neq \lambda$ und für jedes Polynom Q

$$(D - \mu \mathrm{Id})(\mathrm{e}^{\lambda\cdot}\mathrm{Q}) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot}((\lambda - \mu)\mathrm{Q} + \mathrm{Q}')$$

wobei $(\lambda - \mu)Q + Q'$ wieder ein Polynom vom gleichen Grad ist. Damit ist

$$0 = P_0(D)(e^{\lambda\cdot} Q_\lambda) = e^{\lambda\cdot} R$$

mit einem Polynom R mit gleichen Grad wie Q_λ. Hieraus folgt $Q_\lambda = 0$. □

Bemerkung 4.10 Ist P reell, d. h. sind $a_0, \dots, a_{n-1}$ reell und ist $\lambda = \mu + i\sigma$ eine nichtreelle α-fache Nullstelle von P, so ist auch $\overline{\lambda} = \mu - i\sigma$ eine α-fache Nullstelle von P. In diesem Fall haben wir also die 2α Lösungen

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} t^\ell &= e^{\mu t} e^{i\sigma t} t^\ell \\ e^{\overline{\lambda} t} t^\ell &= e^{\mu t} e^{-i\sigma t} t^\ell \end{aligned} \qquad \ell = 0, ..., \alpha - 1 \,.$$

Ein reelles Fundamentalsystem erhält man dann, indem man für alle solchen Eigenwerte diese Lösungen ersetzt durch ([Ü])

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(e^{\lambda t}t^\ell) &= e^{\mu t}\cos(\sigma t)t^\ell \\ \mathrm{Im}(e^{\lambda t}t^\ell) &= e^{\mu t}\sin(\sigma t)t^\ell\end{aligned} \qquad \ell = 0, ..., \alpha - 1\,.$$

Beispiel 4.11 Wir betrachten noch einmal das B. 1.8 mit $k = m = 1$. Dort hatten wir für Y die (inhomogene) lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$Y''(t) + (1-c)Y'(t) + adY(t) = a\overline{M}$$

hergeleitet. Für das charakteristische Polynom gilt hier mit $s := 1 - c$

$$P(z) = z^2 + sz + ad\,,$$

also

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - ad}\,, & \text{falls } \frac{s^2}{4} - ad \geq 0 \\ -\frac{s}{2} \pm i\sqrt{ad - \frac{s^2}{4}}\,, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Offensichtlich ist

$$Y_b(t) = \frac{\overline{M}}{d}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Nach S. 3.11 und B. 4.10 sind alle Lösungen von der Form

$$Y(t) = \begin{cases} \overline{M}/d + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,, & \text{falls } s^2/4 - ad > 0 \\ \overline{M}/d + c_1 e^{-st/2} + c_2 t e^{-st/2}\,, & \text{falls } s^2/4 - ad = 0 \\ \overline{M}/d + c_1 e^{-st/2}\cos(\sigma t) + c_2 e^{-st/2}\sin(\sigma t)\,, & \text{falls } \sigma^2 := ad - s^2/4 > 0 \end{cases},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig sind.

5 Abhängigkeit von Anfangswerten und Stabilität

Wir werden uns nun mit der Frage beschäftigen, wie sich die Lösungen von Differenzialgleichungen in Abhängigkeit der Anfangswerte verhalten. Zunächst formulieren wir einen Satz über die stetige Abhängigkeit, auch für sog. parameterabhängige Probleme. Dazu betrachten wir allgemeiner als bisher eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}^d$, wobei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^m$ offen ist, und schreiben $(t, y, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^m$ für die Variablen. Ist f stetig, so heißt eine Differenzialgleichung der Form

$$y'(t) = f(t, y(t), c) \quad \text{oder kurz} \quad y' = f(t, y, c)$$

eine parameterabhängige Gleichung (mit Parameter c). Wir betrachten wieder entsprechende Anfangswertprobleme

$$y' = f(t, y, c) \qquad y(t_0) = y^0$$

für $(t_0, y^0, c) \in D$. Nach S. 2.11 existiert in Falle, dass f einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. y genügt, die allgemeine Lösung $\varphi = \varphi(t, t_0, y^0, c)$ auf

$$\Omega := \bigcup_{(t_0,y^0,c)\in D} I_{(t_0,y^0,c)} \times \big\{(t_0, y^0, c)\big\} .$$

Es gilt dafür

Satz 5.1 *Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^m$ offen und $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$ genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y. Ist $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}^d$ die allgemeine Lösung von $y' = f(t, y, c)$, so ist $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^m$ offen und φ stetig.*

Ein Beweis findet man etwas in Aulbach, Gewöhnliche Differenzialgleichungen.
Ist etwa $D = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und $f(t, y, c) := cty$, so ist für $(t_0, y_0, c) \in D$

$$\varphi(t, t_0, y_0, c) = y_0 e^{c(t^2 - t_0^2)/2}$$

mit $I_{(t_0,y_0,c)} = \mathbb{R}$. Dabei ist offensichtlich φ stetig auf der offenen Menge

$$\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} .$$

Um im Weiteren das Wesentliche nicht hinter zu viel technischen Details verschwinden zu lassen, beschränken wir uns ab nun auf sog. *autonome Systeme*, also Differenzialgleichungen der Form

$$y' = g(y),$$

wobei $G \subset \mathbb{K}^d$ offen und $g \in C(G, \mathbb{K}^d)$ ist (d. h. hier ist $f(t, y) = g(y)$ auf $D = \mathbb{R} \times G$). Im Prinzip kann man den allgemeinen Fall – parameterabhängig oder nicht – auf diesen Spezialfall zurückführen ([Ü]).

Ist g lokal Lipschitz-stetig auf G, d. h. existieren für alle $y^0 \in G$ eine Umgebung U von y^0 in G und ein $L = L(U) \geq 0$ mit

$$\big|g(y) - g(\widetilde{y})\big| \leq L|y - \widetilde{y}| \qquad (y, \widetilde{y} \in U),$$

so existiert nach S. 2.10 genau eine maximale Lösung $\varphi(\cdot, 0, y^0) =: \varphi(\cdot, y^0)$ des Anfangswertproblems

$$y' = g(y), \qquad y(0) = y^0 \in G$$

auf $I_{(0,y^0)} =: I(y^0)$ (bei autonomen Gleichungen kann man sich ohne Einschränkung auf den Fall $t_0 = 0$ beschränken, da sich die Lösung für allgemeines t_0 durch eine Verschiebung im Argument aus dem Spezialfall ergibt, d. h. $\varphi(t, t_0, y^0) = \varphi(t - t_0, 0, y^0)$ für $t - t_0 \in I(y_0)$). Außerdem erhält man aus S. 5.1, dass die Menge

$$\Omega := \bigcup_{y^0 \in G} I(y^0) \times \{y^0\}$$

offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ und φ stetig auf Ω ist. Wir zeigen, dass die Abhängigkeit vom Anfangswert y^0 bei glattem g auch glatt ist.

Satz 5.2 *Es seien $G \subset \mathbb{R}^d$ offen und $g \in C^1(G, \mathbb{R}^d)$. Dann existiert $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y^0)$ für alle $(t, y^0) \in \Omega$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\cdot, y^0)$ ist Lösung des (Matrix-)Anfangswertproblems*

$$Z' = Jg\big(\varphi(t, y^0)\big) \cdot Z, \qquad Z(0) = E_d$$

mit Parameter y^0.

