Keller

SS 2007
26.07.2007

11. Übung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Hinweis: Die Besprechung der Aufgaben dieses Blatts fand in der Übung am Montag, dem 11.06.2007, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 statt.

Aufgabe 51

(a) Seien X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit R-Dichte f und $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, streng monotone Abbildung. Zeigen Sie, dass $Y = T \circ X$ ebenfalls eine R-Dichte besitzt.

(b) Seien X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim U(0,1)$ und $Y = e^X$. Berechnen Sie eine R-Dichte von Y.

Hinweise: Satz 5.58 und Satz 5.61.

Aufgabe 52

Seien X, Y unabhängige reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim B(m,p)$, $Y \sim B(n,p)$, $m, n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Zeigen Sie: $X + Y \sim B(m+n, p)$.

Hinweis: Die Verteilung der Summe zweier unabhängiger k-dimensionaler Zufallsvariablen X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ bezeichnet man als *Faltung* der Verteilungen von X und Y (Schreibweise: $L(X+Y) = P^X * P^Y$).

Aufgabe 53

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $E|X| < \infty$.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{Var}(X)=E(X^2) - (E(X))^2$.

(b) Bestimmen Sie unter der Voraussetzung, dass X diskret verteilt ist, die gemäß Satz 5.41 geltende Formel für $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$ im Fall $X \sim B(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$.

Hinweise: Die Aussage in (a) bzw. das Beispiel in (c) wurde in der Vorlesung am Dienstag, dem 12.06.2007, als Satz 6.8 b) bzw. Beispiel 6.9 a) formuliert.

Aufgabe 54

Seien X, Y, Z reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0, \sigma^2)$ und $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. Berechnen Sie

(a) $E(e^{t \cdot X})$ für $t \in \mathbb{R}$ und $m_k = E(X^k)$ für $k \in \mathbb{N}$,

(b) $E(|Y|)$ sowie

(c) $E(Z)$ und $\mathrm{Var}(Z)$.

Hinweis: Die Aussage in (c) wurde in der Vorlesung am Dienstag, dem 12.06.2007, als Beispiel 6.9 b) formuliert.

Aufgabe 55

(a) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $E|X| < \infty$. Zeigen Sie mit Hilfe von Korollar 5.51 für $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

(b) Eine Firma stellt Stahlkugeln her; der Erwartungswert des Kugeldurchmessers beträgt $\mu = 8,5$ mm, die Varianz $\sigma^2 = 0,0004$ mm. Welche Abweichungen vom Erwartungswert muß die Firma zulassen, wenn der Ausschuss höchstens 5 % betragen soll?

(c) Der in mm gemessene Durchmesser X einer bestimmten Schraubensorte sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 12$ und Standardabweichung $\sigma = 0,5$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser einer Schraube um mehr als 0,3 mm vom Sollwert μ abweicht.

Hinweis: Die Aussage in (a) wurde in der Vorlesung am Dienstag, dem 12.06.2007, als Korollar 6.14 (*Tschebyschev-Ungleichung*) formuliert.