Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)
Seien X_1, X_2 reellwertige i.i.d. Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P(X_1 = -1) = P(X_1 = +1) = 1/2$. Außerdem sei $X_3 = X_1 \cdot X_2$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $Z = (X_1, X_3)$.

(b) Zeigen Sie, dass X_1 und X_3 stochastisch unabhängig sind.

(c) Untersuchen Sie, ob die Familie $(X_i)_{i \in I}$ für $I = \{1, 2, 3\}$ stochastisch unabhängig ist.

Aufgabe 2 (4+2 Punkte)
Sei X eine reellwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim U(0, 3)$.

(a) Berechnen und skizzieren Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F_X.

(b) Berechnen Sie $P(|X - 2| \geq 1)$.

Aufgabe 3 (4+4+2 Punkte)
Seien $A = [-1, +1]^2$ und $Z = (X, Y)$ eine 2-dimensionale Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit der durch

$$f_Z(x, y) = 4^{-1}(1 + x \cdot y) \cdot \mathbf{1}_A(x, y), \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

definierten λ^2-Dichte. Außerdem sei $Z^* = (X^2, Y^2)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung P^X eine λ^1-Dichte besitzt.

(b) Berechnen Sie die zu Z^* gehörige Verteilungsfunktion F_{Z^*}.

(c) Untersuchen Sie, ob X^2 und Y^2 stochastisch unabhängig sind.

Hinweis zu (c): Satz 6.31.

Aufgabe 4 (4+2 Punkte)
Seien $k \in \mathbb{N}$ und X eine reellwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P(X = -1) = P(X = +1) = (2 \cdot k^2)^{-1}$ und $P(X = 0) = 1 - k^{-2}$.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(b) Berechnen Sie $P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma)$ mit μ=$\mathrm{E}(X)$ sowie σ^2=$\mathrm{Var}(X)$ und schätzen Sie außerdem diese Wahrscheinlichkeit mit der Tschebyschev-Ungleichung ab.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, \ldots, X_n$ reellwertige stochastisch unabhängige Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $\mathrm{E}(X_i) = 0$ und $E(|X_i|^3) < \infty, \ i = 1, \ldots, n$. Berechnen Sie $\mathrm{E}((\sum_{i=1}^n X_i)^3)$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und X eine reellwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit der durch $f(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \mathbf{1}_{(0,1)}(x), \ x \in \mathbb{R}$, definierten λ^1-Dichte. Berechnen Sie alle Anfangsmomente m_k =$\mathrm{E}(X^k), \ k \in \mathbb{N}$.