Beweis. Es sei $y^0 \in G$ fest. Ist I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $\overline{I} \subset I(y^0)$, so existiert nach S. 5.1 (und einem Kompaktheitsargument; siehe wieder etwa Aulbach, Gewöhnliche Diffferenzialgleichungen) ein $\delta > 0$ so, dass $I \subset I(y^0 + h)$ für alle $h \in U_\delta(0)$ und dass für

$$\Delta(t, h) := \varphi(t, y^0 + h) - \varphi(t, y^0)$$

gilt: $\varphi(t, y^0) + s\Delta(t, h) \in G$ für alle $t \in I$, $h \in U_\delta(0)$ und $s \in [0, 1]$.
Wir betrachten für $t \in I$, $h \in U_\delta(0)$

$$B(t, h) := \int_0^1 Jg\big(\varphi(t, y^0) + s\Delta(t, h)\big)\, ds.$$

Dann ist B stetig auf $I \times U_\delta(0)$ (Stetigkeit von Parameterintegralen; siehe Analysis). Mit dem HDI (angewandt auf $f(s) := g(\varphi(t, y^0) + s\Delta(t, h))$) und der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta}{\partial t}(t,h) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,y^0+h) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,y^0) \\
&= g\big(\varphi(t,y^0+h)\big) - g\big(\varphi(t,y^0)\big) \\
&= \int_0^1 Jg\big(\varphi(t,y^0) + s\Delta(t,h)\big)\, ds \cdot \Delta(t,h) \\
&= B(t,h)\cdot \Delta(t,h).
\end{aligned}$$

Aus $\Delta(0,h) = \varphi(0,y^0+h) - \varphi(0,y^0) = h$ folgt, dass $\Delta(\cdot,h)$ Lösung des linearen parameterabhängigen Problems

$$z' = B(t,h)\cdot z\ , \qquad z(0) = h$$

auf I ist. Bezeichnen wir mit $\Phi(\cdot,h)$ die Fundamentalmatrix zur (Matrix-)Gleichung

$$Z' = B(t,h)\cdot Z$$

mit $\Phi(0,h) = E_d$ auf I, so ist Φ stetig auf $I \times U_\delta(0)$ nach S. 5.1 (angewandt auf die Spalten von Φ). Aus Eindeutigkeitsgründen ist

$$\varphi(\cdot,y^0+h) - \varphi(\cdot,y^0) = \Delta(\cdot,h) = \Phi(\cdot,h)\cdot h,$$

also folgt für $t \in I$

$$\big|\varphi(t,y^0+h) - \varphi(t,y^0) - \Phi(t,0)\cdot h\big| \le \underbrace{\big\|\Phi(t,h) - \Phi(t,0)\big\|}_{\to 0\,(h\to\infty)} \cdot |h|.$$

Dies bedeutet, dass $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t,y^0)$ existiert und dass $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t,y^0) = \Phi(t,0)$ gilt, was mit

$$B(t,0) = \int_0^1 Jg\big(\varphi(t,y^0)\big)\, ds = Jg\big(\varphi(t,y^0)\big)$$

die Behauptung für alle $t \in I$ ergibt. Da $y^0 \in G$ und $I \subset I(y^0)$ (mit $0 \in I \subset \overline{I} \subset I(y^0)$) beliebig waren, ist der Satz bewiesen. $\square$

Bemerkung 5.3 Ist $g \in C^1(G,\mathbb{R}^d)$, so ist nach S. 5.2

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y} = (Jg \circ \varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\ .$$

Da die rechte Seite stetig auf Ω ist (nach S. 5.1 und S. 5.2), gilt dies auch für die linke. Damit ist nach dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t} \,.$$

Für die rechte Seite gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t}(t,y^0) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(g(\varphi(t,y^0)) = Jg(\varphi(t,y^0))\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,y^0) \,.$$

Dies zeigt, dass in Falle der Existenz und Stetigkeit der entsprechenden partiellen Ableitungen notwendigerweise die Gleichung aus S. 5.2 erfüllt sein muss.

Beispiel 5.4 Wir betrachten nochmal das Anfangswertproblem

$$y' = g(y) = y^2, \qquad y'(0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

aus B. 2.12.2. Hier ist

$$\varphi(t,y_0) = \frac{y_0}{1-y_0 t}$$

auf

$$\Omega = \bigcup_{y_0>0}\big((-\infty,1/y_0)\times\{y_0\}\big)\cup\bigcup_{y_0<0}\big((1/y_0,\infty)\times\{y_0\}\big)\cup(\mathbb{R}\times\{0\})$$

und es gilt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,y_0) = \frac{1}{(1-y_0t)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial y}(t,y_0) = \frac{2y_0}{(1-y_0t)^3}\,.$$

Man sieht also, dass $(\partial\varphi/\partial y)(\cdot,y_0)$ das lineare parameterabhängige Problem

$$z' = g'(\varphi(t,y_0))\cdot z = \frac{2y_0}{1-y_0t}\cdot z$$

mit $z(0) = 1$ löst.

Ein wesentlicher Untersuchungsgegenstand bei Differenzialgleichungen ist die Frage nach dem Verhalten von Lösungen wenn t sich einem der Randpunkte des maximalen Lösungsintervalls $I(y^0)$ nähert. Wir schreiben $I(y^0) =: (t^-(y^0), t^+(y^0))$.
Wir betrachten zunächst lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten. Hier interessiert also das Verhalten für $t\to\infty$ oder $t\to-\infty$. Wir beschränken uns auf den Fall $t\to\infty$.
Als Anwendung von S. 4.7 erhalten wir

Satz 5.5 *(Stabilitätskriterium)*
Es sei $A\in\mathbb{C}^{d\times d}$ und $\sigma(A) := \{\lambda : \lambda$ Eigenwert von $A\}$. Dann sind äquivalent:

a) Es existieren $M, \alpha > 0$ mit $||e^{tA}|| \leq Me^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$.

b) für alle Lösungen ψ von (4.1) gilt $\psi(t) \to 0$ $(t \to \infty)$.

c) für alle $\lambda \in \sigma(A)$ ist

$$\mathrm{Re}(\lambda) < 0\,.$$

Ist eine der Bedingungen erfüllt, so existiert für alle $\alpha < -\max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ ein M so, dass die Ungleichung aus a) gilt.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Ist $\psi(0) = \eta$, so ist $\psi(t) = e^{tA}\eta$, also $|\psi(t)| \leq ||e^{tA}||\,|\eta| \to 0\,(t \to \infty)$.
b) $\Rightarrow$ c): Angenommen, es existiert ein Eigenwert λ von A mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Ist $P^{(0)}$ das zugehörige Polynom vom Grad 0 aus S. 4.7 (dann ist $P^{(0)} \neq 0$ ein Eigenvektor von A), so ist

$$\psi(t) = e^{\lambda t}P^{(0)}$$

eine Lösung von (4.1) mit $|\psi(t)| = e^{t\mathrm{Re}\lambda}|P^{(0)}| \geq |P^{(0)}|$ für alle $t \geq 0$. Widerspruch zu $\psi(t) \to 0$ für $t \to \infty$!
c) $\Rightarrow$ a): Es sei $\alpha > 0$ so, dass $\alpha < -\mathrm{Re}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$. Für jedes $k \in \{1, ..., d\}$ ist $e^{tA}e^{(k)}$ Linearkombination von Funktionen der Form

$$e^{\lambda t}t^{\ell}y\,,$$

wobei $\ell \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \sigma(A)$ und $y \in \mathbb{K}^d$. Für jedes solche Tripel (ℓ, λ, y) existiert ein $M_{\ell,\lambda,y} > 0$ mit

$$|e^{\lambda t}t^{\ell}y| \leq e^{t\mathrm{Re}\lambda}t^{\ell}|y| \leq M_{\ell,\lambda,y}e^{-\alpha t} \qquad (t \geq 0)\,.$$

