Keller

SS 2007
26.07.2007

12. Übung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Hinweis: Die Besprechung der Aufgaben dieses Blatts fand in der Übung am Montag, dem 02.07.2007, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 statt.

Aufgabe 56
Seien (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, 2-dimensionale i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $E(X_1^2)$, $E(Y_1^2) < \infty$. Berechnen Sie die Erwartungswerte folgender Zufallsvariablen:

(a) $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ und $\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$;

(b) $S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) \cdot (Y_i - \overline{Y})$;

(c) $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$.

Hinweis zu (c): Aufgabe 1 (b).

Aufgabe 57 (Beispiel 6.24)
Seien X, Y, Z reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$.

(a) Es gelte $E(X) = E(Y)$ und $E(X^2) = E(Y^2) < \infty$. Zeigen Sie, dass $X - Y$ und $X + Y$ unkorreliert sind.

(b) Es gelte $E(X) = E(X^3) = 0$ und $E(X^4) < \infty$. Zeigen Sie, dass X und X^2 unkorreliert sind.

(c) Es gelte $E(X^2), E(Y^2), E(Z^2) < \infty$, wobei X, Y und Z paarweise unkorreliert seien. Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X + Z, Y + Z)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne von Definition 6.20.

(d) Beim 2-maligen unabhängigen Werfen einer ungefälschten Münze beschreibe die Zufallsvariable X_i mit Werten in $\{0, 1\}$ das Ergebnis des i-ten Wurfs, $i = 1, 2$. Außerdem seien $U = X_1 - X_2 - 1$ und $V = X_1 + X_2$. Berechnen Sie $E(U \cdot V)$.

(e) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen U und V in (d) unkorreliert sind.

(f) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen U und V in (d) nicht unabhängig sind.

Aufgabe 58

Beim 2-maligen unabhängigen Werfen eines ungefälschten Würfels beschreibe die Zufallsvariable X_i mit Werten in $\{1, \dots, 6\}$ die Augenzahl des i-ten Wurfs, $i = 1, 2$. Außerdem seien $X = X_1$ und $Y = X_{(2)}$.

(a) Zeigen Sie, dass Y und $7 - X_{(1)}$ identisch verteilt sind.

(b) Berechnen Sie $E(Y)$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

(c) Lösen Sie das Optimierungsproblem

„Minimierung des Ausdrucks $E(Y - a - b \cdot X)^2$ bezüglich a und b, $a, b \in \mathbb{R}$“.

(d) Berechnen Sie in der Situation von (c) die Reststreuung.

Hinweise: Aufgabe 45 (a), Aufgabe 48 und Satz 6.28.

Aufgabe 59

Berechnen Sie die Fourier-Transformierten folgender Wahrscheinlichkeitsmaße über $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1_*)$:

(a) $\mathfrak{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, und

(b) $U(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Aufgabe 60

Seien X, Y, X_n, Y_n, $n \in \mathbb{N}$, reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$, $c \in \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(a) Gilt $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ und $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Y$, so folgt $X = Y$ f.s.

(b) Gilt $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ und $Y_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Y$, so folgt $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{f. s.}} X + Y$ und $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X \cdot Y$.

(c) Gilt $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} c$ und ist g stetig in c, so folgt $g \circ X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} g(c)$.

(d) Gilt $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ und ist g stetig, so folgt $g \circ X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} g \circ X$.

Beweisen Sie die Aussage in (a).

Hinweis: Die Aussagen in (a) - (d) wurden in der Vorlesung am Dienstag, dem 03.07.2007, als Bemerkung 7.5 und Satz 7.7 formuliert.