Keller

SS 2007
26.07.2007

14. Übung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Hinweis: Die Aufgaben dieses Blatts wurden nicht besprochen.

Aufgabe 66
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = (1 - 1/2^n)/2$ und $P(X_n = -2^n) = P(X_n = 2^n) = 1/2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) das *Kolmogorovsche Kriterium* in Satz 7.44 nicht erfüllt und

(b) SLLN genügt.

Hinweis zu (b): Betrachten Sie zunächst die Folge der gestutzten Zufallsvariablen $Y_n = X_n \cdot \mathbf{1}_{\{|X_n|=1\}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 67
Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $p \in (0, 1)$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathfrak{S}$ liegende unabhängige Folge mit $P(A_n) = p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $S_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $(\mathbf{1}_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ genügt SLLN.

(b) $\forall K \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} P(|S_n - n \cdot p| > K) = 1$.

Aufgabe 68
Zwei Spieler A und B beteiligen sich an einem Spiel, bei dem in unabhängiger Folge eine ungefälschte Münze geworfen wird. Bei jedem Wurf mit dem Ergebnis „Kopf“ zahlt B an A einen Euro; im Fall von „Zahl“ ist es umgekehrt. Für $n \in \mathbb{N}$ sei X_n eine Zufallsvariable mit Werten in $\{-1,1\}$, die den Wert -1 bzw. 1 annimmt, falls der n-te Wurf „Zahl“ bzw. „Kopf“ ergibt, und S_n die zugehörige n-te Partialsumme gemäß Definition 7.39 a).

(b) Erklären Sie für $n \in \mathbb{N}$, welche Beobachtungen durch S_n beschrieben werden.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} P(-100 \le S_n \le 100)$.

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} P(-\sqrt{n} \le S_n \le \sqrt{n})$.

Aufgabe 69
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit Erwartungswert $\mu, \mu \in \mathbb{R}$, und Varianz σ^2. Außerdem sei $S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\sigma^2 < \infty$, so folgt $S_n^2 \xrightarrow{\text{f.s.}} \sigma^2$.

(b) Gilt $0 < \sigma^2$ und $\mu_4 < \infty$, so folgt $\sqrt{n} \cdot (S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{w} N(0, \mu_4 - \sigma^4)$.

Aufgabe 70 (Satz 7.50 (*Poissonscher Grenzwertsatz*))
Seien P, P_n, $n \in \mathbb{N}$, Wahrscheinlichkeitsmaße über $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1_*)$ mit $P = \mathfrak{P}(\lambda)$, $\lambda \in (0, \infty)$, und $P_n = B(n, p_n)$, $p_n \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Gilt $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$, so folgt $P_n \xrightarrow{w} P$.