Also existieren $M_k > 0$ mit $|e^{tA}e^{(k)}| \leq M_k e^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$. Da

$$||e^{tA}|| \leq \sum_{k=1}^{d} |e^{tA}e^{(k)}| \leq e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{d} M_k$$

gilt, folgen a) und die Zusatzbehauptung. □

Bemerkung 5.6 Hat man ein (inhomogenes) lineares System mit konstanter Koeffizientenmatrix A, also

$$y' = Ay + b(t)$$

mit $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ und $b : I \to \mathbb{K}^d$ stetig, so erhält man (im Falle $0 \in I$) eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung nach S. 3.8 und S. 4.2.1 durch

$$\varphi_b(t, 0) = e^{tA}\int_0^t e^{-sA}b(s)ds\,.$$

Außerdem ist dann für $\eta \in \mathbb{K}^d$

$$\varphi_b(t,\eta) = \varphi_0(t,\eta) + \varphi(t) = e^{tA}\Big[\eta + \int_0^t e^{-sA} b(s)ds\Big]$$

die Lösung mit Anfangswert $y(0) = \eta$. Ist auch die rechte Seite b unabhängig von t (also $b(t) \equiv b$ auf $\mathbb{R}$), so erhält man dabei, falls A invertierbar ist,

$$\begin{aligned} \varphi_b(t,\eta) &= e^{tA}(\eta - e^{-tA}A^{-1}b + A^{-1}b) \\ &= e^{tA}(\eta + A^{-1}b) - A^{-1}b \end{aligned}$$

Beispiel 5.7 Wir betrachten das lineare System aus B. 1.8 mit $k = m = 1$ (vgl. auch 4.11), d.h.

$$\begin{pmatrix} Y' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ -\overline{M} \end{pmatrix}$$

(mit Konstanten $s := 1 - c, a, a_0, d, \overline{M} > 0$). Es gilt

$$\begin{aligned} &\det(A - \lambda E) := (-s - \lambda)(-\lambda) + ad = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_{1,2} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - ad}\,, & \text{falls} \quad \Delta := \frac{s^2}{4} - ad \geq 0 \\ \lambda_{1,2} = -\frac{s}{2} \pm i\sqrt{ad - \frac{s^2}{4}} & \text{falls} \quad \Delta < 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Dabei gilt in beiden Fällen

$$\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0\,,$$

also konvergieren nach S. 5.5 alle Lösungen der homogenen Gleichung gegen 0 für $t \to \infty$ (mit exponentieller Geschwindigkeit). Außerdem gilt $||e^{tA}|| \to 0$ für $t \to \infty$. Folglich erhalten wir mit B. 5.6 für alle Lösungen (Y, r) der inhomogenen Gleichung

$$\begin{pmatrix} Y(t) \\ r(t) \end{pmatrix} \to -A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & -1/d \\ 1/a & s/(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ -\overline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{M}/d \\ (a_0 d - s\overline{M})/(da) \end{pmatrix} \quad (t \to \infty)\,.$$

Insbesondere würde nach diesem Modell das Einkommen $Y(t)$ sich für $t \to \infty$ der Konstante $\overline{M}/d$ annähern, d.h. ist $\overline{M}$ (Geldangebot) „groß“ und d (Verhältnis von Geldnachfrage zu Einkommen) „klein“, so wird das Einkommen im Zeitverlauf „groß“ werden. [„It’s money, that matters“]

Wir betrachten jetzt wieder nichtlineare Gleichungen.

Bemerkung und Definition 5.8 Ist $g \in C^1(D)$ und $g(\overline{y}) = 0$, so ist $\varphi(t, \overline{y}) \equiv \overline{y}$ auf $I(\overline{y}) = \mathbb{R}$. Nullstellen von g nennen wir auch *stationäre* (oder *kritische*) *Punkte* von $y' = g(y)$. Dabei heißt $\overline{y}$

- *attraktiv*, falls ein $\delta > 0$ so existiert, dass $t^+(y^0) = \infty$ und $\varphi(t, y^0) \to \overline{y}$ für $t \to \infty$ und $|y^0 - \overline{y}| < \delta$ gilt,
- *stabil*, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass $t^+(y^0) = \infty$ und $\varphi(t, y^0) \in U_\varepsilon(\overline{y})$ für alle $y^0 \in U_\delta(\overline{y}), t \geq 0$,
- *asymptotisch stabil*, falls $\overline{y}$ attraktiv und stabil ist.

Damit gilt folgendes zentrale Ergebnis.

Satz 5.9 *(linearisierte asymptotische Stabilität)*
Es sei $G \subset \mathbb{R}^d$ offen, $g \in C^1(G, \mathbb{R}^d)$. Ferner sei $\overline{y}$ ein kritischer Punkt von $y' = g(y)$ mit

$$\mu := \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma\big(Jg(\overline{y})\big)\} < 0.$$

Ist $0 < \gamma < -\mu$, so existieren eine Umgebung U von $\overline{y}$ und ein $M \geq 0$ so, dass für alle $y^0 \in U$ gilt: $t^+(y^0) = \infty$ und

$$|\varphi(t, y^0) - \overline{y}| \leq M|y^0 - \overline{y}|e^{-\gamma t} \qquad (t \geq 0).$$

Insbesondere ist $\overline{y}$ asymptotisch stabil.

Beweis. 1. Ohne Einschränkung sei $\overline{y} = 0$. Dann gilt, da g differenzierbar an $\overline{y} = 0$ ist, gilt

$$g(y) = \underbrace{Jg(0)}_{=:A} \cdot y + r(y) = Ay + r(y)$$

mit $r(y)/|y| \to 0$ $(y \to 0)$). Es sei $\delta > 0$ so, dass $\alpha = \gamma + \delta < -\mu$ gilt. Nach S. 5.5 existiert ein $M > 0$ mit

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\alpha t} \qquad (t \geq 0)\ .$$

Wir setzen $C = \delta/M$. Dann existiert ein $\rho > 0$ mit $U_\rho(0) \subset G$ und

$$|r(y)| < C|y| \qquad (|y| < \rho).$$

Für $y^0 \in U_\rho(0)$ sei schließlich

$$\tau(y^0) := \sup\big\{t \in \big[0, t^+(y^0)\big) : \big|\varphi(s, y^0)\big| < \rho \text{ für alle } s \in (0, t)\big\}.$$

2. Wir zeigen: Für alle $y^0 \in U_\rho(0)$ gilt

$$(*) \qquad \big|\varphi(t, y^0)\big| \leq M|y^0|e^{-\gamma t} \qquad \big(t \in \big[0, \tau(y^0)\big)\big).$$

Denn: Da $\varphi(\cdot, y^0)$ Lösung von $y' = g(y) = Ay + r(y)$ ist, gilt

$$\varphi'(t, y^0) = A\varphi(t, y^0) + r\big(\varphi(t, y^0)\big) \qquad \big(t \in I(y^0)\big).$$

Also ist $\varphi(\cdot, y^0)$ Lösung des *linearen* Systems

$$y' = Ay + b(t)$$

mit $b(t) = b_{y^0}(t) := r\big(\varphi(t, y^0)\big)$ für $t \in I(y^0)$. Damit ergibt sich nach B. 5.6 (also Variation der Konstanten)

$$\varphi(t, y^0) = e^{tA}y^0 + \int_0^t e^{(t-s)A} r\big(\varphi(s, y^0)\big) ds \qquad \big(t \in I(y^0)\big).$$

Aus 1. folgt für $t \in \big[0, \tau(y^0)\big)$:

$$\begin{aligned}\big|\varphi(t, y^0)\big| &\leq \|e^{tA}\||y^0| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\|\big|r(\varphi((s, y^0))\big| \, ds \\ &\leq Me^{-\alpha t}|y^0| + MCe^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s}\big|\varphi(s, y^0)\big| \, ds,\end{aligned}$$

d. h. mit $\psi(t) := e^{\alpha t}\big|\varphi(t, y^0)\big|$ und $MC = \delta$

$$\psi(t) \leq M|y^0| + \delta \int_0^t \psi(s) \, ds \qquad \big(t \in \big[0, \tau(y^0)\big)\big).$$

