

Aufgabe 1 (3 Punkte)

In einer Urne befinden sich $N \in \mathbb{N}$ Kugeln, die mit den Zahlen $1, \dots, N$ nummeriert sind. Es wird n -mal unabhängig und rein zufällig eine Kugel mit Zurücklegen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Kugel mit der Zahl 1 mindestens einmal erscheint.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

In einer Urne befinden sich $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Kugeln, die mit den Zahlen $1, \dots, n$ nummeriert sind. Es wird n -mal rein zufällig eine Kugel ohne Zurücklegen entnommen. Für $i = 1, \dots, n$ bezeichne A_i das Ereignis, dass die Kugel mit der Nummer i bei der i -ten Ziehung erscheint. Berechnen Sie $P(A_1 \Delta A_2)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_i \in \mathfrak{G}$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ der durch $(\Omega, \mathfrak{G}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_*^1)$ sowie $P = (1/2) \cdot (P_1 + P_2)$ mit $P_1 = U(-2, +1)$ und $P_2 = U(0, 2)$ definierte Wahrscheinlichkeitsraum. Berechnen Sie zu $A = [-1, +1]$ die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

Aufgabe 5 (2+4 Punkte)

Ein Fabrikant verspricht die Lieferung einer Ware zu einem festen Zeitpunkt. Die Lieferzeit unterliegt aber wegen unvorhersehbarer Einflüsse Schwankungen, sodass ein Zufallsexperiment vorliegt, bei dem die Abweichung vom versprochenen Liefertermin beobachtet wird. Als Modell soll daher ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ mit $(\Omega, \mathfrak{G}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_*^1)$ betrachtet werden. Dabei seien $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq -1, \\ 3/4 \cdot x - 1/4 \cdot x^3 + 1/2, & \text{falls } -1 < x \leq 1, \\ 1, & \text{falls } x > 1, \end{cases}$$

also $F(x) = (\frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{2}) \cdot \mathbf{1}_{(-1, +1]}(x) + \mathbf{1}_{(+1, +\infty)}$ definierte Verteilungsfunktion und P die zu F korrespondierende Wahrscheinlichkeitsverteilung.

- Berechnen Sie $P([0, 1])$ und $P([-1, +1])$.
- Berechnen Sie zu F eine Riemannsche Wahrscheinlichkeitsdichte.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $B, C \in \mathfrak{G}$ zwei unabhängige Ereignisse mit $P(B) > 0$ und $0 < P(C) < 1$. Zeigen Sie: Für alle $A \in \mathfrak{G}$ gilt

$$P(A|B) = P(A|B \cap C) \cdot P(C) + P(A|B \cap C^c) \cdot P(C^c).$$