J. Müller

SS 2008
22.04.2008

2. Übung zur Approximationstheorie

Ü4: Es sei $f : I \to \mathbb{K}$. Zeigen Sie

(i) Ist f differenzierbar auf I mit beschränkter Ableitung, so ist $f \in \mathrm{Lip}(1)$ mit

$$\omega_f(\delta) \leq \|f'\|_\infty \cdot \delta \qquad (\delta > 0).$$

(ii) Ist $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ für ein $\alpha > 1$, so ist $f \equiv \mathrm{const.}$

Ü5: Es seien $Q_n \in \mathscr{T}_n$ mit $Q_n \geq 0$ und $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} Q_n = 1$.

a) Überlegen Sie sich, dass für $f \in C_{2\pi}$ gilt

$$\varepsilon_n(f) \leq \|f - f * Q_n\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \omega_f(|s|)\, Q_n(s)\, ds.$$

b) Zeigen Sie: Für $f(t) = |t|$ ($t \in [-\pi, \pi]$) gilt

$$|f(0) - (f * Q_n)(0)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |s|\, Q_n(s)\, ds.$$

Ü6: a) Beweisen Sie: Ist F_n der n-te Féjer-Kern, so gilt für alle $\alpha \in (0, 1)$ und $f \in C_{2\pi} \cap \mathrm{Lip}(\alpha)$

$$\|f - f * F_n\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

b) Berechnen Sie $\|f - f * F_n\|_\infty$ für $f(t) = e^{it}$ ($t \in \mathbb{R}$).