Mit dem Gronwall-Lemma erhält man

$$e^{\alpha t}\big|\varphi(t, y^0)\big| = \psi(t) \leq M|y^0|e^{\delta t} \qquad \big(t \in \big[0, \tau(y^0)\big)\big),$$

also $(*)$ (man beachte $-\gamma = \delta - \alpha$).
3. Aus $(*)$ folgt insbesondere $\big|\varphi(t, y^0)\big| \leq M|y^0|$ für alle $t \in \big[0, \tau(y^0)\big)$. Ist also $y^0 \in U := U_{\rho/(2M+1)}(0) \subset U_\rho(0)$, so ist $\big|\varphi(t, y^0)\big| \leq \rho/2$ $\big(t \in \big[0, \tau(y^0)\big)\big)$. Hieraus folgt $\tau(y^0) = t^+(y^0)$ (denn sonst wäre $\big|\varphi(\tau(y^0), y^0)\big| \geq \rho$ und $|\varphi(s, y^0)| \leq \rho/2$ für $0 \leq s < \tau(y^0)$, was der Stetigkeit von $\varphi(\cdot, y^0)$ widerspricht). Aus S. 2.10 ergibt sich damit dann auch $\tau(y^0) = t^+(y^0) = \infty$ (beachte $\overline{U_{\rho/2}(0)} \subset G$ kompakt). Also gilt $(*)$ für alle $y^0 \in U$ und $t \in [0, \infty)$. □

Beispiel 5.10 1. (logistische Gleichung; vgl. B 1.6.1) Es sei $G = \mathbb{R}$ und $g(y) = y(1-y)$. Hier sind 0 und 1 die kritischen Punkte. Dabei gilt

$$g'(0) = 1, \qquad g'(1) = -1.$$

Also ist $\overline{y} = 1$ nach S. 5.9 asymptotisch stabil. Genauer gilt: Die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y(1 - y), \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

ist gegeben durch

$$\varphi(t,y_0) = \frac{y_0}{y_0 + e^{-t}(1-y_0)} \qquad \big(t \in I(y_0)\big),$$

wobei

$$I(y_0) = \big(t^-(y_0), t^+(y_0)\big) = \begin{cases} \Big(\log(1-1/y_0)\Big), \infty\Big), \; y_0 > 1 \\ \mathbb{R}, \; y_0 \in [0,1] \\ \Big(-\infty, \log(1-1/y_0)\Big), \; y_0 < 0\,. \end{cases} .$$

Man sieht also: Hier gilt $\varphi(t,y_0) \to 1$ $(t \to \infty)$ für alle $y_0 > 0$.

2. (gedämpfte Schwingung) Wir betrachten die Gleichung

$$y'' + 2ay' + \omega^2 \sin y = 0$$

mit $\omega, a > 0$ (a: Dampfungsparameter). Die Gleichung ist äquivalent zum System

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 - 2ay_2 \end{pmatrix}.$$

Hier sind $\overline{y} = \overline{y^{(m)}} = (m\pi, 0)$ $(m \in \mathbb{Z})$ die kritischen Punkte. Weiter ist

$$Jg(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos y_1 & -2a \end{pmatrix},$$

also

$$Jg(\overline{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(-1)^m \omega^2 & -2a \end{pmatrix}.$$

Also gilt für die Eigenwerte im Falle m gerade

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -a \pm \sqrt{a^2 - \omega^2} & , \text{ falls } a \geq \omega\,, \\ -a \pm i\sqrt{\omega^2 - a^2} & , \text{ falls } \omega > a \end{cases}$$

und im Falle m ungerade

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + \omega^2}.$$

Für m gerade ist $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$, also $\overline{y^{(m)}}$ asymptotisch stabil nach S. 5.9.

6 Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten jetzt gewisse glatte Teilmengen von $\mathbb{R}^d$.

Definition 6.1 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$. Dann heißt $M \subset \mathbb{R}^d$ *eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit (von $\mathbb{R}^d$)*, wenn zu jedem $x^0 \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ von x^0 und eine Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{d-k})$ gibt mit

1. $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$,
2. Rang $Jf(x^0) = d - k$ (also voller Rang).

Ist speziell $k = d-1$, also $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, so heißt M *Hyperfläche* in $\mathbb{R}^d$.

Beispiel 6.2 1. Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^2 - 1$. Dann ist

$$S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = 0\},$$

die $(d-1)$-dimensionale Einheitssphäre, eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$ (beachte: $Jf(x) = \operatorname{grad}^T f(x) = 2x^T \neq 0$ für $x \in S^{d-1}$).
2. (Torus) Für $0 < r < R$ sei $f : R^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) := (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x_1^2 + x_2^2)$$

Dann heißt

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 = r^2\}$$

(2-dimensionaler) Torus. M ist eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^3$ ([Ü]).
3. Ist $g \in C^1(V, \mathbb{R}^{d-k})$, wobei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen, so ist

$$\operatorname{graph}(g) = \big\{(y, g(y)) : y \in V\big\}$$

eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$.
(Denn: Man betrachte $f : U := V \times \mathbb{R}^{d-k} \to \mathbb{R}^{d-k}$ mit $f(x) = f(y, z) = z - g(y)$, wobei $x = (y, z)$ mit $y \in V$, $z \in \mathbb{R}^{d-k}$. Dann ist

$$\operatorname{graph}(g) = \{x \in U : f(x) = 0\}$$

und $Jf(x) = (-Jg(y), E_{d-k})$ hat vollen Rang $d-k$ für alle $x \in U$.)

Bemerkung 6.3 Nicht jede Untermannigfaltigkeit der Dimension k ist Graph **einer** Funktion von k reellen Variablen (etwa $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 0\}$), aber es gilt trotzdem folgende lokale Aussage:

Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ist $x^0 \in M$, so gibt es nach eventueller ,,Umnummerierung der Koordinaten" offene Umgebungen V von y^0 und W von z^0, wobei $y = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)})$, $z = (x_{\pi(k+1)}, \ldots, x_{\pi(d)})$ für eine Permutation π von $\{1, \ldots, d\}$, und eine Funktion $g \in C^1(V, \mathbb{R}^{d-k})$ mit

$$M \cap (V \times W) = \big\{\big(y, g(y)\big) : y \in V\big\}.$$

Der Beweis ergibt sich leicht aus dem HS implizite Funktionen; man wähle π so, dass $\det(\partial f/\partial z)(y^0, z^0) \neq 0$.

Definition 6.4 1. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt *homöomorph* (oder auch *topologisch*) falls φ bijektiv ist und φ sowie φ^{-1} stetig sind.
2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen. Eine Abbildung $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $d \geq k$, heißt *Immersion*, falls $J\varphi(s)$ für alle $s \in \Omega$ vollen Rang $(= k)$ hat.
3. Sind Ω, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^k$ offen, so heißt $\varphi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ *diffeomorph*, falls φ bijektiv ist und φ sowie φ^{-1} stetig differenzierbar sind.
In diesem Falle sind nach der Kettenregel $J\varphi$ und $J\varphi^{-1}$ auf Ω bzw. $\tilde{\Omega}$ invertierbar.
Weiterhin gilt nach den HS über Umkehrfunktionen: Ist $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ eine injektive Immersion (also $J\varphi(s)$ invertierbar für alle s), so ist $\varphi(\Omega)$ offen und $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ diffeomorph.

Satz 6.5 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und es sei $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Immersion. Dann existiert zu jedem $s^0 \in \Omega$ eine offene Umgebung V von s^0 so, dass $M := \varphi(V)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$ ist und dass $\varphi : V \to M$ (genauer $\varphi_{|V}$) homöomorph ist.*

Beweis. Nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten (falls nötig) können wir wieder davon ausgehen, dass mit $\varphi = (\sigma, \tau)^T$, wobei $\sigma := (\varphi_{\pi(1)}, \ldots, \varphi_{\pi(k)})$ und $\tau = (\varphi_{\pi(k+1)}, \ldots, \varphi_{\pi(d)})$ für eine Permutation π,

$$\det\, J\sigma(s^0) \neq 0$$

gilt. Nach dem HS über Umkehrfunktionen existiert eine offene Umgebung V von s^0 so, dass $\sigma : V \to V' := \sigma(V)$ diffeomorph ist. Definiert man $\Phi : V \times \mathbb{R}^{d-k} \to V' \times \mathbb{R}^{d-k}$ durch

$$\Phi(s, u) := \begin{pmatrix} \sigma(s) \\ \tau(s) + u \end{pmatrix},$$

so ist Φ diffeomorph, denn zum einen sieht man leicht, dass Φ bijektiv ist, und zum anderen gilt

$$\det J\Phi(s, u) = \begin{vmatrix} J\sigma(s) & 0 \\ J\tau(s) & E_{d-k} \end{vmatrix} = \det J\sigma(s) \neq 0\,.$$

