Keller SS 2007
26.07.2007

13. Übung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Hinweis: Die Besprechung der Aufgaben dieses Blatts fand in der Übung am Montag, dem 16.07.2007, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 statt.

Aufgabe 61 (Satz 7.12)
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $X_n \longrightarrow c$ vollst., so folgt $X_n \xrightarrow{\text{f. s.}} c$.

(b) Gilt $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} c$ und ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig, so folgt $X_n \longrightarrow c$ vollst.

Aufgabe 62 (Beispiel 7.13)
Seien $\alpha \in (0, \infty)$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P(X_n = 1) = 1 - 1/n^\alpha$ und $P(X_n = n) = 1/n^\alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(a) Begründen Sie, warum alle Zufallsvariablen X_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, diskret verteilt sind.

(b) Finden Sie zu dem beliebig vorgegebenen α ein Beispiel, bei dem die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

(c) Untersuchen Sie, ob die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass sich mit α hinreichend und notwendig beschreiben läßt, wann die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vollständig gegen eine reelle Zahl konvergiert.

(e) Zeigen Sie, dass sich mit α auch hinreichend und notwendig beschreiben läßt, wann die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher konvergiert, wenn sie unabhängig ist.

Aufgabe 63 (Satz 7.37)
Seien X, X_n, $n \in \mathbb{N}$, reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$. Zeigen Sie: Gilt $X_n \xrightarrow{P} X$, so folgt $X_n \xrightarrow{w} X$.

Aufgabe 64
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$ und $P(X_n = 2^n) = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $X_n \xrightarrow{P} 0$.

(b) Es gilt nicht $\overline{X}_{(n)} \xrightarrow{P} 0$.

Aufgabe 65

Beim unabhängigen Werfen eines ungefälschten Würfels beschreibe die Zufallsvariable X_n mit Werten in $\{1, \ldots, 6\}$ die Augenzahl des n-ten Wurfs, $n \in \mathbb{N}$. Außerdem seien $A_n = \{X_n < X_{n+1}\}$ und $Y_n = \mathbf{1}_{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genügt WLLN.