Weiter folgt aus $\Phi(s,0) = (\sigma(s), \tau(s))^T$

$$\Phi(V \times \{0\}) = \varphi(V) = M.$$

Also gilt für $f = \Phi^{-1}$ und $U := V' \times \mathbb{R}^{d-k}$

$$M = f^{-1}(V \times \{0\}) = \big\{x \in U : f_{k+1}(x) = \ldots = f_d(x) = 0\big\}.$$

Da $Jf(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist, hat auch

$$J(f_{k+1}, \ldots, f_d)^T(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad}^T f_{k+1}(x) \\ \vdots \\ \operatorname{grad}^T f_d(x) \end{pmatrix}$$

vollen Rang $(= d - k)$.
Schließlich folgt aus $\varphi^{-1} = (f_1, \ldots, f_k)_{|M}$ die Stetigkeiit von φ^{-1}. □

Beispiel 6.6 1. Es sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann ist durch

$$\varphi(t) := (\cos t, \sin t)$$

eine Immersion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert. Man beachte, dass φ nicht injektiv ist, dass aber für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ eine offene Umgebung V von t_0 so existiert, dass $\varphi : V \to \varphi(V) =: M$ homöomorph ist (nämlich etwa $V = (t_0 - \pi, t_0 + \pi)$). In diesem Fall unterscheiden sich M und S^1 durch einen Punkt.
2. Es sei $\varphi : \Omega = \mathbb{R} \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} \cos s \cdot \sin t \\ \sin s \cdot \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \big((s,t) \in \Omega\big).$$

Hier ist

$$J\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} -\sin s \sin t & \cos s \cos t \\ \cos s \sin t & \sin s \cos t \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}.$$

Da $\sin t \neq 0$ für $t \in (0, \pi)$ ist, hat $J\varphi(s,t)$ vollen Rang (=2), d. h. φ ist eine Immersion. Wieder ist φ nicht injektiv. Ist jedoch $(s_0, t_0) \in \Omega$ und betrachtet man etwa $V = (s_0 - \pi, s_0 + \pi) \times (0, \pi)$, so ist $\varphi : V \to \varphi(V) =: M$ homöomorph. Dabei unterscheiden sich M und S^2 durch einen Meridian.

Satz 6.7 *Ist $M \subset \mathbb{R}^d$, so ist M genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$, wenn zu jedem $x \in M$ eine homöomorphe Immersion $\varphi = \varphi_x : V_\varphi \to M_\varphi$ existiert mit V_φ offen in $\mathbb{R}^k$, M_φ offen in M und $x \in M_\varphi$.*

Beweis. $\Leftarrow$ folgt aus S. 6.5.
$\Rightarrow$: Es sei g wie in B. 6.3. Dann ist $\varphi : V \to \mathbb{R}^d$ mit $\varphi(y) := \big(y, g(y)\big)(y \in V)$ eine Immersion, die V bijektiv auf $M \cap (V \times W)$ abbildet. Dabei ist φ^{-1} als Einschränkung der Projektion $(y,z) \mapsto y$ stetig. □

Bemerkung und Definition 6.8 Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$, so heißt jede Abbildung φ wie in S. 6.7 eine *Karte* (oder auch *lokale Parameterdarstellung*) von M. Es gilt dafür: Sind

$$\varphi : V_\varphi \to M_\varphi \subset M, \qquad \psi : V_\psi \to M_\psi \subset M$$

Karten mit $N := M_\varphi \cap M_\psi \neq \emptyset$, so sind $V := \varphi^{-1}(N) \subset V_\varphi$ und $W := \psi^{-1}(N) \subset V_\psi$ offen und $\psi^{-1} \circ \varphi : V \to W$ ist diffeomorph.
(Denn: N ist offen in M, da M_φ und M_ψ offen sind. Also sind auch V, W offen. Außerdem ist $\psi^{-1} \circ \varphi : V \to W$ als Verknüpfung injektiver Abbildungen injektiv und nach Definition auch surjektiv. Es bleibt zu zeigen, dass $\psi^{-1} \circ \varphi \in C^1(V, \mathbb{R}^k)$ ist mit $\det J(\psi^{-1} \circ \varphi)(s) \neq 0$ für alle $s \in V$.
Dazu sei $s^0 \in V$ gegeben.
Sind Φ zu φ und s^0 sowie Ψ zu ψ und $(\psi^{-1} \circ \varphi)(s^0)$ wie im Beweis zu S. 6.5, so folgt: Ist U eine offene Umgebung von $\varphi(s^0)$, die in den Wertebereichen von Φ und Ψ enthalten ist, so sind $\Phi : \Phi^{-1}(U) \to U$ und $\Psi : \Psi^{-1}(U) \to U$ diffeomorph. Damit ist auch $\Psi^{-1} \circ \Phi : \Phi^{-1}(U) \to \Psi^{-1}(U)$ diffeomorph. Auf einer Umgebung von s^0 gilt

$$(\psi^{-1} \circ \varphi)(s) = (\Psi_1^{-1}, \ldots, \Psi_k^{-1}) \circ \Phi)(s, 0)$$

und

$$J(\Psi^{-1} \circ \Phi)(s, 0) = \begin{pmatrix} J(\psi^{-1} \circ \varphi)(s) & 0 \\ * & * \end{pmatrix},$$

(vgl. Beweis zu Satz 6.5). Hieraus folgt, dass $\psi^{-1} \circ \varphi$ stetig differenzierbar ist und dass mit $\det J(\Psi^{-1} \circ \Phi)(s^0, 0) \neq 0$ auch $\det J(\psi^{-1} \circ \varphi)(s^0) \neq 0$ ist.)

Definition 6.9 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ist $x^0 \in M$, so heißt ein $v \in \mathbb{R}^d$ ein *Tangentialvektor* an M in x^0, falls ein $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$, wobei I ein offenes Intervall mit $0 \in I$, existiert mit $\gamma(I) \subset M$, $\gamma(0) = x^0$ und $\gamma'(0) = v$. Die Menge

$$T_{x^0} M := \{v \in \mathbb{R}^d : v \text{ Tangentialvektor an } M \text{ in } x^0\}$$

heißt *Tangentialraum* von M in x^0.

Satz 6.10 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $x^0 \in M$. Dann gilt:*

1. *$T_{x^0}M$ ist ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^d$.*

2. *Ist $\varphi : V_\varphi \to M_\varphi \subset M$ ein Karte von M mit $\varphi(s^0) = x^0$, so ist*

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}(s^0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial s_k}(s^0) \right)$$

   eine Basis von $T_{x^0}M$.

3. *Ist $U \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Umgebung von x^0 und gilt*

$$M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$$

   mit f wie in D. 6.1, so gilt

$$\begin{aligned} T_{x^0}M =& \big\{ v \in \mathbb{R}^d : \mathrm{grad}^T(f_j)(x^0) \cdot v = 0 \quad (j = 1, \dots, d-k) \big\} \\ \big(=& \big\{ \mathrm{grad}(f_j)(x^0) : j = 1, \dots, d-k \big\}^\perp \big) \end{aligned}$$

Beweis. Wir setzen

$$\begin{aligned} T_1 :=& \mathrm{linspan} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}(s_0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial s_k}(s^0) \right\} \\ T_2 :=& \big\{ \mathrm{grad} f_j(x^0) : j = 1, \dots, d-k \big\}^\perp \end{aligned}$$

und zeigen $T_1 \subset T_{x^0}M \subset T_2$. Da T_1 und T_2 k-dimensional sind, folgt $T_1 = T_{x^0}M = T_2$.
(i) $T_1 \subset T_{x^0}M$: Es sei

$$v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial \varphi}{\partial s_j}(s^0) \in T_1.$$

Ist $\varepsilon > 0$ so klein, dass $s^0 + t\lambda \in V\varphi$ für $|t| < \varepsilon$ gilt, so ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(t) := \varphi(s^0 + t\lambda)$ stetig differenzierbar mit $\gamma(0) = \varphi(s^0) = x^0$ und

$$\gamma'(0) = J\varphi(s^0) \cdot \lambda = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial \varphi}{\partial s_j}(s^0) = v.$$

(ii) $T_{x^0}M \subset T_2$: Es sei $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$ mit $\gamma(0) = x^0$und $\gamma(I) \subset M$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\gamma\big((-\varepsilon, \varepsilon)\big) \subset M \cap U$, also $f\big(\gamma(t)\big) = 0$ für $|t| < \varepsilon$. Mit der Kettenregel folgt

$$0 = (f_j \circ \gamma)'(0) = \mathrm{grad}^T(f_j)(x^0) \cdot \gamma'(0)$$

für $j = 1, \dots, d-k$, d.h. $\gamma'(0) \in T_2$. $\square$

Bemerkung und Definition 6.11 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir setzen für $x^0 \in M$

$$N_{x^0}M := (T_{x^0}M)^\perp \;\big(= \big\{ w \in \mathbb{R}^d : v^T w = 0 \text{ für } v \in T_{x^0}M \big\} \big).$$

Die Vektoren $w \in N_{x^0}M \setminus \{0\}$ heißen *Normalenvektoren* in x^0 (bezüglich M). Ist f wie in D. 6.1, so ist $\big(\mathrm{grad}^T f_j(x^0)\big)_{j=1,\dots,d-k}$ eine Basis von $N_{x^0}M$ nach S. 6.10.

Bemerkung und Definition 6.12 Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Man sagt, *A habe glatten Rand* (bzw *ist C^1-berandet*), falls zu jedem $x^0 \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ von x^0 und ein $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ existieren mit

(i) $A \cap U = \{x \in U : f(x) \le 0\}$,

(ii) $\mathrm{grad} f(x^0) \ne 0$.

Dann gilt (nach eventueller Verkleinerung von U), dass

$$\partial A \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$$

(also ist ∂A eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$).
(Denn: Es sei U so verkleinert, dass grad $f(x) \ne 0$ $(x \in U)$.
$\subset$: Ist $x \in A \cap U$ mit $f(x) < 0$, so ist $f(\widetilde{x}) < 0$ für $|x - \widetilde{x}|$ genügend klein, also $\widetilde{x} \in A \cap U$. Damit ist $x \in A^0$.
$\supset$: Ist $x \in A \cap U$ mit $f(x) = 0$, so ist $x \in \partial A$, denn sonst wäre $x \in A^0 \cap U$ eine lokale Extremstelle von f, also grad $f(x) = 0$.)

Satz 6.13 *Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und C^1-beschrandet. Dann ist* dim $N_x(\partial A) = 1$ *für alle $x \in \partial A$ und es gibt genau einen Vektor $n(x) \in N_x(\partial A)$ mit $\big|n(x)\big| = 1$ und so, dass*

$$x + tn(x) \notin A \textit{ für } t > 0 \textit{ genügend klein.}$$

Beweis. Da ∂A eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$ ist, ist dim $T_x(\partial A) = n - 1$, also dim $N_x(\partial A) = 1$ mit

$$N_x(\partial A) = \mathrm{linspan}\big\{\mathrm{grad} f(x)\big\},$$

falls f wie in B/D 6.12 ist. Wir setzen

$$n(x) := \frac{\mathrm{grad} f(x)}{|\mathrm{grad} f(x)|}.$$

Da $n(x)$ Anstiegsrichtung und $-n(x)$ Abstiegsrichtung von f ist, ist $n(x)$ die einzige Richtung in $N_x(\partial A)$, die die Bedingung aus dem Satz erfüllt. $\square$

Bemerkung und Definition 6.14 Man nennt $n(x)$ den *äußeren Normaleneinheitsvektor* von A in x und n *äußeres Normaleneinheitsfeld*. Ist f wie in B/D 6.12, so ist $n(x) = \mathrm{grad} f(x)/|\mathrm{grad} f(x)|$ auf U und damit ist $n : \partial A \to \mathbb{R}^d$ insbesondere stetig.

Bemerkung 6.15 Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und C^1-berandet. Ist $x^0 \in \partial A$ und ist $g \in C^1(V, \mathbb{R})$ so, dass ∂A lokal Graph von g ist (existiert nach B. 6.3; beachte $d-k=1$ hier), d. h.

$$(\partial A) \cap (V \times I) = \big\{(y, g(y)) : y \in V\big\}$$

für offene Umgebungen V von y^0 und I von z^0 (wobei $(y,z) = x$ nach eventueller Umnummerierung der Variablen), so gilt entweder

$$A \cap (V \times I) = \big\{(y,z) : z \leq g(y)\big\}$$

oder

$$A \cap (V \times I) = \big\{(y,z) : z \geq g(y)\big\}.$$

Also ist $f : U := V \times I \to \mathbb{R}^d$, $f(x) = f(y,z) = z - g(y)$ im ersten bzw. $f(x) = g(y) - z$ im zweiten Fall, wie in B/D 6.12. Damit ist im ersten Fall

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mathrm{grad}\ g(y)|^2}} \begin{pmatrix} -\mathrm{grad}\ g(y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und im zweiten Fall

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mathrm{grad}\ g(y)|^2}} \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\ g(y) \\ -1 \end{pmatrix}$$

7 Integrale auf Untermannigfaltigkeiten und Gaußscher Integralsatz

Wir wollen nun Oberflächenintegrale für Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten definieren. Dazu orientieren wir uns an der Substitutionsregel für Lebesgue-Integrale (→ Analysis).

Bemerkung und Definition 7.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und es sei $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ diffeomorph. Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, so gilt $f \in \mathscr{L}_1\big(\varphi(\Omega)\big)$ genau dann, wenn $(f \circ \varphi)\,|\mathrm{det}\ J\varphi| \in \mathscr{L}_1(\Omega)$ ist, und in diesem Falle gilt

$$\int\limits_{\varphi(\Omega)} f = \int\limits_{\Omega} (f \circ \varphi)\,|\mathrm{det}\ J\varphi|.$$

Man beachte dabei (→ LA): Es gilt $|\mathrm{det}\ J\varphi| = (\mathrm{det}\ (J\varphi)^T J\varphi)^{1/2}$.
Hat man statt eines Diffeomorphismus allgemeiner eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen ist, so gilt (→ LA): Die Matrix $(J\varphi)^T J\varphi$ ist positiv semidefinit, also existiert genau eine positive semidefinite Matrix $|J\varphi|$ mit $|J\varphi|^2 = (J\varphi)^T J\varphi$. Dafür gilt wieder

$$\mathrm{det}|J\varphi| = (\mathrm{det}(J\varphi)^T J\varphi)^{1/2}.$$

Es sei $f : \varphi(\Omega) \to \mathbb{K}$ beliebig. Ist $(f \circ \varphi)\,\mathrm{det}|J\varphi| \in \mathscr{L}_1(\Omega)$, so sagen wir, f sei *integrierbar bzgl.* $|d\varphi|$ und setzen

$$\int f|d\varphi| := \int\limits_{\Omega} (f \circ \varphi)\,\mathrm{det}|J\varphi|.$$

Es gilt dabei: Sind $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\tau := \widetilde{\Omega} \to \Omega$ diffeomorph, so ist $\int f\big|d(\varphi \circ \tau)\big| = \int f|d\varphi|$ nach der Substitutionsregel ([Ü]).

Bemerkung und Definition 7.2 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ ein k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ferner existiere eine endliche Menge F von Karten $\varphi : V_\varphi \to M_\varphi$ $(\varphi \in F)$, die M überdecken, d.h. $\bigcup\limits_{\varphi \in F} M_\varphi = M$. (Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn M kompakt ist.)
Wir wählen eine der Überdeckung $(M_\varphi)_{\varphi \in F}$ untergeordnete, lokal integrierbare Teilung der Eins, d. h. Funktionen $\alpha_\varphi : M \to [0, 1]$ mit $\alpha_{\varphi|(M \setminus M_\varphi)} = 0$, $\alpha_\varphi \circ \varphi \in \mathscr{L}_1(K)$ für alle kompakten $K \subset V_\varphi$ und $\sum\limits_{\varphi \in F} \alpha_\varphi = 1$.

(Ist $F = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, so sind etwa $\alpha_{\varphi_j} := 1_{N_j}$ mit $N_j := M_{\varphi_j} \setminus \sum\limits_{k=1}^{j-1} M_{\varphi_k}$ $(j = 1, \ldots, n)$ geeignet.)

Ist $f : M \to \mathbb{K}$ integrierbar bzgl. $|d\varphi|$ für alle $\varphi \in F$, so heißt f *integrierbar auf* M und

$$\int\limits_M f d\sigma := \sum_{\varphi \in F} \int f\alpha_\varphi |d\varphi| = \sum_{\varphi \in F} \int\limits_{V_\varphi} (f\alpha_\varphi \circ \varphi) \det|J\varphi|$$

das *Oberflächenintegral* von f auf M (man kann zeigen: mit f ist auch $f\alpha_\varphi$ integrierbar bzgl. $|d\varphi|$).

Wichtig dabei: Aus B./D. 6.8 und B./D. 7.1 folgt, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Karten ist. Außerdem kann man zeigen, dass die Definition auch unabhängig von der Wahl der Teilung der Eins ist.

Ist speziell $f = 1_A$ für $A \subset M$ integrierbar, so heißt

$$\sigma(A) := \sigma_M(A) := \int\limits_M 1_A d\sigma$$

Oberflächenmaß von A (bzgl. M) (oder auch *k-dimensionales Volumen* von A).

Beispiel 7.3 1. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es sei $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ $(t \in I)$. Ist $\varphi : I \to \varphi(I)$ homöomorph, so ist $M = \varphi(I)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$. Hier gilt, falls $1 = 1_M$ integrierbar ist,

$$\sigma(M) = \int\limits_M 1 d\sigma = \int 1|d\varphi| = \int\limits_I |\varphi'(t)|\, dt$$

($\sigma(M)$ heißt in diesem Fall auch *Länge* von M).

Ist etwa $I = (-\pi, \pi)$ und $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, so ist $M = S^1 \setminus \big\{(-1, 0)\big\}$ und

$$\sigma(M) = \int\limits_{(-\pi,\pi)} (\cos^2 + \sin^2)^{1/2} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 = 2\pi.$$

Natürlicher wäre es, die Länge (den Umfang) des Einheitskreises S^1 selbst zu betrachten. Hier braucht man (mindestens) zwei Karten: Sind etwa

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (\cos t, \sin t) && \big(t \in V_\varphi := (-\pi, \pi)\big) \\ \psi(t) &= (\cos t, \sin t) && \big(t \in V_\psi := (0, 2\pi)\big) \end{aligned}$$

so ist $M_\varphi = S^1 \setminus \big\{(-1, 0)\big\}$ und $M_\psi = S^1 \setminus \big\{(1, 0)\big\}$, d. h. $M_\varphi \cup M_\psi = S^1$. Hier ist etwa durch

$$\alpha_\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0 \\ 0, & x_1 < 0 \end{cases}$$

und

$$\alpha_\psi(x) = \begin{cases} 1, & x_1 < 0 \\ 0, & x_1 \geq 0 \end{cases}$$

eine der Überdeckung (M_φ, M_ψ) untergeordnete Teilung der Eins gegeben. Es gilt

$$\sigma(S^1) = \int\limits_{S^1} 1 d\sigma = \int\limits_{V_\varphi} \big(\alpha_\varphi \circ \varphi\big)\, |\varphi'| + \int\limits_{V_\psi} (\alpha_\psi \circ \psi)\, |\psi'| = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} 1 = 2\pi.$$

2. Es sei $\Omega = (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ und $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} \cos s \cdot \sin t \\ \sin s \cdot \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \big((s,t) \in \Omega\big).$$

Dann ist $\varphi : \Omega \to S^2 \setminus \big\{(x_1, 0, x_3) : x_1 < 0\big\} =: M$ homöomorph (vgl. B. 6.6). Hier ist

$$J\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} -\sin s \sin t & \cos s \cos t \\ \cos s \sin t & \sin s \cos t \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix},$$

also

$$(J\varphi^T J\varphi)(s,t) = \begin{pmatrix} \sin^2 t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit (da $\sin t > 0$ für $t \in (0, \pi)$)

$$\det\, |J\varphi|(s,t) = \begin{vmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin t\,.$$

Also folgt mit dem Satz von Fubini ($\to$ MIT)

$$\sigma(M) = \int 1 |d\varphi| = \int\limits_{\Omega} \det\, |J\varphi| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \sin t \, dt\, ds = 4\pi.$$

3. Es seien $V \subset \mathbb{R}^{d-1}$ offen und $g \in C^1(V, \mathbb{R})$. Dann gilt für $\varphi : V \to \mathbb{R}^d$ mit $\varphi(y) := \big(y, g(y)\big)^T$ und

$$M = \operatorname{graph} g = \Big\{\big(y, g(y)\big) : y \in V\Big\} = \varphi(V)$$

zunächst

$$J\varphi = \begin{pmatrix} E_{d-1} \\ \operatorname{grad}^T g \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned}(J\varphi)^T J\varphi &= (E_{d-1}, \operatorname{grad}\, g) \begin{pmatrix} E_{d-1} \\ \operatorname{grad}^T g \end{pmatrix} \\ &= E_{d-1} + \operatorname{grad}\, g \cdot \operatorname{grad}^T g.\end{aligned}$$

Hier gilt ($\to$ LA)

$$\det|J\varphi| = \big(\det(J\varphi)^T J\varphi\big)^{1/2} = (1 + |\text{grad } g|^2)^{1/2}$$

und damit für f integrierbar auf M

$$\int_M f\, d\sigma = \int_V (f \circ \varphi)\det|J\varphi| = \int_V f(y, g(y))\big(1 + |\text{grad } g(y)|^2\big)^{1/2}\, dy.$$

Wir beweisen zunächst eine lokale Version des Gaußschen Integralsatzes. Dazu setzen wir für $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $m \in \mathbb{N}$

$$C_c^1(U, \mathbb{K}^m) = \big\{f \in C^1(U, \mathbb{K}^m) : \exists\ K \subset U \text{ kompakt mit } f_{|U\setminus K} = 0\big\}.$$

Satz 7.4 *Es seien $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und C^1-berandet, $x^0 \in \partial A$ und V, I, g wie in B. 6.15. Ist $U = V \times I$, so gilt für alle $j = 1, \ldots, d$ und $f \in C_c^1(U, \mathbb{K})$*

$$\int_{A\cap U} \partial_j f = \int_{(\partial A)\cap U} f n_j d\sigma.$$

Beweis. Zunächst gilt nach B. 7.3.3

$$\int_{(\partial A)\cap U} f n_j d\sigma = \int_V (f \cdot n_j)\big(y, g(y)\big)\big(1 + |\text{grad } g|^2\big)^{1/2}(y)\, dy.$$

O. E. sei $a \cap U = \{(y, z) : z \le g(y)\}$.
1. Fall: $j \in \{1, \ldots, d-1\}$. Dann ist nach B. 6.15

$$n_j(y, g(y))\big(1 + |\text{grad } g(y)|^2\big)^{1/2} = -\partial_j g(y)$$

für $y \in V$. Also ist zu zeigen:

$$\int_{A\cup U} \partial_j f = -\int_V f(y, g(y))\partial_j g(y)\, dy\ .$$

Wir definieren $F : U = V \times I \to \mathbb{K}$ durch

$$F(y, z) = \int_\alpha^z f(y, t)\, dt \qquad (y \in V, z \in I),$$

wobei $\alpha := \inf I$ (man beachte: das Integral ist nicht uneigentlich, da f außerhalb einer kompakten Teilmenge von U verschwindet). Dann folgt aus dem HDI

$$\partial_d F(y, z)\Big(= \frac{\partial F}{\partial z}(y, z)\Big) = f(y, z)$$

und mit Differenziation von Parameterintegralen

$$\partial_j F(y,z)\big(=\frac{\partial F}{\partial y_j}(y,z)\big) = \int_\alpha^z \partial_j f(y,t)\,dt.$$

Da $f \in C_c^1(V \times I, \mathbb{K})$ ist (also $f = 0$ außerhalb einer kompakten Teilmenge von $V \times I$), gilt auch $h \in C_c^1(V, \mathbb{K})$ für $h : V \to \mathbb{K}$ mit

$$h(y) := \int_\alpha^{g(y)} f(y,t)\,dt \qquad (y \in V)$$

(wichtig: h verschwindet außerhalb einer kompakten Teilmenge von V). Mit dem Satz von Fubini und dem HDI ergibt sich ([Ü])

$$\int_V \partial_j h(y)\,dy = 0.$$

Weiter folgt aus der Kettenregel (mit $\varphi(y) = (y, g(y))^T$)

$$\begin{aligned}
\partial_j h(y) &= \partial_j (F \circ \varphi)(y) = \Big(\mathrm{grad} F(\varphi(y)) \begin{pmatrix} E_{d-1} \\ \mathrm{grad}^T g \end{pmatrix}\Big)_j \\
&= \partial_j F\big(y, g(y)\big) + \partial_d F\big(y, g(y)\big) \cdot \partial_j g(y) \\
&= \int_\alpha^{g(y)} \partial_j f(y,t)\,dt + f\big(y, g(y)\big)\, \partial_j g(y).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich wieder mit Fubini

$$\int_{A \cap U} \partial_j f = \int_V \left(\int_\alpha^{g(y)} \partial_j f(y,t)\,dt \right) dy = \underbrace{\int_V \partial_j h(y)\,dy}_{=0} - \int_V f\big(y, g(y)\big)\, \partial_j g(y)\,dy\ .$$

2. Fall: $j = d$. Dann ist nach B. 6.15

$$n_d(y, g(y)) \cdot \big(1 + \left|\mathrm{grad}\ g(y)\right|^2\big)^{1/2} = 1.$$

Da für jedes $y \in V$ die Funktion $z \mapsto f(y,z)$ außerhalb einer kompakten Teilmenge von I verschwindet, folgt aus dem HDI

$$\int_\alpha^{g(y)} \partial_d f(y,t)\,dt = f(y,t)\big|_\alpha^{g(y)} = f\big(y, g(y)\big).$$

Also folgt wieder mit Fubini

$$\int\limits_{A\cap U} \partial_d f = \int\limits_V \left(\int\limits_{\alpha}^{g(y)} \partial_d f(y,t)\, dt \right) dy$$

$$= \int\limits_V f\big(y, g(y)\big)\, dy = \int\limits_V (f \cdot n_d)\big(y, g(y)\big) \Big(1 + \big|\text{grad } g(y)\big|^2\Big)^{1/2} dy.$$

□

Bemerkung und Definition 7.5 Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen.Ist $F \in C^1(U, \mathbb{K}^d)$, so heißt

$$\text{div } F := \sum_{j=1}^{d} \partial_j F_j \left(= \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right)$$

Divergenz von F.
Mit den Voraussetzungen aus S. 7.4 gilt für $F \in C^1(U, \mathbb{K}^d)$, wobei $U \supset A$ offen,

$$\int\limits_{A\cap U} \text{div}\, F = \sum_{j=1}^{d} \int\limits_{A\cap U} \partial_j F_j = \sum_{j=1}^{d} \int\limits_{U\cap\partial A} F_j n_j\, d\sigma = \int\limits_{U\cap\partial A} F^T n\, d\sigma\ .$$

Damit erhalten wir

Satz 7.6 *(Gaußscher Integralsatz)*
Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und C^1-berandet. Ist $F \in C^1(U, \mathbb{K}^d)$, wobei $U \supset A$ offen, so gilt

$$\int\limits_A \textit{div } F = \int\limits_{\partial A} F^T n\, d\sigma.$$

Beweis. Es sei $x \in \partial A$. Dann existieren nach B. 6.3 eine Permutation π der Variablen sowie offene Mengen V, I und $g \in C^1(V, \mathbb{R})$ wie in B. 6.15. Wir setzen $U_x := V \times I$.
Ist $x \in A^0$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_x := U_\varepsilon(x) \subset A^0$. Damit ist $(U_x)_{x\in A}$ eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, existiert $E \subset A$ endlich so, dass $A \subset \bigcup\limits_{x\in E} U_x$.
Wir wählen eine der Überdeckung $(U_x)_{x\in E}$ untergeordnete, glatte Teilung der Eins, d. h. Funktionen $\alpha_x \in C_c^1(U_x, \mathbb{R})$ mit $\alpha_x(U_x) \subset [0,1]$ und $\sum\limits_{x\in E} \alpha_{x|A} = 1$,wobei α_x durch 0 auf $\mathbb{R}^d$ fortgesetzt ist. (Existenz → Analysis; etwa Forster, Analysis 3).

Dann gilt

$$\int_A \operatorname{div} F = \sum_{x\in E} \int_{A\cap U_x} \operatorname{div}(\alpha_x F)$$

und

$$\int_{\partial A} F^T n d\sigma = \sum_{x\in E} \int_{U_x\cap \partial A} (\alpha_x F)^T n\, d\sigma.$$

Nach B./D.7.5 ist (da $\alpha_x F \in C_c^1(U_x, \mathbb{K}^d)$)

$$\int_{U_x\cap\partial A} (\alpha_x F)^T n\, d\sigma = \int_{A\cap U_x} \operatorname{div}(\alpha_x F)$$

für alle $x \in E$ mit $U_x \cap \partial A \neq \emptyset$. Ist $U_x \cap \partial A = \emptyset$, so ist zu zeigen:

$$\int_{U_x} \operatorname{div}(\alpha_x F) = \int_{A\cap U_x} \operatorname{div}(\alpha_x F) = 0.$$

Dies ergibt sich wieder mit Fubini und HDI und aus der Tatsache, dass $\alpha_x F \in C_c^1(U_x, \mathbb{K}^d)$ ([Ü], vgl. Beweis zu S. 7.4). □

Definition 7.7 Es seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^2(U, \mathbb{K})$. Dann heißt

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2 f \quad \big(= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)\big)$$

Laplace von f und $\Delta : C^2(U, \mathbb{K}) \to C(U, \mathbb{K})$ heißt *Laplace-Operator* auf U.

Mit dem Gaußschen Integralsatz ergibt sich

Satz 7.8 *(Greensche Formeln)*
Es seien $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und C^1-berandet sowie $u, v \in C^2(U, \mathbb{K})$ mit $U \supset A$ offen. Dann gilt

1. $\displaystyle\int_A v\Delta u + \int_A \mathrm{grad}^T v \cdot \mathrm{grad}\; u = \int_{\partial A} v\, \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma,$

2. $\displaystyle\int_A v\Delta u - u\Delta v = \int_{\partial A} v\, \frac{\partial u}{\partial n} - u\, \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma,$

(wobei $\frac{\partial u}{\partial n}$ $(= \partial_n u)$ die Richtungsableitung von u in Richtung n bezeichnet).

Beweis. 1. Ergibt sich aus dem Gaußschen Integralsatz, angewandt auf $F := v \cdot \operatorname{grad} u$, da

$$\operatorname{div}(v \text{ grad } u) = \sum_{j=1}^{d} \partial_j (v \partial_j u) = \sum_{j=1}^{d} \big((\partial_j v)(\partial_j u) + v \partial_j^2 u \big) = \operatorname{grad}^T v \cdot \operatorname{grad} u + v \cdot \Delta u$$

und

$$F^T n = v \cdot \operatorname{grad}^T u \cdot n = v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} .$$

2. Aus 1. durch Differenzbildung. □